Université Henri Poincaré - Nancy 1

IUT de Nancy-Brabois

Département GENIE des TELECOMMUNICATIONS et RESEAUX

TRAITEMENT DU SIGNAL

Transformée de Laplace

Enoncés de TD

--

Tables de transformées et propriétés

Hugues GARNIER et Jean-Marc THIRIET

Formulaire mathématique

Vous trouverez ci-dessous les pré-requis indispensables avant de suivre le module ***traitement du signal***. N'hésitez pas à travailler ceux qui peuvent vous poser problème.

1.1 Aspect mathématique

- Suites, séries (plus particulièrement la somme de la série géométrique :).
- Résolution d'équations différentielles du premier et du second ordre.
- Décomposition en éléments simples.
- Maniement des nombres complexes (module, argument, partie réelle, partie imaginaire).
- Maniement de la trigonométrie et des exponentielles complexes.
- Utilisation des logarithmes.

Tables de trigonométrie

,	
,	
$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$	
$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$	
$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$	$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$	
$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$	Pour tout entier rationnel n : ,
$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$	Pour tout entier rationnel n :
$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$	

1.2 Aspect électronique

- Notions de signal déterministe (période, fréquence, pulsation, valeur moyenne, valeur efficace, puissance).
- Diagramme de Bode en amplitude et phase (utilisation des échelles logarithmiques).
- Développement en série de Fourier d'un signal périodique.
- Transformée de Fourier.
- Notions de filtrage analogique (passe-bas, passe-haut, passe-bande, réjecteur de bande).

Rappels sur la décomposition en éléments simples

Soit $F(p) = \dfrac{\sum_{i=0}^{m} b_i\, p^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i\, p^i}$ avec $n > m$

1er cas : Les n pôles de F(p) sont tous distincts, dans ce cas :

$$F(p) = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \cdots + \frac{A_n}{p - p_n}$$

avec

$$A_i = \left[(p - p_i)\, F(p)\right]_{p=p_i} \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

2ème cas : F(p) possède un pôle multiple p_1 de multiplicité r, dans ce cas :

$$F(p) = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{(p - p_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(p - p_1)^r}$$

avec

$$A_i = \frac{1}{(r-i)!}\left[\frac{d^{r-i}}{dp^{r-i}}\left\{(p - p_1)^r\, F(p)\right\}\right]_{p=p_1} \qquad i = 1,2,\cdots,r$$

Règle de Hazony et Riley

Si n>m+1 alors $\sum_{i=1}^{n} A_i = 0$

Si n=m+1 alors $\sum_{i=1}^{n} A_i = 1$

2. Propriétés et tables de transformée de Laplace

2.1 Principaux théorèmes de la transformée de Laplace

Propriétés ou théorèmes	domaine temporel	domaine de Laplace p (ou s)
Linéarité	$f_1(t)+f_2(t)$ $Af(t)$	$F_1(p)+F_2(p)$ $A\ F(p)$
Dérivée 1ère par rapport au temps	$\frac{df(t)}{dt}$	$pF(p)-f(0)$
Dérivée 2nde par rapport au temps	$\frac{d^2f(t)}{dt^2}$	$p^2F(p)-pf(0)-\dot{f}(0)$
Dérivée nième par rapport au temps	$\frac{d^nf(t)}{dt^n}$	$p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-\ldots-f^{(n-1)}$
Théorème de l'intégration		$\frac{F(p)}{p}$
Théorème du retard	$f(t-t_0)$	$e^{-t_0p}F(p)$
Produit par une exponentielle	$e^{-\alpha t}f(t)$	$F(p+\alpha)$
Produit par le temps	$t\,f(t)$	$-\frac{dF(p)}{dp}$
Produit par t^n	$t^n\,f(t)$	$(-1)^n\frac{d^nF(p)}{dp^n}$
Produit par l'inverse du temps	$\frac{f(t)}{t}$	
Produit de convolution		$F(p)G(p)$
Produit simple	$f(t)g(t)$	$\neq F(p)G(p)$!!
changement d'échelle	f(at) avec a>0	$\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$
Théorème de la valeur initiale (quand la limite existe)		
Théorème de la valeur finale (quand la limite existe)		

2.2 Tables de transformée de Laplace des signaux usuels

domaine temporel	domaine symbolique
$\delta(t)$	1
$\Gamma(t)$	$\frac{1}{p}$
$r(t)$	$\frac{1}{p^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$
$\sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{p^2+\omega_0^2}$
$\cos \omega_0 t$	$\frac{p}{p^2+\omega_0^2}$
$\frac{A t^{n-1} e^{-\alpha t}}{(n-1)!}$	$\frac{A}{(p+\alpha)^n}$
$t \sin \omega_0 t$	$\frac{2\omega_0 p}{\left(p^2+\omega_0^2\right)^2}$
$t \cos \omega_0 t$	$\frac{p-\omega_0}{\left(p^2+\omega_0^2\right)^2}$
$t e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$
$\sin(\omega_0 t+\phi)$	$\frac{p \sin\phi+\omega_0 \cos\phi}{p^2+\omega_0^2}$
$\cos(\omega_0 t+\phi)$	$\frac{p \cos\phi-\omega_0 \sin\phi}{p^2+\omega_0^2}$

TD 1 : Transformée de Laplace

Ex 1.1

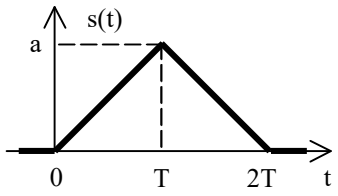
Déterminer la transformée de Laplace de $s(t) = \sin \omega_0 t$

Ex 1.2 :

Démontrer que : $L\left\{\frac{d^2 s(t)}{dt^2}\right\} = p^2 S(p) - ps(0) - \dot{s}(0)$

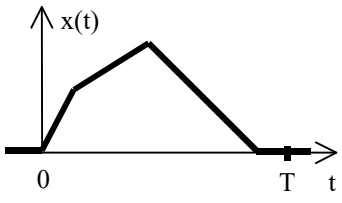
Ex 1.3 :

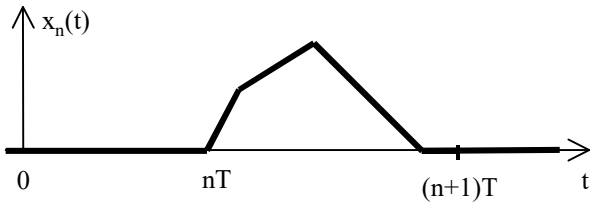
Déterminer la transformée de Laplace du signal dont l'évolution temporelle est représentée ci-dessous :



Ex 1.4 :

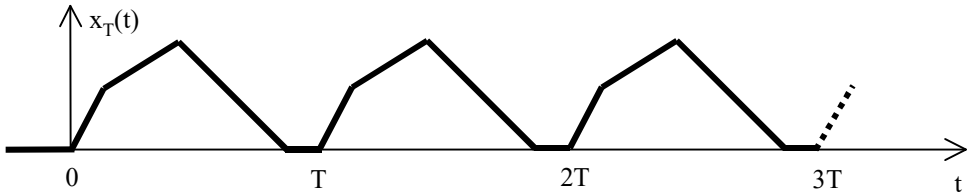
Soit le signal x(t) nul pour t<0 et pour t>T et supposons $L\{x(t)\}$=X(p)





Soit $x_n(t)$ le signal correspondant à x(t) retardé de nT. On s'intéresse au signal périodique $x_T(t)$ défini par :

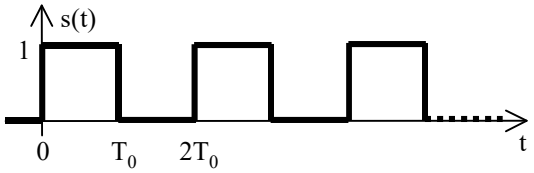
$$x_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t)$$



Démontrer que $L\{x_T(t)\} = \frac{X(p)}{1 - e^{-pT}}$

Ex 1.5 :

Déterminer la transformée de Laplace du signal en créneau dont l'évolution temporelle est représentée ci-dessous :



Rappel : $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \qquad si\ |x| < 1$

Ex 1.6 :

Déterminer la transformée de Laplace de $s(t) = \sin \omega_0 t\, e^{-\alpha t}$

Ex 1.7 :

Déterminer la transformée de Laplace de $s(t) = \omega_0 t \ \ \sin \omega_0 t \ e^{-\alpha t}$

TD 2 : Transformée de Laplace

Ex 2.1 :

Déterminer, si elle existe, la valeur initiale du signal $s(t) = \sin(\omega_0 t)e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$.

Ex 2.2 :

Déterminer, si elle existe, la valeur finale du signal s(t) ayant pour transformée de Laplace :

$$S(p) = \frac{K}{p^3 + 2p^2 + p}.$$

Ex 2.3:

Déterminer les signaux originaux ayant pour transformée de Laplace :

$$S_1(p) = \frac{10}{p^2 + 10p + 16}$$

$$S_2(p) = \frac{1}{(p+2)^3(p+3)}$$

$$S_3(p) = \frac{p+4}{p^2 + 16}$$

$$S_4(p) = \frac{20}{(p^2 + 6p + 25)(p+1)}$$

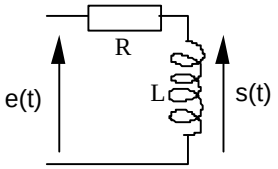
Ex 2.4 :

Trouver la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = e^{-7t}\,\Gamma(t) \qquad \text{avec } \dot{y}(0) = y(0) = 0\,.$$

Ex 2.5 :

On considère le montage analogique ci-contre :



1) Etablir l'équation différentielle qui lie les tensions e(t) et s(t).
2) Déterminer la fonction de transfert G(p) de ce système.

3) *Analyse dans le domaine temporel - Réponse indicielle*
e(t) est une tension continue E appliquée à l'instant t = 0. Etablir l'expression de la réponse indicielle s(t) lorsque s(0) et e(0) sont quelconques.
En supposant s(0) = e(0) = 0, représenter la réponse indicielle de ce filtre.

4) *Analyse dans le domaine fréquentiel - Réponse fréquentielle*
Déterminer G(jω), son module et son argument. Tracer la réponse fréquentielle en amplitude et en phase. En déduire le type de filtrage réalisé et préciser la fréquence de coupure.

Traitement du Signal

N B. : L'usage des calculatrices n'est pas autorisé
Aucun document autorisé
Soin, propreté et clarté seront appréciés par le correcteur

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque

Barème approximatif : 1: 3 points - **2** : 2 points - **3** : 5 points - **4** : 4 points- **5** : 5 points - **6** : 1 point (total sur 20)

---

1. Soit le signal à temps continu représenté sur la figure 1.

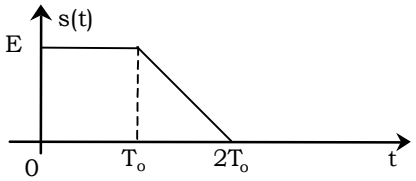


Figure 1

1.1 Donner une description mathématique du signal s(t).

1.2 Reconstituer le signal s(t) à l'aide de signaux usuels (type échelon, rampe).

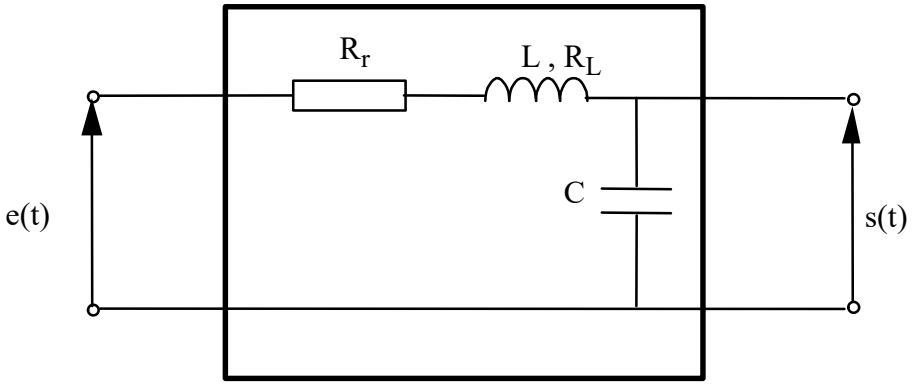
1.3 En déduire la transformée de Laplace du signal s(t).

---

2. Calculer :

$$L\left(t\, e^{-\alpha t}\Gamma(t)\right)$$

3.



$C = 1\ \mu F$

$L = 1\ H$

$R_L = 350\ \Omega$

$R_r = 1650\ \Omega$

On considère le montage analogique ci-dessus et on pose $R = R_r + R_L$

1) Etablir l'équation différentielle qui lie les tensions e(t) et s(t).

2) Déterminer la fonction de transfert $G(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)}$ de ce système.

3) Montrer que cette fonction de transfert se met sous la forme standard d'un système du second ordre :

$$G(p) = \frac{K\omega_0{}^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0{}^2}$$

Donner les expressions littérales et numériques du gain statique K, de la pulsation propre ω_0 et du coefficient d'amortissement z.

4) Déterminer les pôles de G(p). Conclure sur la stabilité du montage

5) Montrer que G(p) peut également s'écrire sous la forme suivante :

$$G(p) = \frac{K}{(1+Tp)^2}$$

Donner l'expression littérale de la constante de temps T.

6) *Analyse dans le domaine temporel - Réponse indicielle*

e(t) est une tension continue E appliquée à l'instant t = 0. Etablir l'expression littérale de la réponse indicielle s(t) lorsque $s(0) = \dot{s}(0) = 0$ en fonction de K et T.

7) *Analyse dans le domaine fréquentiel - Réponse fréquentielle*

Déterminer G(jω), son module et son argument. Tracer la réponse fréquentielle en amplitude et en phase. En déduire le type de filtrage réalisé et préciser la fréquence de coupure.

4.

4.1 Calculer la transformée en z de l'équation de récurrence ci-dessous :

$$y_k = 2x_k + \frac{1}{2}x_{k-1} - \frac{1}{2}x_{k-2} - 3y_{k-1} + 2y_{k-2}$$

4.2 $X(z) = \frac{2z^2}{(z-1)(z-0,6)}$

Donner la valeur de x(0) et la limite de x(k) lorsque $k \to +\infty$, sans calculer l'expression mathématique de x(k).

4.3 $X(z) = \frac{2z^2}{(z-1)(z-0,6)}$, déterminer l'expression mathématique de x(k), calculer ensuite les valeurs de x(0), x(1) et la limite de x(k) lorsque $k \to +\infty$, à partir de l'expression mathématique de x(k).

5.

Soit le système numérique décrit par l'équation de récurrence :

$$s_k = \frac{1}{2}e_k - \frac{1}{2}e_{k-1}$$

Déterminer :

a) la structure du système
b) la transformée en Z de s_k, ainsi que H(z), la fonction de transfert en z,
c) la réponse impulsionnelle, donner l'expression mathématique et la représentation graphique de cette réponse,
d) la réponse fréquentielle :

- montrer que l'expression de la réponse fréquentielle peut s'écrire $H(j\omega) = j.\sin\left(\frac{\omega T_e}{2}\right).e^{-j\omega T_e/2}$
- représenter $|H(j\omega)|$ pour ω variant de 0 à $\omega_e = \frac{2\pi}{T_e}$. Préciser quelles sont les bornes du domaine utile de ce système numérique.
- préciser de quel type de filtre il s'agit.

---

6. Démontrer la formule $Z(e^{-akT_e} f_k) = F(ze^{aT_e})$

Pour cela, on utilisera la définition de la transformée en Z utilisant l'opérateur Σ.