Université Henri Poincaré - Nancy 1
IUT de Nancy-Brabois
Département GENIE des TELECOMMUNICATIONS et RESEAUX



1ère Année

TRAITEMENT du SIGNAL :

Etude des systèmes analogiques
(Transformée de Laplace)
et numériques
(Transformée en Z)

Programme pour 2003-2004

Intervenants : El-Hadi DJERMOUNE, Hugues GARNIER, Jean-Marc THIRIET

Les systèmes numériques

Les systèmes numériques sont des systèmes "informatiques", c'est-à-dire des systèmes traitant des nombres sous forme binaire. Les systèmes numériques peuvent être analysés de la même manière que cela est effectué pour les systèmes analogiques. Si l'on compare les systèmes analogiques et numériques, on peut observer des analogies et des différences :

- Analogie de **comportement :** c'est par analogie avec les systèmes analogiques que l'on conçoit les systèmes numériques et c'est à leurs réponses en amplitude et en phase que l'on compare celles des systèmes numériques, tout au moins dans un premier temps.
- Différence fondamentale de **structure** : les systèmes numériques sont implantés sur des processeurs standards ou dédiés (processeurs de traitement du signal) ; à cet égard il est bon de rappeler que l'utilisation d'un micro-ordinateur n'a de sens que si les phénomènes mis en jeu ne sont pas trop rapides. Si la rapidité est trop importante, il faut utiliser des cartes spécialisées avec processeur de traitement du signal. On peut noter que la notion de structure doit être comprise dans le sens **d'algorithme** et pas seulement dans le sens de structure de réalisation matérielle.

1. Définition d'un système numérique

Un système numérique est constitué d'un groupement de circuits logiques astreints à un processus de calcul (ou algorithme) qui confère à ce système une fonction déterminée (filtre passe-bas, passe-haut, passe-bande, réjecteur de bande, intégrateur, différentiateur, écho, pilote de disque dur...). Le calcul porte sur une séquence (ou suite) de nombres introduite à son entrée et fournit une séquence numérique modifiée, c'est-à-dire "filtrée" ou traitée, à sa sortie. La plupart des modèles de systèmes analogiques peuvent ainsi être reproduits sous forme numérique. Les éléments physiques (résistance, capacité, inductance, amplificateurs opérationnels) sont en quelque sorte transposés en éléments logiques.

2. Constitution des systèmes numériques

Un système numérique est généralement constitué des éléments suivants :

- un ou plusieurs organes de retard (ce sont des registres à décalage jouant le rôle de mémoires retardées), pilotés par une horloge de période,
- des opérateurs arithmétiques (additionneurs et multiplieurs),
- des registres fournissant les coefficients de pondération du filtre.

La réalisation concrète d'un filtre numérique consistera en fait à matérialiser l'algorithme de calcul pour la structure retenue. On aura la possibilité de travailler :

- soit en logique câblée (assemblage d'organes logiques, tels que portes, mémoires, etc ...),
- soit en logique programmée (organisation autour d'un processeur de traitement du signal (DSP) ou, même, utilisation d'un microprocesseur(micro-ordinateur) standard).

3. Champ d'applications

Le champ d'applications du filtrage numérique est très vaste puisqu'il va des télécommunications au traitement de la parole, en passant par les systèmes d'asservissement, les radars et sonars, la prospection sismique, la "HiFi", etc... C'est surtout, à l'origine, dans les télécommunications que leur usage s'est très vite répandu car à la fois leur capacité de mémoire et la vitesse de traitement se trouvaient adaptées à la plupart des fonctions remplies sous forme numérique :

- codage-décodage (MPEG, JPEG), compression d'images et du son (informatique, télévision numérique),
- modulation FSK ("Phase Shift Keying"),
- corrections normalisées,
- séparateurs de canaux,
- modems (RTC, réseaux câblés, RNIS),
- Hi Fi, instruments de musique,
- contrôleurs de disques durs,
- accélérateurs graphiques 3D, animation en réalité virtuelle,
- reconnaissance d'images,
- cartes sons,
- suspensions actives automobiles,
- servo-moteurs à commande numérique,
- télécopies,
- radars.

Dans de nombreuses applications sont utilisés des DSP dédiés, c'est-à-dire qu'ils sont directement "programmés" avec un logiciel particulier à la conception (soit en ROM, soit câblé).

4. Propriétés des systèmes numériques

- reproductibilité : les caractéristiques de tous les systèmes numériques établis sur une même configuration sont rigoureusement identiques,
- souplesse : la réponse en fréquence peut être très aisément modifiée en changeant les coefficients arithmétiques ; le domaine des fréquences de travail est facilement déplacé par modification de la fréquence d'échantillonnage,
- précision : les différentes manipulations étant effectuées sur des nombres, la précision ne dépend, en grande partie, que de celle du CAN et de celle du CNA,
- association des filtres : la mise en série de filtres numériques ne pose aucun problème d'interaction, tel que celui que l'on rencontre pour l'adaptation des impédances des filtres analogiques,
- stabilité des caractéristiques : il n'y a pas de vieillissement des composants dû à l'influence de la température sur les caractéristiques du filtre.

Les principaux inconvénients sont liés au problème de l'échantillonnage (spectre du signal toujours limité) nécessitant l'utilisation de processeurs ayant une bonne rapidité d'exécution pour pouvoir traiter des signaux ayant une forte "dynamique" (fréquences élevées) en **temps réel**.

5. représentation des systèmes numériques

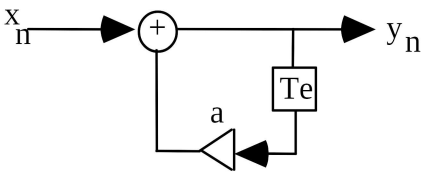
Les systèmes numériques sont décrits par une équation de récurrence. Cette équation de récurrence obéit aux règles mathématiques des séries et des suites numériques.

Voici un exemple d'équation de récurrence :

$$s_k = \sum_{i=0}^{p} b_i e_{k-i} - \sum_{j=1}^{q} a_j s_{k-j}$$

Voici un autre exemple d'équation de récurrence avec le schéma de la structure correspondant à base de multiplieurs, additionneurs et cellule à retard (une cellule à retard retardant d'une période d'échantillonnage).

$$y_n = x_n + a y_{n-1}$$

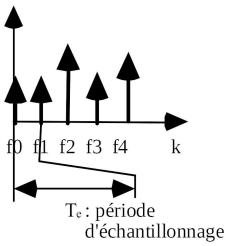


La transformée en Z

La **transformée en Z** est une adaptation de la transformée de Laplace pour l'étude des réponses transitoires des systèmes numériques ou discrets. La transformée en Z est donc relative aux suites numériques. Elle permet de ce fait un traitement des signaux et systèmes échantillonnés, analogue à celui que permet la transformée de Laplace pour les signaux et systèmes analogiques. En pratique, on utilisera le plus souvent possible la table des transformées en Z pour travailler.

1. Définition

La transformée en Z peut s'obtenir à partir de la transformée de Laplace en effectuant le raisonnement suivant :
Soit $F^*(p)$ la transformée de Laplace du signal échantillonné $f^*(t)$ représenté ci-contre.



$$f^*(t) = f_0\,\delta(t) + f_1\,\delta(t - T_e) + \ldots$$

La transformée de Laplace s'écrit :

$$F^*(p) = f_0 + f_1 e^{-pT_e} + f_2 e^{-2pT_e} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k\, e^{-kpT_e}$$

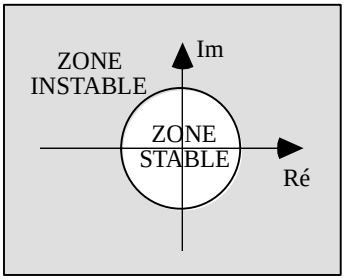
On peut constater que la transformée de Laplace d'un signal échantillonné s'exprime comme une somme de terme en e^{pT_e}. Pour exprimer la transformée en Z, on effectuera simplement le changement de variable $z = e^{pT_e}$, où p est la variable de Laplace, cette variable étant en général considérée comme **complexe** (écrite quelques fois $p = \alpha + j\beta$)·
La transformée en Z est par conséquent définie par :

$$Z(f(t)) = F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k\, z^{-k}$$

Dans la transformée en Z, la sommation s'effectue à partir de 0 ce qui suppose que le signal discret est causal, c'est-à-dire que son évolution est la conséquence d'une cause dont l'instant d'apparition est choisi comme origine des indices k.

2. Stabilité en Z

Un système continu a sa fonction de transfert exprimée en p (ou en s) à l'aide de la variable de Laplace. La condition pour qu'un système continu soit stable est que les pôles de sa fonction de transfert en Laplace soient à partie réelle négative.
D'autre part, étant donné que le lien entre les variables p et z s'exprime par la relation $z = e^{pT_e}$ et que la variable p s'écrit dans le cas général : $p = \alpha + j\beta$, alors $z = e^{\alpha T_e} e^{j\beta T_e}$.



Le fait que α soit négatif (condition de stabilité en p) implique que $e^{\alpha Te}$ soit inférieur à 1. Par conséquent, un système discret dont la fonction de transfert est exprimée en fonction de z est stable si tous les pôles ont un module inférieur à 1. On peut représenter ceci par un cercle unité(représentation polaire). Il faut donc que les pôles de la fonction de transfert se situent à l'intérieur du cercle unité.

3. Propriétés

3.1 Linéarité

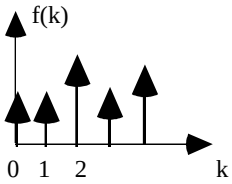
$$Z(af+bg) = aZ(f) + bZ(g)$$

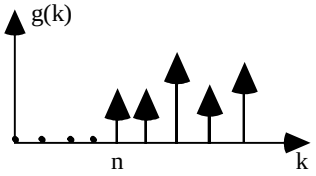
3.2 Théorème du retard temporel

Soient deux signaux discrets f(k) et g(k) tels que :

f(k) = 0 pour k<0 (signal causal)

g(k) = f(k-n), g(k) = 0 pour k<n (n > 0)





Calculons G(z) la transformée en z de g(k) :

$G(z) = \sum_{i=0}^{+\infty} g(i)z^{-i} = \sum_{i=n}^{+\infty} f(i-n)z^{-i}$ puisque g(i)=0 sur les premiers échantillons.

En posant j = i - n, il vient :

$$G(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} f(j)z^{-j-n} = z^{-n}\sum_{j=0}^{+\infty} f(j)z^{-j} = z^{-n}F(z)$$

d'où $Z(f_{k-n}) = z^{-n}F(z)$

Par conséquent retarder un signal causal de n échantillons revient à multiplier sa transformée en Z par z^{-n}.

3.3 Produit de convolution

Le produit des transformées en Z de deux signaux numériques est égal à la transformée en Z du produit de convolution des deux signaux.

$$Z(f*g) = Z(f)\,Z(g)$$

Démonstration : en supposant que f et g sont causals :

$f(k)*g(k) = \sum_{i=0}^{+\infty} f(i)\,g(k-i)$, cherchons la transformée en Z du produit de convolution :

$$Z(f*g)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty}f(i)g(k-i)\right)z^{-k}=\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}f(i)g(k-i)z^{-k}=\sum_{i=0}^{+\infty}f(i)\sum_{k=0}^{+\infty}g(k-i)z^{-k}$$

On reconnaît dans la seconde sommation la transformée en Z du signal g retardé de i échantillons (car nul pour k<i) , il vient donc :

$$Z(f*g)=\sum_{i=0}^{+\infty}f(i)z^{-i}\;G(z)=G(z)\sum_{i=0}^{+\infty}f(i)z^{-i}=G(z)F(z)$$ pour f et g causals.

3.4 Multiplication par e^{-at}

$$Z(e^{-akT_e}f(k))=F(ze^{aT_e})$$

Démonstration :

$$Z(e^{-akT_e}f(k))=\sum_{k=0}^{+\infty}f_k e^{-akT_e}z^{-k}=\sum_{k=0}^{+\infty}f_k\left(ze^{-aT_e}\right)^{-k}=F(ze^{aT_e})$$

3.5 Multiplication par α^t

$$Z(\alpha^t f(t))=F(\frac{z}{\alpha^{T_e}})$$

Démonstration : évident à partir de la forme 3.4 en posant $\alpha=e^{-a}$ et en remplaçant t par kT_e, si besoin.

3.6 Multiplication par t^n

$$Z(t^n f(t))=-T_e z\frac{d}{dz}\;Z(t^{n-1}f(t))$$

Démonstration : raisonnons pour n=1 :

$$Z(tf(t))=\sum_{k=0}^{+\infty}kT_e f(k)z^{-k}=T_e z\sum_{k=0}^{+\infty}kf(k)z^{-k-1}=-T_e z\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{d}{dz}\left(f(k)z^{-k}\right)$$
$$=-T_e z\frac{d}{dz}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left(f(k)z^{-k}\right)\right)=-T_e z\frac{d}{dz}Z(f(t))$$

Pour n quelconque, on utilise n fois la relation :

$$Z(t^n f(t))=-T_e z\frac{d}{dz}Z(t^{n-1}f(t)).$$

4. Transformée en Z des signaux-test

4.1 Dirac

$$Z(\delta(t))=1$$

4.2 Echelon

$$Z(\Gamma(t))=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}$$

5. Théorème de la valeur finale et de la valeur initiale

5.1 Théorème de la valeur initiale

$$f(0) = \lim_{z \to +\infty} F(z)$$ à condition que la limite existe.

Démonstration :

Puisque $F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k) z^{-k} = f(0) z^{0} + f(1) z^{-1} + f(2) z^{-2} + ... + f(n) z^{-n} + ...$ alors lorsque $z \to \infty$ $F(z) \to f(0)$.

5.2 Théorème de la valeur finale

$$\lim_{k \to +\infty} f_k = \lim_{z \to 1} \left((z-1) F(z) \right)$$

La limite f(∞) n'existe que si tous les pôles de F(z) sont dans le cercle unité (de module strictement inférieur à 1), un pôle unique pouvant être égal à 1.

Démonstration :

Formons

$$Z\left(f(t+T_e) - f(t)\right) = zF(z) - zf(0) - F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(f(k+1) -$$

.

Si l'on fait tendre z vers 1, l'égalité devient :

$$\lim_{z \longrightarrow 1} \left((z-1)F(z)\right) - f(0) = \lim_{k \longrightarrow +\infty} f(k) - f(0).$$

6. Recherche de l'original $Z^{-1}[X(z)] = x(k)$

Pour la recherche de l'original, il suffit d'utiliser la table de transformée. Toutefois, les formes sont souvent trop compliquées et n'apparaissent par conséquent pas directement dans la table. Il est par conséquent nécessaire d'utiliser une "astuce" telle que la dérivée ou l'intégrale ou, le plus souvent, de décomposer la forme obtenue en formes plus simples à l'aide de la décomposition en éléments simples.

Exemple de résolution de la transformée inverse en Z par décomposition en éléments simples :

La décomposition en éléments simples a pour objectif d'obtenir des formes simples qui soient présentes dans la table de transformée en Z.

$$Y(z) = \frac{z^3}{(z-a)(z-b)(z-c)} = \frac{Az}{z-a} + \frac{Bz}{z-b} + \frac{Cz}{z-c}$$

Lorsque A, B et C seront déterminés, les formes de la partie droite de l'équation ci-dessus sont bien des éléments simples présents dans la table de transformée en Z.

7. TABLE DE TRANSFORMEES EN Z (T_e est la période d'échantillonnage)

N.B. : En fonction des nécessités (notamment pour la décomposition en éléments simples), il est possible de passer de formes en z en formes en z-1

Passage de Laplace à z => $z = e^{pTe}$	$x(kT_e) = x_k$	$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x_n . z^{-n}$

Propriétés ou théorèmes	domaine temporel	domaine symbolique z

Linéarité	$x_k + y_k$ $A.x(k)$ 0	$X(z) + Y(z)$ $A.X(z)$ 0
Théorème du retard	$x_{k-n} = x((k-n)T_e) = x(t - nT_e)$	$z^{-n}X(z)$
Multiplication par e^{-at}	$e^{-at}x(t) = e^{-akTe}x_k$	$X(z.e^{aTe})$
Multiplication par k	$k.x_k$	$-z.$
	$k.\Gamma_k$	
	$at.\Gamma_k = akT_e.\Gamma_k$	$\frac{A.T_e z}{(z-1)^2}$
	$k^2.\Gamma_k$	
	$k^3.\Gamma_k$	
Multiplication par a^k	$a^k x_k$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$
	$a^k.\Gamma_k$	
	$ka^k.\Gamma_k$	
	$k^2a^k.\Gamma_k$	+
Produit de convolution	$x_k * y_k = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k y_{n-k}$	$X(z) . Y(z)$
	$x_k \cdot y_k$	$X(z) * Y(z)$
Théorème de la valeur initiale $x(0) = \lim_{z \to +\infty} X(z)$	Théorème de la valeur finale : $\lim_{k \to +\infty} x(k) = \lim_{z \to 1} (z-1)X(z)$	Théorème de la somme : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n = \lim_{z \to 1} X(z)$

domaine temporel	domaine symbolique
δ_k	1 ou z^0
Γ_k (=1 pour $k \geq 0$)	
$t^k.f(t)$	$- T_e z..Z(t^{k-1}f(t))$
$t.f(t)$	$- T_e z..Z(f(t))$
$\frac{a^k}{k!}$	$e^{a/z}$
$k^n T_e{}^n e^{akT_e}$	$\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left[\frac{1}{1-e^{-aT_e}.z^{-1}}\right]$

domaine temporel	domaine symbolique
$te^{-t/T} = kT_e e^{-k\frac{T_e}{T}}$	$\frac{T_e z.e^{-T_e/T}}{(z-e^{-T_e/T})^2}$
$\begin{cases} e^{-t/T}\sin(\omega t + \phi) \\ e^{-k\frac{T_e}{T}}\sin(\omega kT_e + \end{cases}$	$\frac{z\left(z.\sin(\phi) + e^{-T_e/T}\sin(\omega T_e - \phi)\right)}{z^2 - 2z.e^{-T_e/T}\cos\omega T_e + e^{-2T_e/T}}$
	$- < \phi <$
x^*k	$X^*(z^*)$
$\sin \omega t = \sin \omega kT_e$	$\frac{z.\sin(\omega T_e)}{z^2 - 2z\cos(\omega T_e) + 1}$
$\cos \omega t = \cos \omega kT_e$	$\frac{z.(z - \cos(\omega T_e))}{z^2 - 2z\cos(\omega T_e) + 1}$

8. Utilisation du serveur web

Dans le paragraphe 4 du serveur, vous trouverez :

- Un questionnaire d'auto-évaluation sur la transformée en Z.

Références bibliographiques

A. Deluzurieux & M. Rami - *Cours d'électronique numérique et échantillonnée* - Eyrolles, Paris, 1991.

F. Manneville & J. Esquieu - *Théorie du signal et composants* - Dunod, Paris, 1989.

Y. Thomas - *Signaux et systèmes linéaires* - Masson, Paris, 1992.

C. Ifeachor & B.W. Jervis - *Digital Signal Processing : a practical approach* - Addison-Wesley, Wokingham, 1993.

J.C. Belloc & P. Schiller - *Mathématiques pour l'électronique* - Masson, Paris, 1994.

TD 3 & 4 : TRANSFORMEE EN Z - ANALYSE DE SYSTEMES NUMERIQUES

Ex 1 : Soit le signal s_k défini par :

s(0) = 1 s(1) = 4 s(2) = 16 s(3) = 64 s(4)= s(5) = ... = 0.

Représenter le signal. En appliquant la définition, trouver la transformée en Z de s_k.

Extrait du devoir de 94-95

Ex 2 :

1. Trouver X(z), la transformée en z du signal à temps discret $x_k = \left(-1+2^k\right).\Gamma(k)$.

2. On retarde x_k de deux coups. Quelle est la transformée en z, Y(z) du signal y_k ainsi obtenu (on exprimera analytiquement y_k).

Ex 3:

Trouver la transformée en Z de $s_k = k^2\Gamma_k$

- Par lecture directe dans la table
- en utilisant $Z(ks_k) = -z.S'(z)$

Ex 4 : Pour chacune des formes ci-dessous :

- Lorsque c'est possible, donnez la valeur initiale x(0) et la valeur finale x(∞) de chacun des signaux suivants.
- Trouver les signaux originaux x_k dont les transformées sont les suivantes.
- A partir de l'expression mathématique du signal x_k, donner les valeurs de x(0), x(1), x(2) et x(3) ainsi que x(∞) lorsque cela est possible.

$$X_1(z) = \frac{z^2}{z^2 - 3z + 2} \qquad X_2(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}$$

$$X_3(z) = \frac{0{,}2z}{(z-1)(z-0{,}8)} \qquad X_4(z) = \frac{z^2(3{,}15z-3)}{4(z-1)(z-0{,}9)(z-0{,}5)}$$

$X_5(z) =$ $X_6(z) =$

Ex 5 : Soit le système numérique décrit par l'équation de récurrence :

$$s_k = -\frac{1}{2}e_k + \frac{1}{2}e_{k-1}$$

Déterminer :

a) la structure du système

b) la fonction de transfert en z,

c) la réponse impulsionnelle,

d) la réponse indicielle,

e) la réponse fréquentielle,

Préciser la (ou les) fréquence(s) de coupure et la zone utile.

f) le type du filtre, la (ou les) fréquences de coupure.
