Analyse des systèmes numériques

Définition

- ***Equation de récurrence***

$$s(k) = \sum_{i=0}^{p} b_i e_{k-i} - \sum_{i=1}^{q} a_i s_{k-i}$$

$$= b_0 e_k + b_1 e_{k-1} + \ldots + b_p e_{k-p} + a_1 s_{k-1} + \ldots + a_q s_{k-q}$$

- ***Fonction de transfert***

$$S(z) = \sum_{i=0}^{p} b_i E(z).z^{-i} - \sum_{i=1}^{q} a_i S(z).z^{-i}$$

$$= b_0 E(z) + b_1 E(z).z^{-1} + \ldots + b_p E(z).z^{-p} + a_1 S(z).z^{-1} + \ldots + a_q S(z).z^{-q}$$

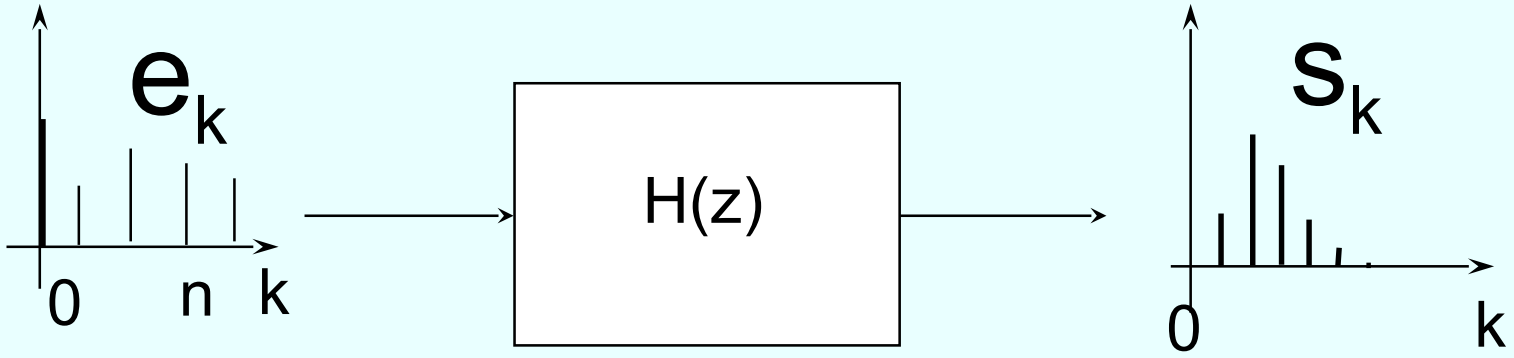
$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{p} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^{q} a_j z^{-j}}$$

q : **ordre** du système (ordre du dénominateur)

si le dénominateur = 1 : système non récursif (pas de pôles, ordre = p)

Présence de pôles => vérifier la stabilité

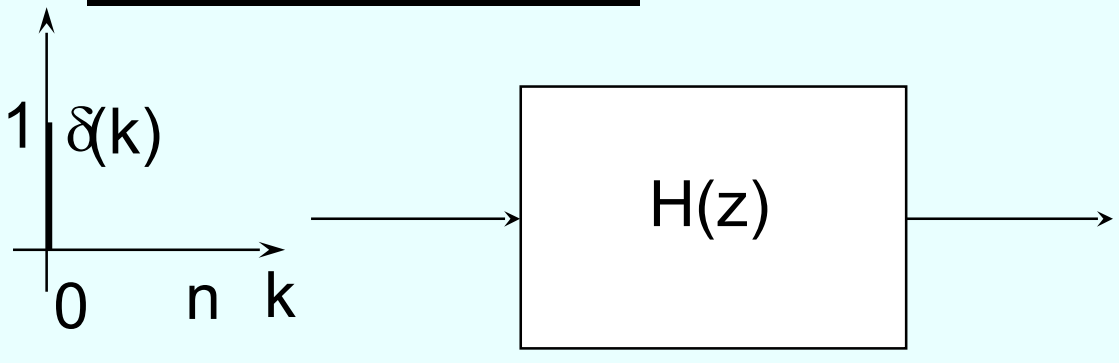
Relation entre sortie et entrée



$$S(z) = H(z)E(z) = \frac{\sum_{i=0}^{p} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^{q} a_j z^{-j}} . E(z)$$

Réponses temporelles

- ***Réponse impulsionnelle***



$$S(z) = H(z).1 = \frac{\sum_{i=0}^{p} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^{q} a_j z^{-j}}$$

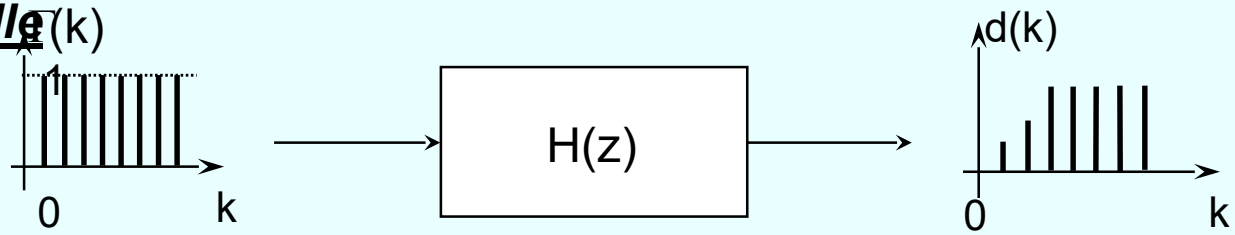
$$\delta_k = \begin{cases} 0 \text{ pour } k \neq 0 \\ 1 \text{ pour } k = 0 \end{cases}$$

$$S(z) = H(z)E(z)$$

$$s_k = Z^{-1}\left(H(z).1\right) = Z^{-1}\left(\frac{\sum_{i=0}^{p} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^{q} a_j z^{-j}}\right)$$

Réponses temporelles

- ***Réponse indicielle***



$$\Gamma_k = \begin{cases} 0 \text{ pour } k < 0 \\ 1 \text{ pour } k \geq 0 \end{cases}$$

$$S(z) = H(z).\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{\sum_{i=0}^{p} b_i z^{-i}}{1+\sum_{j=1}^{q} a_j z^{-j}} . \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$S(z) = H(z)E(z)$$

$$s_k = Z^{-1}\left(H(z).\frac{1}{1-z^{-1}} \right) = Z^{-1}\left(\frac{\sum_{i=0}^{p} b_i z^{-i}}{1+\sum_{j=1}^{q} a_j z^{-j}} . \frac{1}{1-z^{-1}} \right)$$

Réponse fréquentielle

- ***Fonction de transfert***

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{p} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{m=1}^{q} a_m z^{-m}}$$

- ***Réponse fréquentielle***

$$z = e^{j2\pi f T_e} = e^{j\omega T_e}$$

$$H(j\omega) = [H(z)]_{z=e^{j\omega T_e}} = \frac{\sum_{i=0}^{p} b_i e^{-j\omega i T_e}}{1 + \sum_{m=1}^{q} a_m z^{-j\omega m T_e}}$$

Tracé de |H(f)| et Arg(H(f))

réponse fréquentielle : périodique de période f_e

zone utile du système numérique : [0, f_e/2]

Exemple 1

Soit le système décrit par l'équation de récurrence :

$$s_k = e_k$$

Déterminer :

a) la fonction de transfert en z,

b) la réponse impulsionnelle,

c) la réponse indicielle,

d) la réponse fréquentielle,
Préciser la (ou les) fréquence(s) de coupure et la zone utile.

e) le type du filtre, la (ou les) fréquences de coupure.

$s_k = e_k$ **Solution 1**

- a) la fonction de transfert en z,

$$S(z) = E(z) \qquad H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = 1$$

- b) la réponse impulsionnelle,

$$h_k = Z^{-1}(H(z)) = Z^{-1}(1) = \delta_k$$

- c) la réponse indicielle,

$$d_k = Z^{-1}\left(H(z)\frac{1}{1-z^{-1}} \right) = Z^{-1}\left(\frac{1}{1-z^{-1}} \right) = \Gamma_k$$

Solution 1 (suite et fin)

- d) la réponse fréquentielle, Préciser la (ou les) fréquence(s) de coupure et la zone utile.

$$H(j\omega) = \left[H(z)\right]_{z=e^{j\omega T_e}} = \left[1\right]_{z=e^{j\omega T_e}} = 1$$

Composant ayant une réponse fréquentielle toujours = à 1 !!!!
Il s'agit bien sûr d'un suiveur...
La zone utile est la zone de fréquences pour laquelle la condition d'échantillonnage de Shanon-Nyquist est respectée (c'est-à-dire la zone [-Fe/2;Fe/2]

- e) le type du filtre, la (ou les) fréquences de coupure.

Il s'agit d'un suiveur, il n'y a donc pas de fréquence de coupure

Exemple 2

Soit le système numérique décrit par l'équation de récurrence :

$$s_k = \frac{1}{2} e_k + \frac{1}{2} e_{k-1}$$

Déterminer :

a) Représenter la structure de ce système

b) la fonction de transfert en z,

c) la réponse impulsionnelle,

d) la réponse indicielle,

e) la réponse fréquentielle,
Préciser la (ou les) fréquence(s) de coupure et la zone utile.

f) le type du filtre, la (ou les) fréquences de coupure.

Solution 2

$$s_k = \frac{1}{2} e_k + \frac{1}{2} e_{k-1}$$

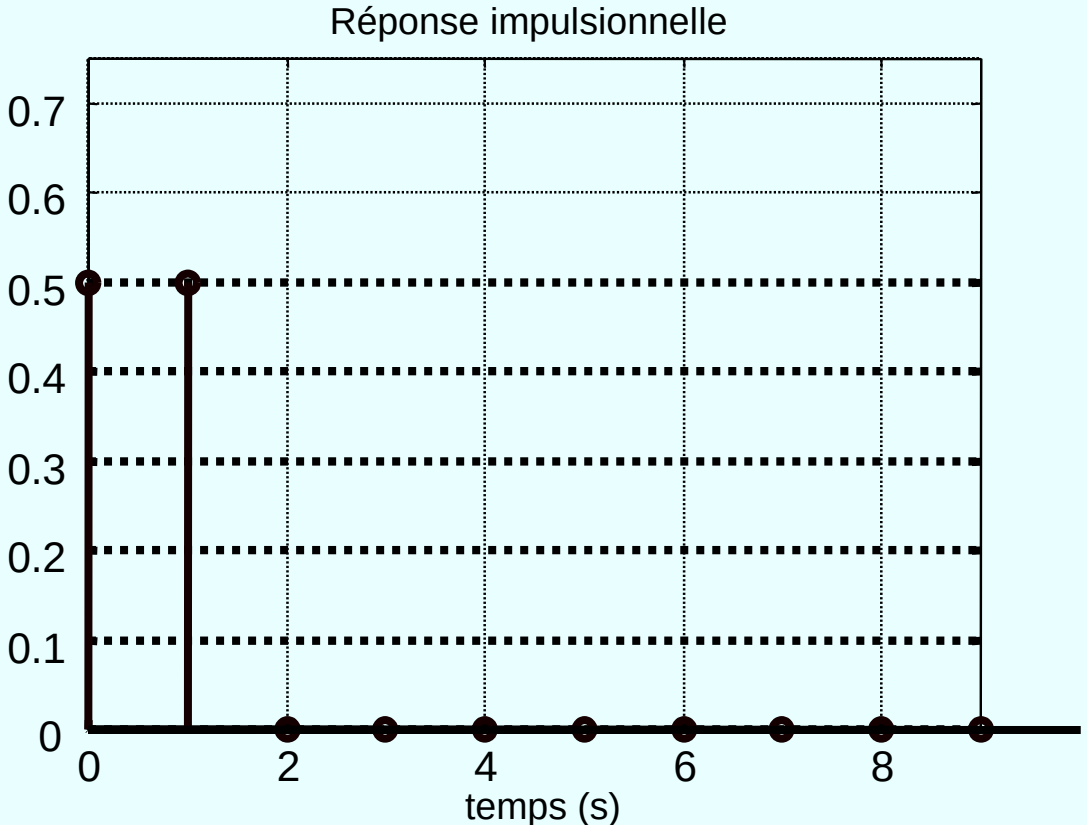
- b) la fonction de transfert en z,

$$S(z) = \frac{1}{2} E(z) + \frac{1}{2} E(z) z^{-1}$$ d'où $$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} z^{-1}$$

Solution 2

- c) la réponse impulsionnelle,

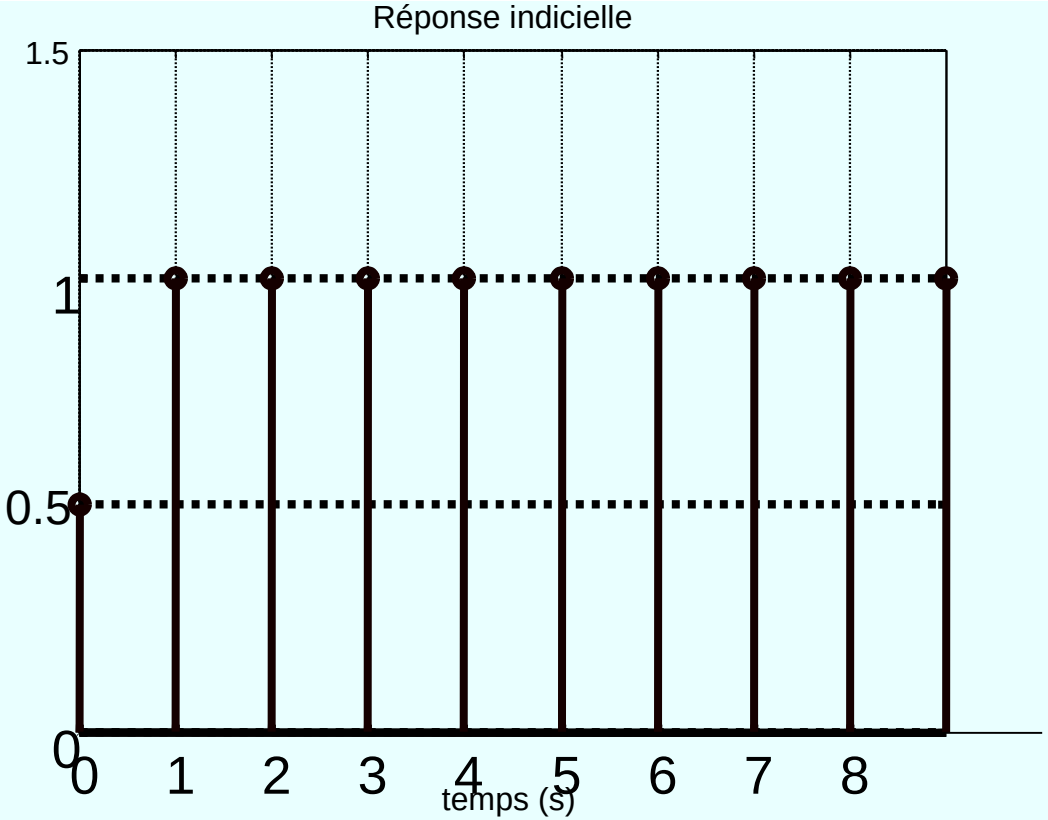
$$h_k = Z^{-1}(H(z)) = Z^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1}\right) = \frac{1}{2}\delta_k + \frac{1}{2}\delta_{k-1}$$



- d) la réponse indicielle,

$$d_k = Z^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\frac{1}{1-z^{-1}}\right)$$

$$= Z^{-1}\left(\frac{1}{2\left(1-z^{-1}\right)}+\frac{z^{-1}}{2\left(1-z^{-1}\right)}\right) = \frac{\Gamma_k}{2}+\frac{\Gamma_{k-1}}{2}$$



Solution 2 (rép. fréq.)

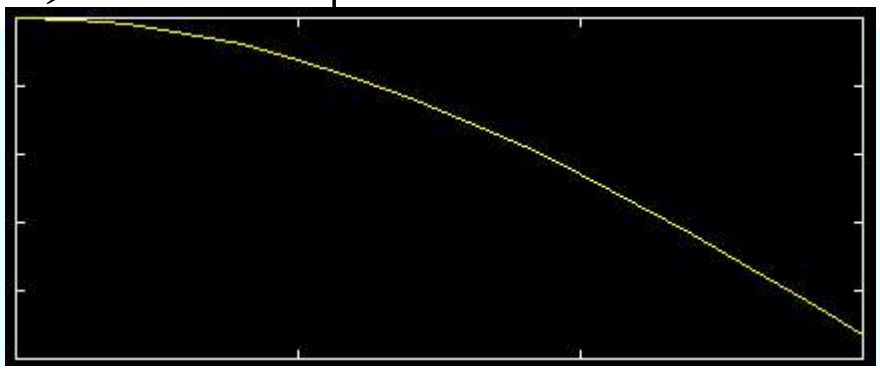
- e) la réponse fréquentielle, Préciser la (ou les) fréquence(s) de coupure et la zone utile.

$$H(j\omega) = [H(z)]_{z=e^{j\omega T_e}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\omega T_e}$$

$$|H(j\omega)| = \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\omega T_e}\right| = \left|\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\omega T_e}\right)e^{j\omega T_e/2}e^{-j\omega T_e/2}\right|$$

$$= \left|\left(\frac{1}{2}e^{j\omega T_e/2} + \frac{1}{2}e^{-j\omega T_e/2}\right)e^{-j\omega T_e/2}\right| = \left|\left(\cos(\omega T_e/2)\right)e^{-j\omega T_e/2}\right|$$

$$= \left|\cos(\omega T_e/2)\right|$$



Solution 2 (rép. fréq.)

$$\arg(H(j\omega)) = \arg\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\omega T_e}\right)$$

$$= \arg\left(\left(\cos(\omega T_e / 2)\right)e^{-j\omega T_e/2}\right)$$

$$= \arg\left(\cos(\omega T_e / 2)\right) + \arg\left(e^{-j\omega T_e/2}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 \;\; si \;\; \cos(\omega T_e / 2) > 0 \\ \Pi \;\; si \;\; \cos(\omega T_e / 2) < 0 \end{cases} + -\omega T_e / 2$$

Solution 2 (type de filtre)

f) le type du filtre, la (ou les) fréquences de coupure

Il s'agit d'un filtre passe-bas, la fréquence de coupure est telle que

le gain est égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$ *le gain max (ici $\frac{\sqrt{2}}{2}$ *1)

Il faut donc résoudre $\left|\cos\left(\omega T_e / 2\right)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

D'où $\omega_c = \frac{\omega_e}{4}$

Exercice

Soit le système numérique décrit par l'équation de récurrence :

$$s_k = -\frac{1}{2}e_k + \frac{1}{2}e_{k-1}$$

Déterminer :

a) la structure du système

b) la fonction de transfert en z,

c) la réponse impulsionnelle,

d) la réponse indicielle,

e) la réponse fréquentielle,
Préciser la (ou les) fréquence(s) de coupure et la zone utile.

f) le type du filtre, la (ou les) fréquences de coupure.