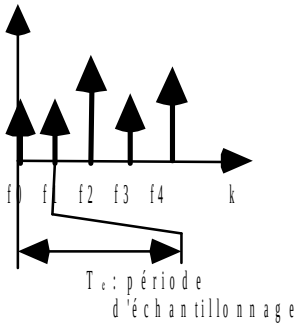
Transformée en Z

Définition de la transformée en Z

1. Définition

La transformée en Z peut s'obtenir à partir de la transformée de Laplace en effectuant le raisonnement suivant :

Soit $F^*(p)$ la transformée de Laplace du signal échantillonné $f^*(t)$ représenté ci-contre.



$$f^*(t) = f_0\,\delta(t) + f_1\,\delta(t - T_e) + \dots$$

La transformée de Laplace s'écrit :

$$F^*(p) = f_0 + f_1 e^{-pT_e} + f_2 e^{-2pT_e} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k e^{-kpT_e}$$

On peut constater que la transformée de Laplace d'un signal échantillonné s'exprime comme une somme de terme en e^{pT_e}. Pour exprimer la transformée en Z, on effectuera simplement le changement de variable $z = e^{pT_e}$, où p est la variable de Laplace, cette variable étant en général considérée comme **complexe** (écrite quelques fois $p = \alpha + j\beta$).

La transformée en Z est par conséquent définie par :

$$Z\left(f(t)\right) = F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k z^{-k}$$

Propriétés

3.1 Linéarité

$$Z(af+bg)=aZ(f)+bZ(g)$$

3.2 Théorème du retard temporel

$$Z(f_{k-n}) = z^{-n}F(z)$$

3.3 Produit de convolution

$$Z(f*g) = Z(f)Z(g)$$

3.4 Multiplication par e^{-at}

$$Z\left(e^{-akT_e} f(k)\right) = F\left(ze^{aT_e}\right)$$

3.5 Multiplication par α^t

$$Z\left(\alpha^t f(t)\right) = F\left(\frac{z}{\alpha^{T_e}}\right)$$

3.6 Multiplication par t^n

$$Z\left(t^n f(t)\right) = -T_e z \frac{d}{dz} Z\left(t^{n-1} f(t)\right)$$

Signaux test

4.1 Dirac

$$Z(\delta_k) = 1$$

4.2 Echelon

$$Z(\Gamma_k) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

5.1 Théorème de la valeur initiale

$$f(0) = \lim_{z \to +\infty} F(z)$$

5.2 Théorème de la valeur finale

$$\lim_{k \to +\infty} f_k = \lim_{z \to 1} \left((z - 1) F(z) \right)$$



La limite f(∞) n'existe que si :
Tous les pôles de X(z) sont dans le cercle unité (de module inférieur à 1), un pôle unique pouvant être égal à 1

Recherche de l'original

Exemple de résolution de la transformée inverse en Z par décomposition en éléments simples :

La décomposition en éléments simples a pour objectif d'obtenir des formes simples qui soient présentes dans la table de transformée en Z.

$$Y(z) = \frac{z^3}{(z-a)(z-b)(z-c)} = \frac{Az}{z-a} + \frac{Bz}{z-b} + \frac{Cz}{z-c}$$

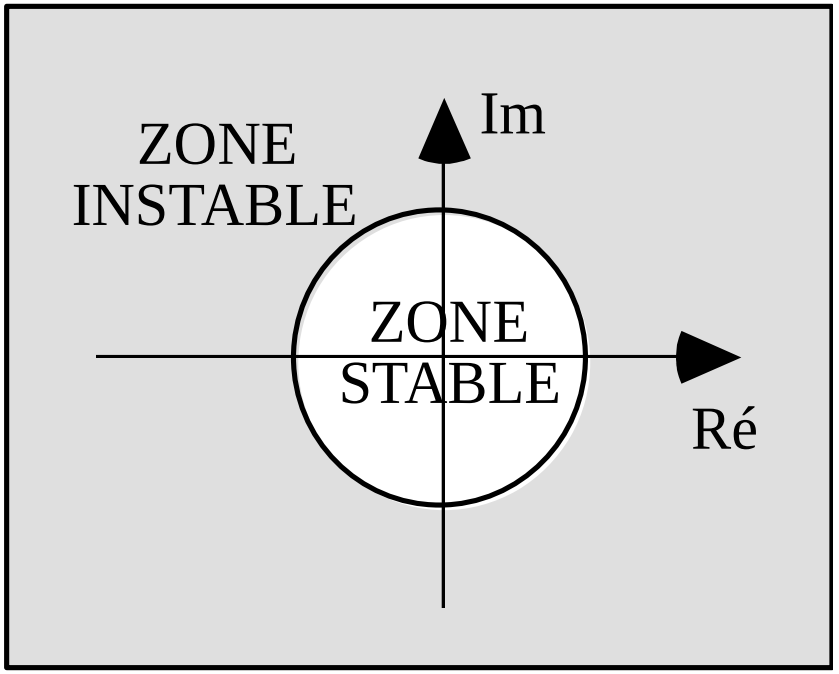
Lorsque A, B et C seront déterminés, les formes de la partie droite de l'équation ci-dessus sont bien des éléments simples présents dans la table de transformée en Z.

Autre technique →
Recherche de l'original
par division polynomiale

Stabilité en Z

Un système continu a sa fonction de transfert exprimée en p (ou en s) à l'aide de la variable de Laplace. La condition pour qu'un système continu soit stable est que les pôles de sa fonction de transfert en Laplace soient à partie réelle négative.

D'autre part, étant donné que le lien entre les variables p et z s'exprime par la relation $z = e^{pT_e}$ et que la variable p s'écrit dans le cas général : $p = \alpha + j\beta$, alors $z = e^{\alpha T_e} e^{j\beta T_e}$.



Stabilité (2/2)

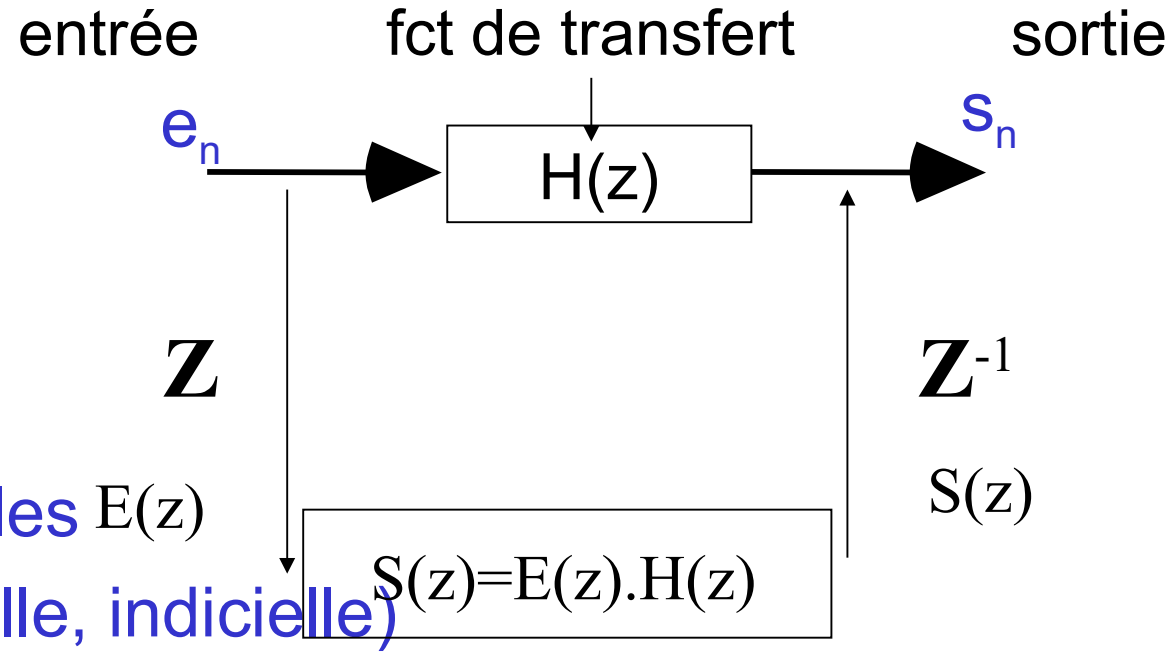
- Un système numérique est stable si les pôles de sa fonction de transfert en z (H(z)) sont en module inférieurs à 1

$$\forall i,\ |z_i| < 1$$

- Exemple : $$Y(z) = \frac{z^3}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)}$$

Intérêt de la transformée en Z

- Etude des réponses de systèmes numériques

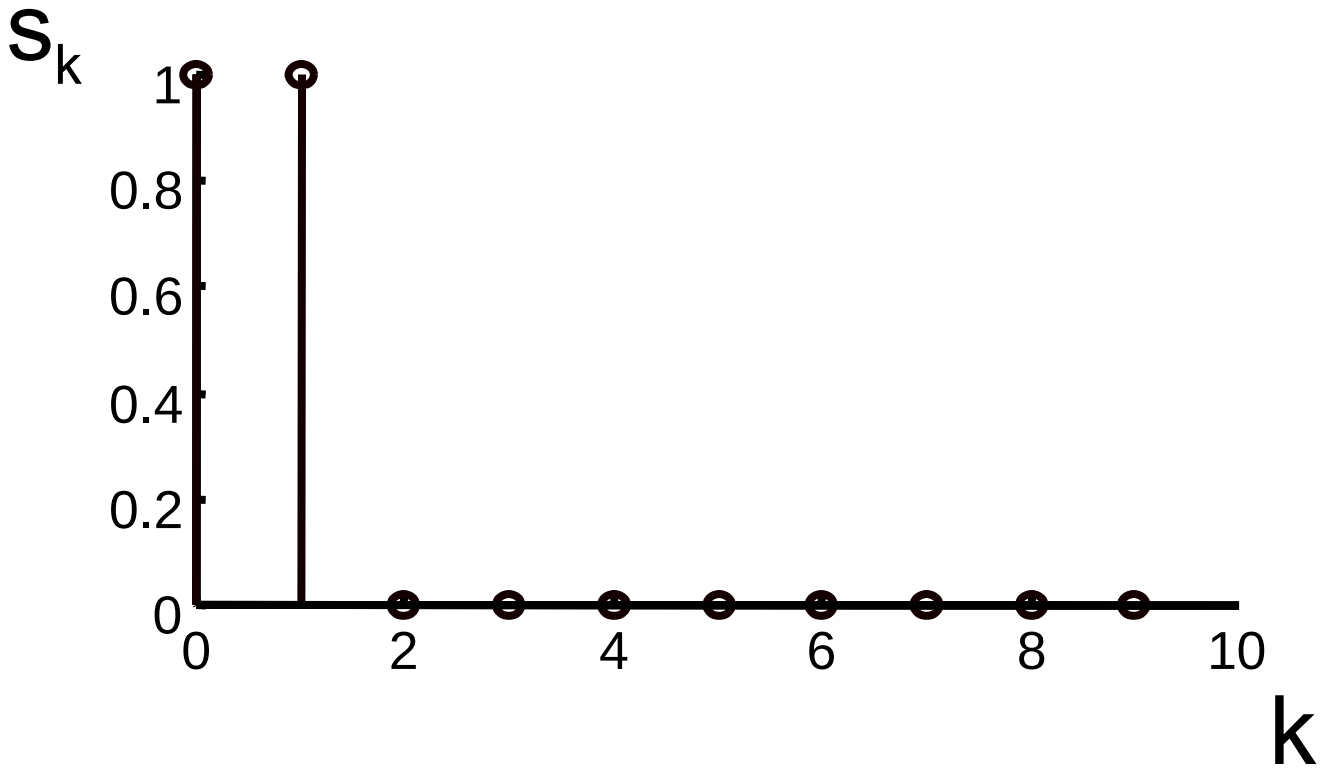


- Réponses temporelles (réponse impulsionnelle, indicielle)
- Réponse fréquentielle :

$$z = e^{j\omega T_e}$$

Exemple 1 : transformée en Z

- Soit

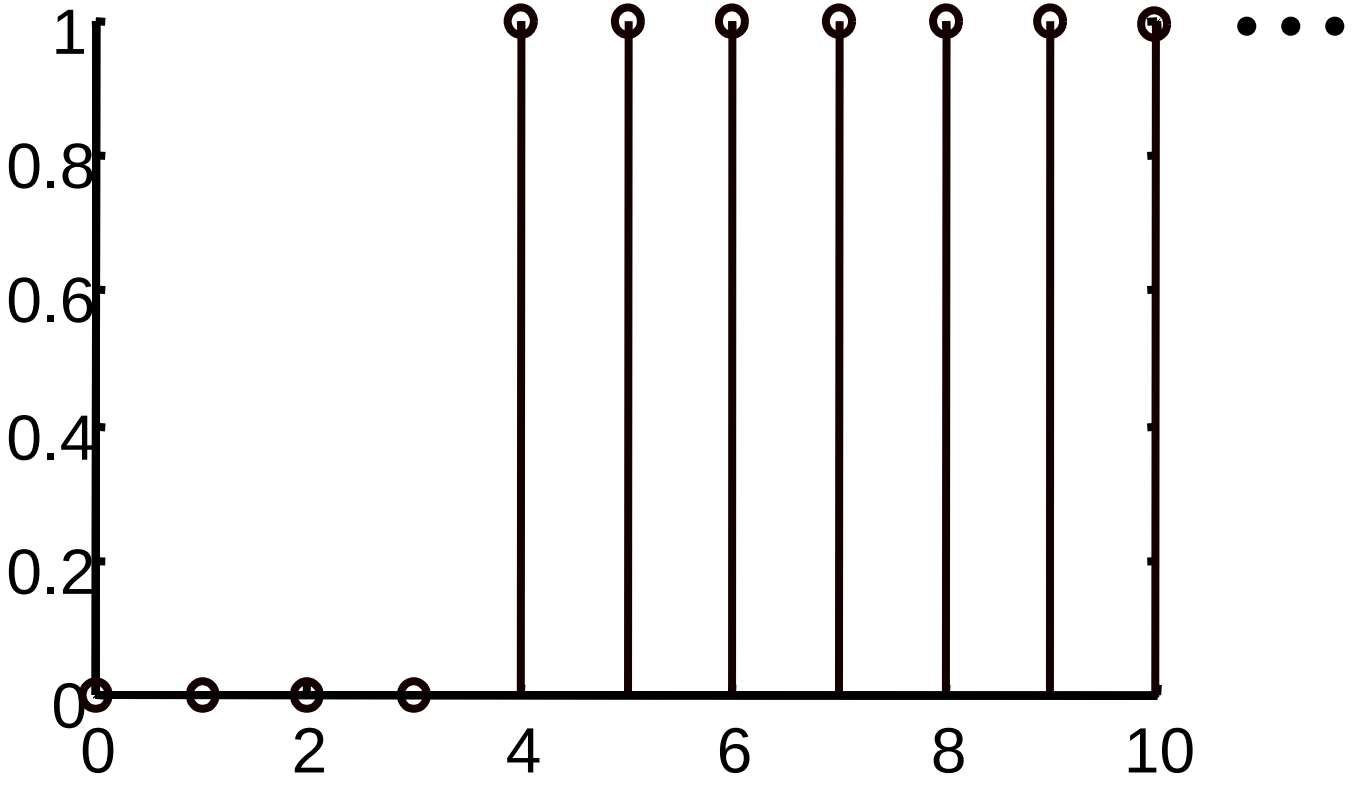


Solution 1

$$s_k = \delta_k + \delta_{k-1}$$

$$S(z) = 1 + z^{-1}$$

Exemple 2



Solution 2

$$s_k = \Gamma_{k-4}$$

$$S(z) = \frac{z^{-4}}{1 - z^{-1}}$$

Transformée en Z inverse

$$Y(z) = \frac{0{,}5z}{z^2 + 6z + 8}$$

Solution 3

$$Y(z) = \frac{0,5z}{z^2 + 6z + 8} = \frac{0,5z}{(z+4)(z+2)} = \frac{Az}{z+4} + \frac{Bz}{z+2}$$

$$Y(z) = \frac{-0,25z}{z+4} + \frac{0,25z}{z+2}$$

$$y_k = -0,25(-4)^k \Gamma_k + 0,25(-2)^k \Gamma_k$$

d'où

Vrai pour k>=0