Traitement du signal :

Etude des systèmes analogiques

(*Transformée de Laplace*)

et des systèmes numériques

(*Transformée en Z*)

Définition

Un **système** est un ensemble fonctionnel, circonscrit dans une enveloppe (boîte noire). Il communique avec l'extérieur à l'aide de signaux.

Les signaux d'entrée permettent de l'exciter, les signaux de sortie d'observer son comportement.

Un four (entrée : débit de gaz, sortie : température) est un système à temps continu analogique.

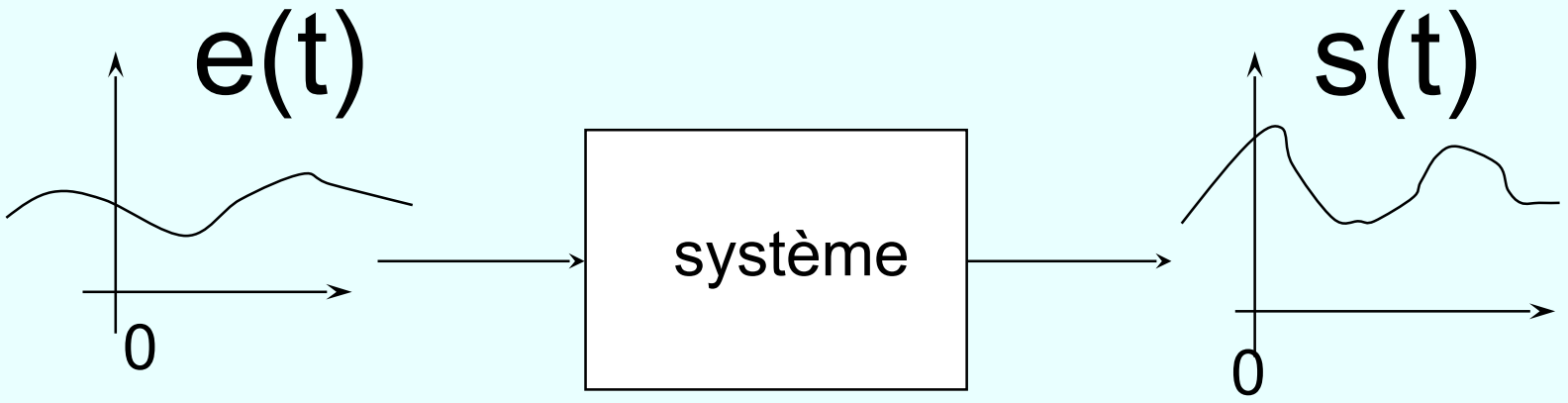
Une loterie (entrée : la mise du joueur en début de partie, sortie : son gain) est un système numérique.

Un voltmètre numérique (entrée : tension à mesurer, sortie : tension affichée) est un système mixte, c'est un système échantillonné.

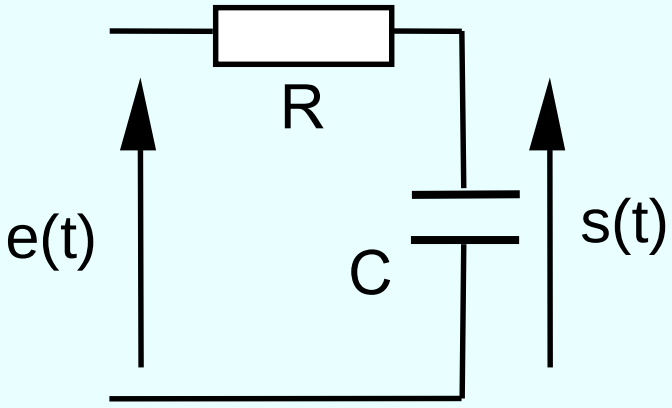
Un système **linéaire** est un système pour lequel les relations entre les grandeurs d'entrée et de sortie peuvent se mettre sous la forme d'**équations différentielles linéaires à coefficients constants.** Si le système n'est pas linéaire, il est souvent possible de le linéariser pour de petites amplitudes autour d'un point de fonctionnement

Chapitre 7 : Etude des systèmes analogiques

Relation entre sortie et entrée



Exemple :



$$RC\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=e(t)$$

Systèmes analogiques

Structure (réalisation) des systèmes analogiques

- A l'aide de composants électroniques passifs (sans alimentation, R, L, C) ou actifs (avec une alimentation externe => amplificateurs opérationnels)

Les systèmes ***analogiques*** traitent des signaux à temps ***continu***

- Représentation avec une équation ***différentielle*** => Calculs effectués grâce à la transformée de ***Laplace***

Transformée de Laplace



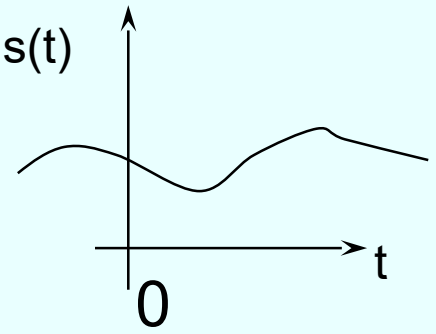
Pierre-Simon LAPLACE

- 23 mars 1749 – 5 mars 1827
- Grand savant français
- Mathématiques, Astronomie, Physique, Philosophie des Sciences
- Transformée de Laplace : méthode permettant de résoudre facilement les équations différentielles ordinaires à coefficients constants

Définition de la Transformée de Laplace

Soit un signal à temps continu causal s(t), sa transformée de Laplace s'écrit :

$$L\left(s(t)\right) = S(p) = \int_{0}^{+\infty} s(t)e^{-pt}dt$$



p est la variable de Laplace (parfois notée s).
p est une variable complexe : $p = \sigma + j\omega; \{\sigma, \omega\} \in \Re^2$

La transformée de Laplace inverse s'écrit :

$$L^{-1}\left(S(p)\right) = s(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} S(p)e^{pt}dp$$

Transformée de Laplace

- La transformée de Laplace définie précédemment prend le nom de transformée de Laplace monolatère. Il existe en effet une transformée de Laplace bilatère définie par :
- Il existe une relation entre la transformée de Laplace bilatère et la transformée de Fourier d'un signal à temps continu

$$L\big(s(t)\big) = S(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-pt}dt$$

$$S(j\omega) = \big[S(p)\big]_{p=j\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt$$

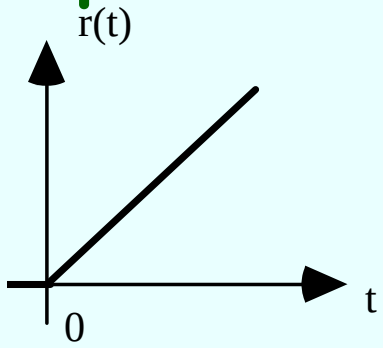
$L\big(s(t)\big) = S(p)$ On appelle S(p) la transformée de Laplace de s(t)

S(p) existe si l'intégrale converge, c'est-à-dire si : $\int_{0}^{+\infty} |s(t)|dt < \infty$

Transformée de Laplace de signaux-tests

- **La rampe unitaire r(t)**

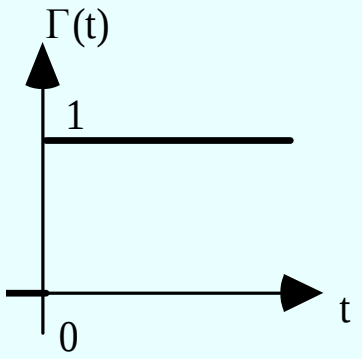
$$r(t)=\begin{cases}0 & \text{pour } t<0\\ t & \text{pour } t\geq 0\end{cases}$$



$$L\left(r(t)\right)=\frac{1}{p^2}$$

- **L'échelon unitaire Γ(t)**

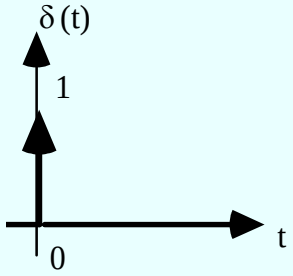
$$\Gamma(t)=\begin{cases}0 & \text{pour } t<0\\ 1 & \text{pour } t\geq 0\end{cases}$$



$$L\left(\Gamma(t)\right)=\frac{1}{p}$$

- **L'impulsion de Dirac δ(t)**

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & \text{pour } t\neq 0\\ 1 & \text{pour } t=0\end{cases}$$



$$L\left(\delta(t)\right)=1$$

- **L'exponentielle décroissante**

$$L\left(e^{-\alpha t}\right)=\frac{1}{p+\alpha}$$

Propriétés de la transformée de Laplace

Linéarité et superposition

$$L\left(a.s(t)\right) = a.X(p)$$

$$L\left(a.s(t) + bv(t)\right) = a.S(p) + b.V(p)$$

Exemple : $L\left(\cos(\omega_0 t)\right)$

$L\left(\sin(\omega_0 t)\right)$

Propriétés de la transformée de Laplace

Intégration par rapport au temps

$$L\left(\int_0^t s(\tau).d\tau\right) = \frac{1}{p}.S(p)$$

Dérivation par rapport au temps

$$L\left(\frac{ds(t)}{dt}\right) = p.S(p) - s(0)$$

$$L\left(\frac{d^n s(t)}{dt^n}\right) = p^n S(p) - p^{n-1}s(0) - p^{n-2}\dot{s}(0) - \ldots - ps^{(n-1)}(0) - s^{(n)}(0)$$

Produit d'un signal par une exponentielle

$$L\left(e^{-at}s(t)\right) = S(p+a)$$

Propriétés de la transformée de Laplace

Théorème du retard

$$L\left(s(t-t_0)\right) = e^{-p.t_0}.S(p)$$

Changement d'échelle

$$L\left(s(a.t)\right) = \frac{1}{a} S\left(\frac{p}{a}\right)$$

Produit par le temps

$$L\left(t.s(t)\right) = -\frac{dS(p)}{dp}$$

Propriétés de la transformée de Laplace

Produit de convolution temporel $x(t) * y(t) = \int_0^{+\infty} x(\tau).y(t-\tau).d\tau$

$$L\left(x(t) * y(t)\right) = X(p).Y(p)$$

Produit simple

$$L\left(x(t).y(t)\right) \neq X(p) * Y(p)!!!$$

Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{t\to 0}\left(s(t)\right) = \lim_{p\to 0}\left(p.S(p)\right) = s(0)$$

Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t\to \infty}\left(s(t)\right) = \lim_{p\to 0}\left(p.S(p)\right)$$

si les limites existent

Inversion de la transformée de Laplace

Le problème consiste, à partir de la transformée de Laplace S(p), de retrouver le signal original s(t)

$$L^{-1}\left(S(p)\right) = s(t)$$

On pourra utiliser la décomposition en éléments simples

Rappels sur la décomposition en éléments simples

Soit $F(p) = \dfrac{\sum_{i=0}^{m} b_i\, p^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i\, p^i}$ avec $n > m$

1er cas : Les n pôles de F(p) sont tous distincts, dans ce cas :

$$F(p) = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \cdots + \frac{A_n}{p - p_n}$$

avec

$$A_i = \left[(p - p_i)\, F(p)\right]_{p=p_i} \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

Inversion de la transformée de Laplace

2ème cas : F(p) possède un pôle multiple p_1 de multiplicité r, dans ce cas :

$$F(p) = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{(p - p_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(p - p_1)^r}$$

avec

$$A_i = \frac{1}{(r-i)!}\left[\frac{d^{r-i}}{dp^{r-i}}\left\{(p - p_1)^r\, F(p)\right\}\right]_{p=p_1} \qquad i = 1,2,\cdots,r$$

Règle de Hazony et Riley

Si n>m+1 alors $\sum_{i=1}^{n} A_i = 0$

Si n=m+1 alors $\sum_{i=1}^{n} A_i = 1$

Relation entre transformée de Laplace et équation différentielle

Soit l'équation différentielle exprimant la relation entre le signal d'entrée e(t) et le signal s(t) d'un système :

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + \ldots + a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = b_0 e(t) + b_1 \frac{de(t)}{dt} + \ldots + b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m}$$

En appliquant la transformée de Laplace aux 2 membres de l'équation en utilisant :

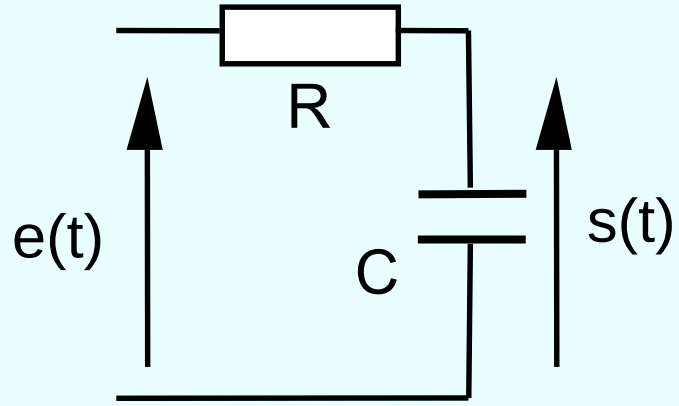
$$L\left(\frac{d^i x(t)}{dt^i}\right) = p^i . X(p)$$ en supposant les CI nulles

$$\left(a_0 + a_1 p + \ldots + a_n p^n\right) S(p) = \left(b_0 + b_1 p + \ldots + b_m p^m\right) E(p)$$

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \ldots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_n p^n} = \frac{\sum_{j=0}^{n} b_j p^j}{\sum_{i=0}^{m} a_i p^i}$$

Relation entre transformée de Laplace et équation différentielle – Fonction de transfert (exemple)

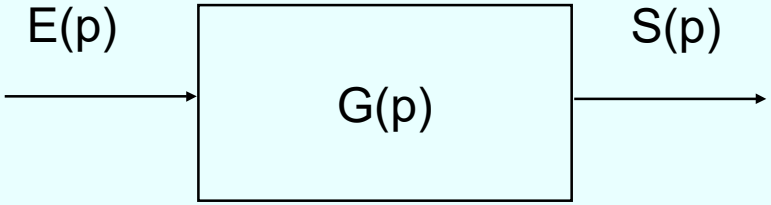
Déterminer la fonction de transfert associée à un circuit RC



$$s(t) = g(t) * e(t)$$ avec g(t)

réponse impulsionnelle

$$RC\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$$



$$S(p) = G(p).E(p)$$

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + RCp}$$

Analyse de la stabilité

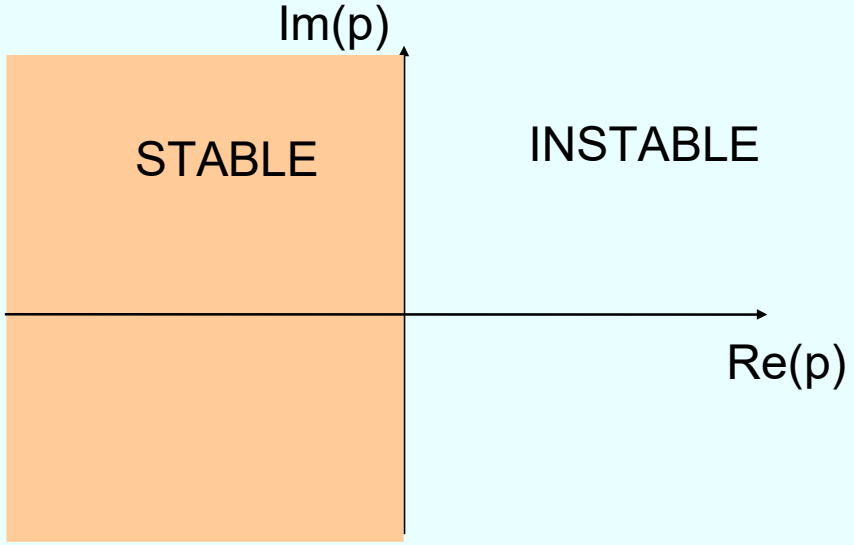
Soit un système à temps continu décrit par :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \ldots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_n p^n} = \frac{\sum_{j=0}^{n} b_j p^j}{\sum_{i=0}^{m} a_i p^i}$$

Le système est stable si tous les pôles p_i : racine du dénominateur de G(p)

sont à partie réelle négative

$$\mathrm{Re}(p_i) < 0$$



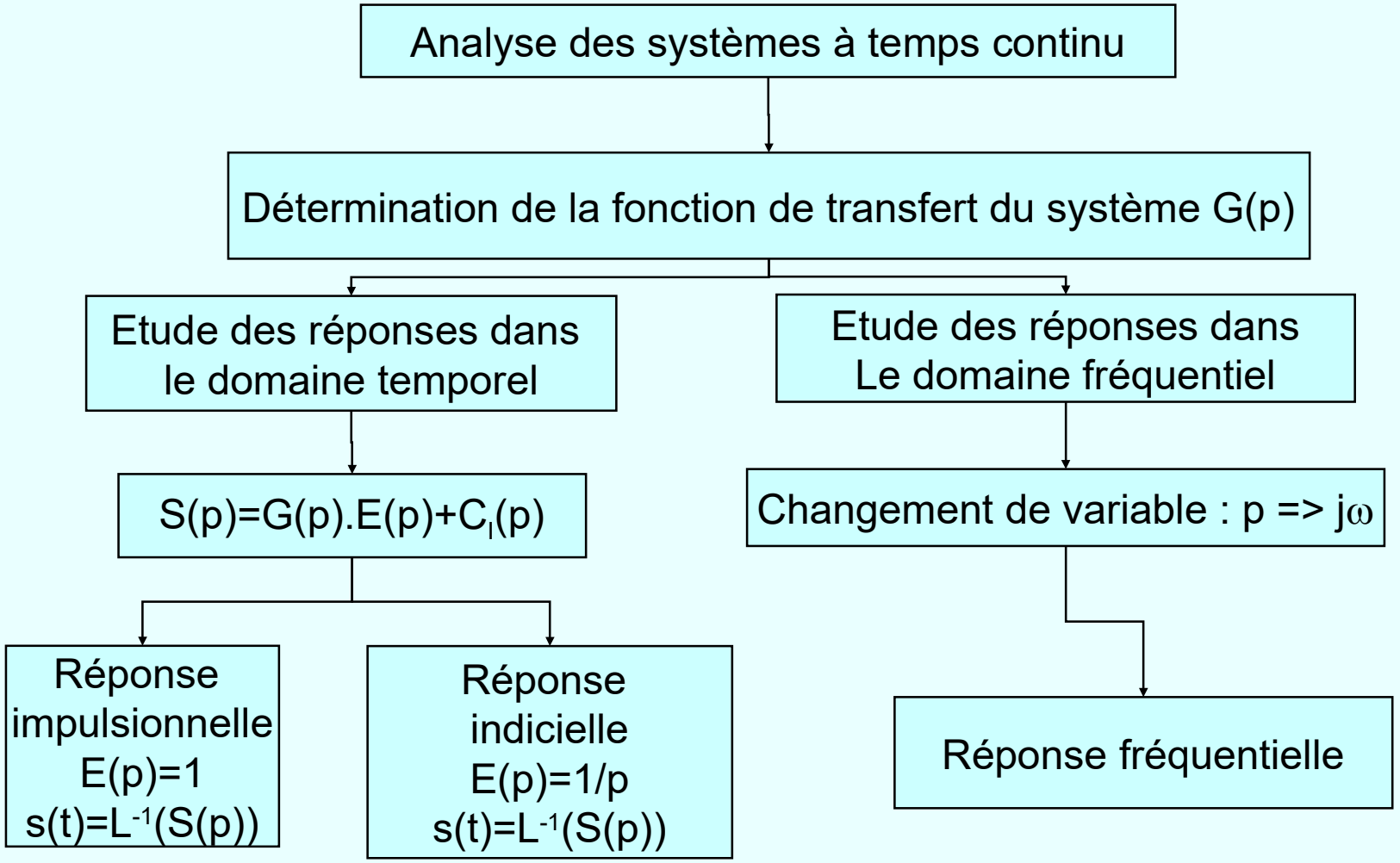
Exemples :

$$X_1(p) = \frac{p^2}{p^2 + p - 2} = \frac{p^2}{(p-1)(p+2)}$$

$$X_2(p) = \frac{10p - 1}{p^2 + 2p + 1} = \frac{10p - 1}{(p+1)^2}$$

Intérêt de la transformée de Laplace

Outil mathématique facilitant l'analyse des systèmes à temps continu



Résolution d'équations différentielles linéaires à coefficients constants par la transformée de Laplace

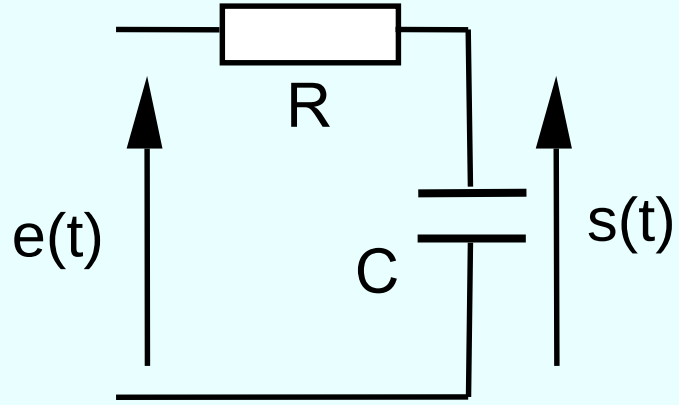
- Dans le cas où l'ordre de l'équation différentielle est supérieur à 2, la résolution d'équations différentielles devient compliquée. Il est préférable dans ce cas d'utiliser une procédure utilisant la transformée de Laplace.
- La procédure de résolution est alors la suivante :

1. Appliquer la transformée de Laplace aux 2 membres de l'équation différentielle en x(t)

2. Calculer X(p) en utilisant la table de transformée et les propriétés de la transformée de Laplace

3. Décomposer X(p) en éléments simples puis utiliser la table de transformée pour obtenir x(t) par transformée inverse

Analyse dans le domaine temporel : détermination de la réponse indicielle d'un circuit RC



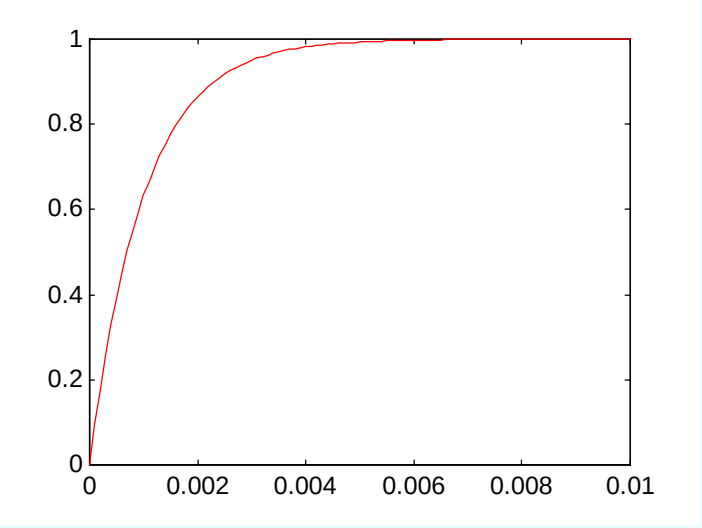
$$RC\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=e(t)$$

$$e(t)=\Gamma(t)\ \ et\ \ e(0)=0$$

$$S(p)=G(p).E(p)\ \ avec\ \ G(p)=\frac{1}{p}$$

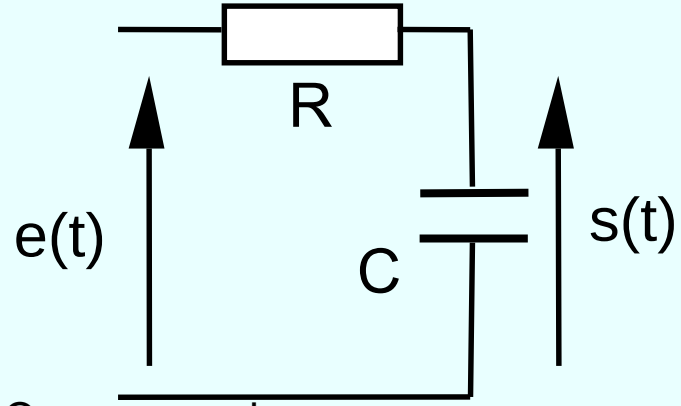
$$G(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{1}{1+RCp}$$

$$s(t)=\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$



Analyse dans le domaine fréquentiel : détermination de la réponse fréquentielle d'un circuit RC

$$RC\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=e(t)$$



$$G(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{1}{1+RCp}$$

On pose p = jω $\quad G(j\omega)=\left|G(j\omega)\right|e^{j.Arg\left(G(j\omega)\right)}$

$$G(j\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \quad \text{avec} \quad \omega_c=\frac{1}{RC}$$

$$Arg\left(G(j\omega)\right)=-Arc\tan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \; si \; \mathrm{Re}\left(G(j\omega)\right)>0$$

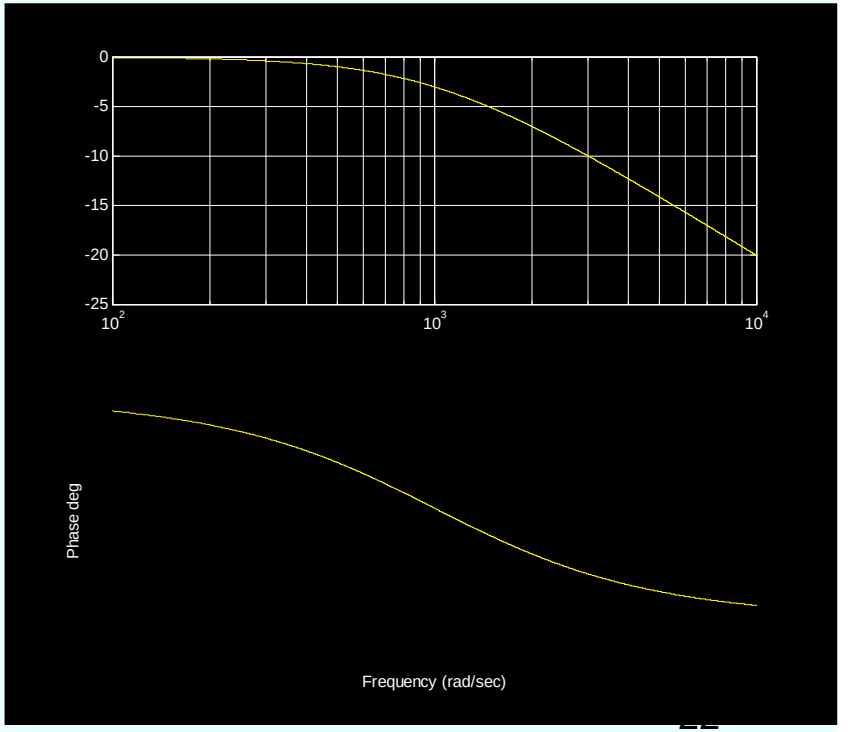


Table de transformée

2. Propriétés et tables de transformée de Laplace

2.1 Principaux théorèmes de la transformée de Laplace

Propriétés ou théorèmes	domaine temporel	domaine de Laplace p (ou s)
Linéarité	$f_1(t) + f_2(t)$ $Af(t)$	$F_1(p) + F_2(p)$ $A\ F(p)$
Dérivée 1ère par rapport au temps	$\frac{df(t)}{dt}$	$pF(p) - f(0)$
Dérivée 2nde par rapport au temps	$\frac{d^2f(t)}{dt^2}$	$p^2F(p) - pf(0) - \dot{f}(0)$
Dérivée nième par rapport au temps	$\frac{d^nf(t)}{dt^n}$	$p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - \ldots - f^{(n-1)}($
Théorème de l'intégration	$\int_0^t f(x)dx$	$\frac{F(p)}{p}$
Théorème du retard	$f(t-t_0)$	$e^{-t_0p}F(p)$
Produit par une exponentielle	$e^{-\alpha t}f(t)$	$F(p+\alpha)$
Produit par le temps	$t\,f(t)$	$-\frac{dF(p)}{dp}$
Produit par t^n	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^nF(p)}{dp^n}$
Produit par l'inverse du temps	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^{+\infty} F(x)dx$

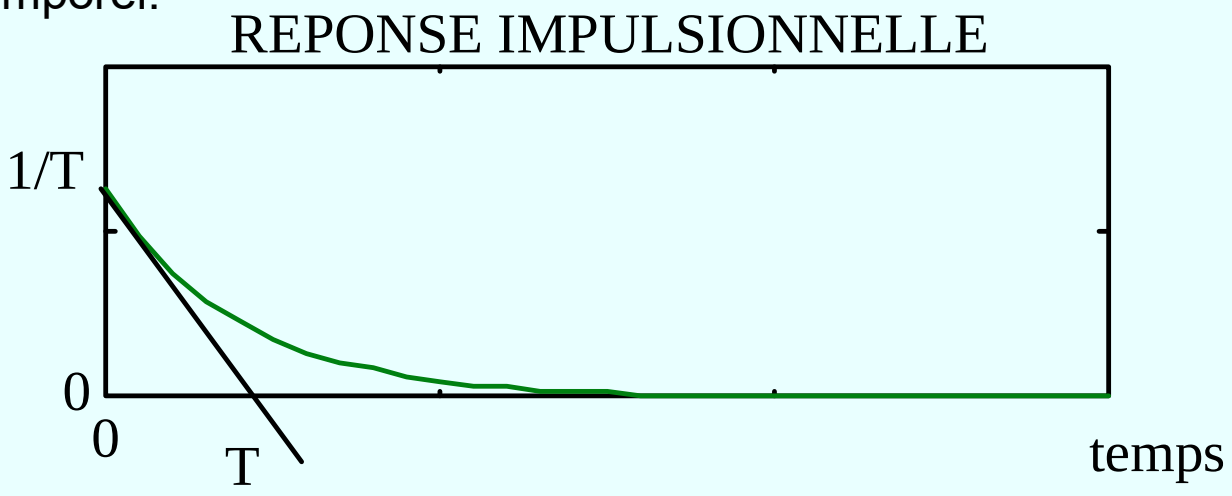
cf.pages 3 et 4

Etude de la réponse impulsionnelle

Le signal d'entrée est x(t) = d(t), dans le domaine symbolique X(p) = 1.

La sortie Y(p) = H(p).X(p) = X(p)

En décomposant en éléments simples et en utilisant les transformées inverses de Laplace, on pourra exprimer la réponse impulsionnelle dans le domaine temporel.



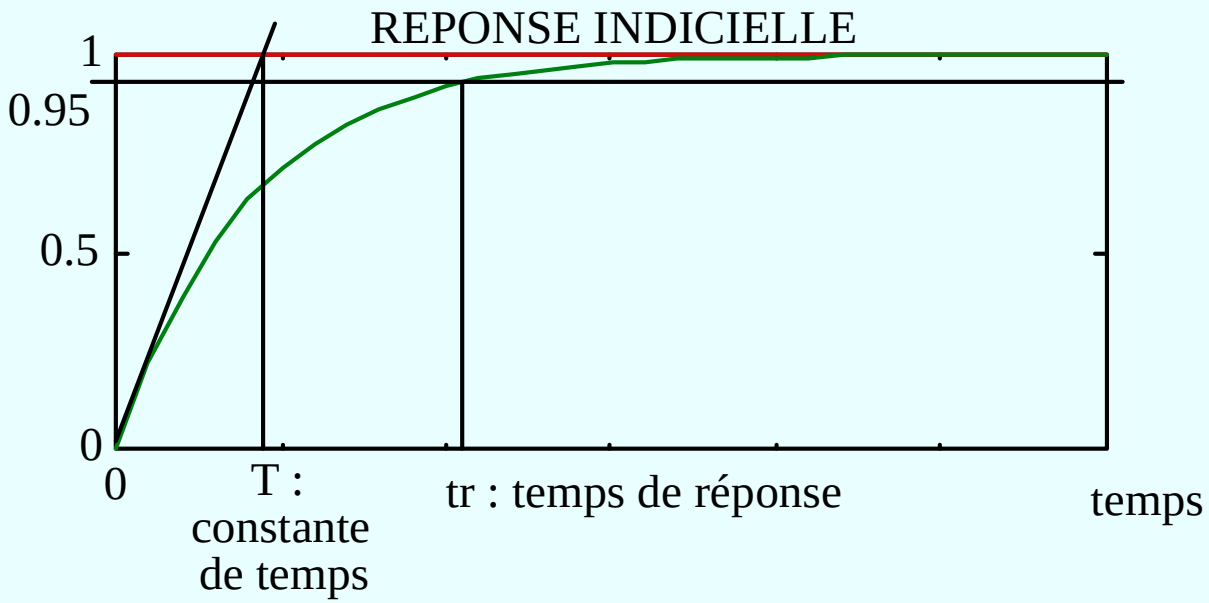
T : constante de temps

Etude de la réponse indicielle

Le signal d'entrée est x(t) = G(t), dans le domaine symbolique X(p) = 1/p.

La sortie $Y(p) = H(p).X(p) = \frac{X(p)}{p}$

En décomposant en éléments simples et en utilisant les transformées inverses de Laplace, on pourra exprimer la réponse indicielle dans le domaine temporel.



Etude de la réponse fréquentielle

Pour cela, on prend la fonction de transfert en Laplace en faisant le changement de variable p = jω, d'où . Le diagramme de Bode se représente sur une échelle semi-logarithmique avec ω en abscisse (sur l'échelle logarithmique) et

$$G = 20.\log(|H(j\omega)|) = 20.\log\frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$$

en ordonnée, mesuré en dB (sur l'échelle linéaire).

Etude asymptotique

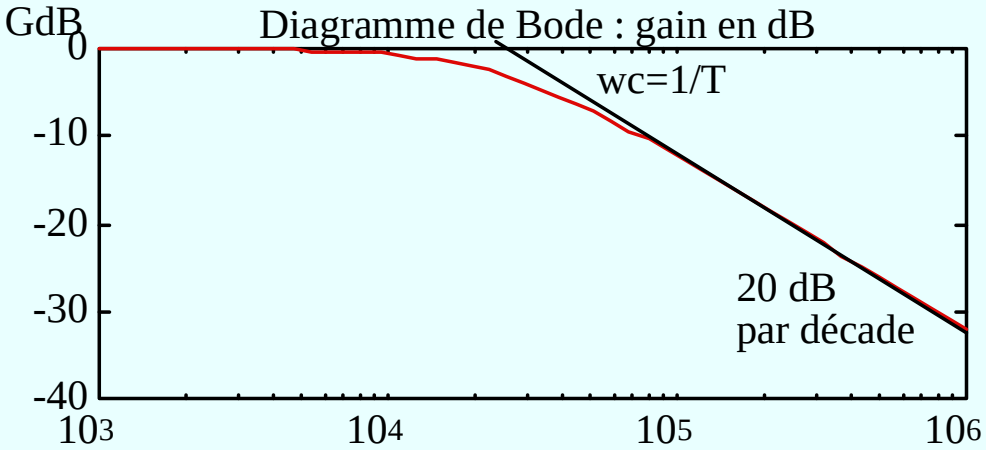
quand ω tend vers +∝, H tend vers 0 donc G tend vers - ∝. On remarque que si ω tend vers + ∝, G $= 20.\log\frac{1}{T.\omega} = -20.\log T - 20.\log\omega$ qui est l'équation d'une droite en logω de coefficient directeur -20 et passant par le point ω = 1/T. Cette droite est asymptote à la courbe réelle.

Pour $\omega_2 = 10.\omega_1$, ce qui représente une décade, on a :

G2 - G1 = $-20.\log\omega_2 + 20.\log\omega_1 = 20.(-\log(10.\omega_1) + \log\omega_1)$ = 20.log= -20 log10 = -20dB. On dit que cette droite est une droite de coefficient -20 dB/décade. Une pente de 20 ou -20 dB par décade caractérise un premier ordre. La valeur ω_c = 1/T s'appelle la pulsation de coupure. C'est la valeur pour laquelle l'atténuation est de -3 dB autrement dit la valeur pour laquelle l'amplitude du signal est divisée par car 20.log() = -3 dB.

Etude asymptotique

quand ω tend vers 0, H tend vers 1 donc G tend vers 0. On a donc une asymptote horizontale.



<u>Etude de la phase</u> :

$$\varphi = \arg(H(j\omega)) = \arg(1) - \arg(1 + jT\omega)$$

$$Arctg(0) - Arctg(T\omega) = 0 - Arctg(T\omega)$$

$quand\ \omega = 0$	$quand\ \omega = 1/T$
$\varphi = 0$	$\varphi = 0 - Arctg(1) = 0 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$

$$quand\ \omega \to +\infty$$

$$\varphi = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

