Université Henri Poincaré - Nancy 1
IUT de Nancy-Brabois
Département GENIE des TELECOMMUNICATIONS et RESEAUX

NANCY GTR

1ère Année

TRAITEMENT du SIGNAL

Programme pour 1999-2000

Intervenants : Jean-Marc THIRIET, Hugues GARNIER

Plan indicatif du cours

CHAPITRE 1 : OBJECTIFS ET BESOINS MATHÉMATIQUES 1
1. Objectifs du cours de traitement du signal 1
2. Notions de mathématiques à revoir (ou à voir) 2
2.1. Intégration par parties 2
2.2. Suites, séries 3
2.3. Maniement des nombres complexes (module, argument, partie réelle, partie imaginaire). 3
2.4. Maniement de la trigonométrie et des exponentielles complexes. 3
2.5. Dérivées et primitives 4
2.6. Sinus cardinal 4
2.7. Utilisation du serveur web "Traitement du signal" 4

CHAPITRE 2 : LES SIGNAUX ANALOGIQUES (OU CONTINUS) 1
1. Introduction 1
2. Les signaux classiques 1
2.1. Le signal harmonique ou sinusoïdal 1
2.2. La rampe unitaire r(t), causale 1
2.3. L'échelon unitaire de Heaviside $\Gamma(t)$ ou fonction existence 1
2.4. L'impulsion unitaire de Dirac $\delta(t)$ 2
2.5. Le signal causal retardé 2

CHAPITRE 3 : SPECTRES DE SIGNAUX ANALOGIQUES 1
1. Cas des signaux périodiques 1
1.1. Théorème fondamental 1
1.2. Calcul des coefficients a_n et b_n pour la forme trigonométrique (FORME 1 et, par déduction, 2) 2
1.3. Calcul des c_n pour les formes exponentielles complexes (FORME 3) 3
1.4. Propriétés 3
1.5. Reconstruction de signaux usuels 3
1.6. Récapitulatif des formules à retenir pour la calcul de spectres de signaux analogiques périodiques (utilisation des développements en série de Fourier) 6
1.7. Utilisation du serveur web 6
2. Cas des signaux non périodiques 7
2.1. Définition 7
2.2. Exemple 1 : spectre d'un signal rectangulaire 7
2.3. Exemple 2 : spectre de l'impulsion de Dirac $\delta(t)$ 8
2.4. Propriétés de la transformée de Fourier 8
2.5. Propriétés 9
2.6. Utilisation du serveur web 10
3. Convolution 11
3.1. Convolution d'un signal quelconque s(t) par l'impulsion de Dirac $\delta(t)$ 11
3.2. Convolution d'un signal quelconque s(t) par l'impulsion de Dirac décalée $\delta(t-t_0)$ 11

CHAPITRE 4 : LES SIGNAUX DISCRETS (OU NUMÉRIQUES) 1
1. Introduction 1
2. Le signal échantillonné 1
2.1. La rampe discrète unitaire $\{r(kT_e)\}=\{r_k\}$ 2
L'échelon unitaire discret de Heaviside $\{\Gamma_k\}$ ou fonction existence 2
L'impulsion de Dirac discrète $\{\delta_k\}$ 2
2.4. L'impulsion de Dirac discrète décalée $\delta\{k-k_0\}$ 3
2.5. Le peigne de Dirac unitaire centré |_|_| (tcha) 3
2.6. Le signal harmonique ou sinusoïdal discret 4
3. Problèmes d'échantillonnage 4
3.1. Domaine temporel 4
3.2. Domaine fréquentiel 4
3.3. Théorème d'échantillonnage 5
3.4. La restitution du signal analogique 6
3.5. Chaîne d'acquisition 7
3.6. Utilisation du serveur web 7

CHAPITRE 5 : SPECTRES DE SIGNAUX DISCRETS 1
1. Transformée de Fourier d'un Signal Discret (TFSD) 1
2. Transformée de Fourier inverse d'un signal discret (TFISD) 1
3. Exercice : 2
4. Utilisation du serveur web 2

CHAPITRE 6 : CALCUL DE SPECTRES PAR CALCULATEUR 1
1. Transformée de Fourier Discrète (TFD) 1
2. Transformée de Fourier discrète inverse (TFID) 2
3. Problèmes de fenêtrage (apodisation) 3
4. Utilisation du serveur web 4

Chapitre 1 : Objectifs et besoins mathématiques

1. Objectifs du cours de traitement du signal

Le cours de traitement du signal a pour objet :

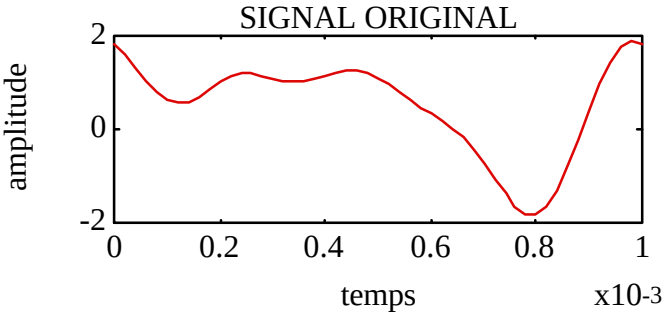
- Le traitement volontaire des signaux afin de leur donner des caractéristiques intéressantes. Il s'agira essentiellement d'adapter le signal à son canal de transmission (câble coaxial ou paires, fibre optique, liaison hertzienne),
- L'analyse des signaux afin de quantifier dans quelle mesure ceux-ci ont pu être dégradés, notamment suite à une transmission.

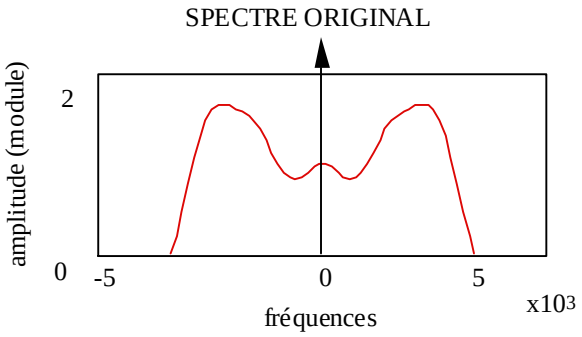
Pour traiter et analyser les signaux, il est habituel d'étudier conjointement ce qui se passe dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel. L'utilisation du domaine temporel semble assez naturelle et permet de mettre en évidence certaines caractéristiques du signal :

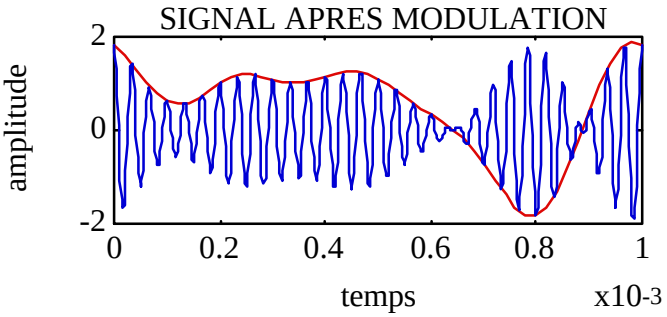
- signal périodique (durée de la période, fréquence) ou non périodique,
- valeur de l'amplitude (amplitude moyenne, amplitude maximale…),
- signal analogique ou discret.

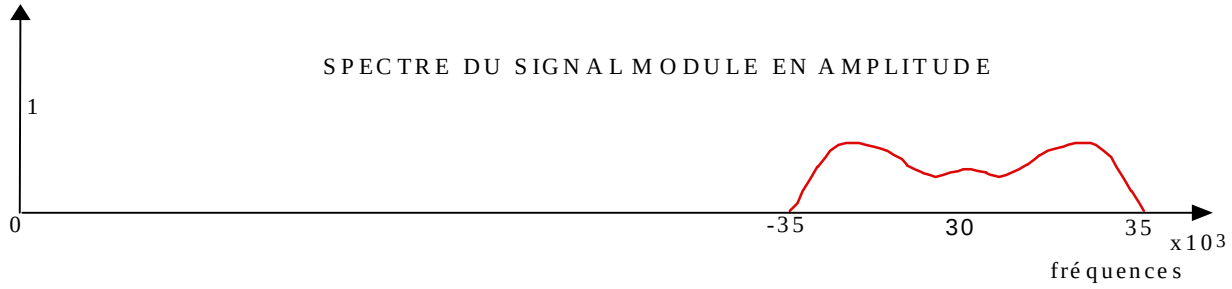
Le spectre du signal, c'est-à-dire sa représentation fréquentielle, a pour objet de faire apparaître les plages de fréquences utilisées par le signal, ceci notamment afin de rendre compatibles le signal et son canal de transmission.

Exemple de la modulation d'amplitude qui permet de transmettre un signal (voix, musique) par voie hertzienne, dans le cas d'une station de radio.









Sur les dessins ci-dessus, nous constatons :

- dans le domaine temporel, l'opération de modulation d'amplitude revient à effectuer le produit entre le signal original et une "porteuse" (sinusoïde de fréquence très élevée). Le signal obtenu est la sinusoïde "modulée en amplitude" par le signal original.
- dans le domaine fréquentiel, l'opération de modulation d'amplitude revient à "translater" le spectre autour de la fréquence de la porteuse f_p.

Le dessin obtenu dans le domaine fréquentiel est très aisé à interpréter et à construire graphiquement, c'est la raison pour laquelle nous travaillerons dans la suite avec ces spectres.

Le plan du cours est le suivant :

- Etude des signaux analogiques dans le domaine temporel,
- Calcul de spectres de signaux analogiques à l'aide du développement en série de Fourier dans le cas des signaux périodiques et de la transformée de Fourier d'un signal analogique (TFSA) dans le cas des signaux non périodiques,
- Etude des signaux discrets et des problèmes d'échantillonnage,
- Calcul de spectres de signaux discrets à l'aide de la transformée de Fourier d'un signal discret (TFSD),
- Calcul et représentation de spectres par calculateur à l'aide de la transformée de Fourier discrète (TFD) ou rapide (TFR, ou FFT en Anglais).

2. Notions de mathématiques à revoir (ou à voir)

De manière à ne pas perdre trop de temps avec des notions qui doivent être connues, vous trouverez ci-dessous les pré-requis mathématiques indispensables pour pouvoir suivre le module TdS de 1ère Année. N'hésitez pas à travailler ceux qui peuvent vous poser problème.

2.1. Intégration par parties

But : Cette technique permet entre autres de calculer des intégrales de type $\int_a^b (a + bt + gt^2 + ...)\sin(wt + j)dt$

ou des intégrales de type : $\int_a^b (a + bt + gt^2 + ...)e^{-j(wt+j)}dt$

c'est-à-dire des intégrales de produit entre un polynôme et une fonction de type exponentielle ou trigonométrique. De fait, cet outil sera notamment très utile pour le calcul de spectre de signaux triangulaires.

Démonstration : Si *f* et *g* sont dérivables sur [a,b] :

$$(f.g)' = f'.g + f.g'$$

d'où : $\int_a^b [f(t).g(t)]'.dt = \int_a^b f'(t).g(t).dt + \int_a^b f(t).g'(t).dt$,

c'est-à-dire : $\boxed{\int_a^b f(t).g'(t).dt = [f(t).g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t).g(t).dt}$

Utilisation :

- on pose f(t)=la fonction polynomiale et g'(t) la fonction exponentielle ou trigonométrique
- on calcule ensuite f'(t) et g(t);
- on détermine enfin $\int_a^b f(t).g'(t).dt$

Exemple 1 : soit à calculer $I_1 = \int_0^p t.\sin t.dt$, on pose : $\begin{cases} f(t) = t, g'(t) = \sin t \\ f'(t) = 1, g(t) = -\cos t \end{cases}$

d'où $I_1 = [t.(-\cos t)]_0^p - \int_0^p 1.(-\cos t).dt = p + [\sin t]_0^p = p$.

Exemple 2 : soit à calculer $I_2 = \int_{-p}^0 3t.e^{-jt}.dt$, on pose : $\begin{cases} f(t) = 3t, g'(t) = e^{-jt} \\ f'(t) = 3, g(t) = \dfrac{e^{-jt}}{-j} = je^{-jt} \end{cases}$

d'où $I_2 = \left[3t.(je^{-jt})\right]_{-p}^{0} - \int_{-p}^{0} 3.(je^{-jt}).dt = 3jpe^{jp} + 3j\left[\frac{e^{-jt}}{-j}\right]_{-p}^{0} = -3jp - 3(1-(-1)) = -3jp + 6$.

2.2. Suites, séries

L'outil mathématique utilisé est $\sum$, cet outil permet d'écrire des sommes de manière condensée.

Exemple 1 : $\sum_{k=0}^{10} k = 0+1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$

Exemple 2 : $\sum_{k=-2}^{3} 5^k = 5^{-2}+5^{-1}+5^0+5^1+5^2+5^3$

Un résultat intéressant est la **somme de la série géométrique** :

$$\sum_{k=0}^{N} a^k = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$$ où a est appelée la raison de la série géométrique

2.3. Maniement des nombres complexes (module, argument, partie réelle, partie imaginaire).

Un nombre complexe c s'exprime par c=a+jb, avec (a,b) $\in \Re^2$, a est la partie réelle et b la partie imaginaire.

Le module d'un nombre complexe s'écrit $r = \sqrt{a^2+b^2}$

L'argument du nombre complexe c s'écrit :

- $\arg(c) = j = Arctg\left(\frac{b}{a}\right)$ si c est à partie réelle positive (a > 0)
- $\arg(c) = j = Arctg\left(\frac{b}{a}\right) \pm p$ si c est à partie réelle négative (a < 0)

Il est également possible d'écrire c sous la forme : $c = r.e^{jj}$.

Exemple : c = -1 - j, $r = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$, $\arg(c) = j = Arctg\left(\frac{-1}{-1}\right) \pm p = \frac{-3p}{4}$, on peut écrire $c = \sqrt{2}.e^{-j3p/4}$.

2.4. Maniement de la trigonométrie et des exponentielles complexes.

cos(a+b) = cosa.cosb - sina.sinb, cos(a-b) = cosa.cosb + sina.sinb,

$$tg(a+b) = \frac{tga+tgb}{1-tga.tgb}, a, b, a+b \neq \frac{p}{2} (\mathrm{mod}\, p)$$

sin(a+b) = sina.cosb + sinb.cosa, sin(a-b) = sina.cosb - cosa.sinb,

$$tg(a-b) = \frac{tga-tgb}{1+tga.tgb}, a, b, a-b \neq \frac{p}{2} (\mathrm{mod}\, p)$$

cosa.cosb = $\frac{1}{2}$ [cos(a+b) + cos(a-b)], sina.sinb = $\frac{1}{2}$ [cos(a-b) - cos(a+b)], sina.cosb = $\frac{1}{2}$ [sin(a+b) + sin(a-b)]

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}, \quad \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2},$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}, \quad \sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$, sin2a = 2sina.cosa, $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$, $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$

Pour tout entier rationnel n,

$$(\cos a + j\sin a)^n = \cos na + j\sin na, (\cos a - j\sin a)^n = \cos na - j\sin na$$

Formules d'Euler : $\cos t = \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}$; $\sin t = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}$; $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = j\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{e^{jt} + e^{-jt}}$;

$$e^{j.t} = \cos t + j.\sin t$$

Autres formes des formules d'Euler : $2.\cos t = \left(1 + e^{-2.j.t}\right)e^{j.t}$; $2.j.\sin t = \left(1 - e^{-2.j.t}\right)e^{j.t}$

2.5. Dérivées et primitives

primitives	fonctions	dérivées
$\frac{1}{a}.\sin(a.t+b)$	$\cos(a.t+b)$	$-a.\sin(a.t+b)$
$-\frac{1}{a}.\cos(a.t+b)$	$\sin(a.t+b)$	$a.\cos(a.t+b)$
$\frac{1}{a}e^{a.t+b}$	$e^{a.x+b}$	$a.e^{a.t+b}$

2.6. Sinus cardinal $\sin c(t) = \frac{\sin(t)}{t}$

Ce signal, très utile en télécommunications, ne pose pas de problème particulier concernant son étude ; le seul point problématique est 0 qui se résoud de la manière suivante :

$$\sin c(0) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

Une autre définition de sinus cardinal que l'on trouve quelquefois dans la littérature et notamment dans Matlab est la suivante : $\sin c(t) = \frac{\sin(pt)}{pt}$

2.7. Utilisation du serveur web "Traitement du signal"

Ce serveur est disponible à l'adresse suivante : http://lara0.esstin.u-nancy.fr/ineit-tn

pour l'adresse principale à partir de laquelle vous avez accès à différentes parties qui peuvent vous intéresser (notamment la partie "computer").

La partie sur le traitement du signal se trouve à l'adresse suivante :

http://lara0.esstin.u-nancy.fr/ineit-tn/sensor/chapter3-sampling-quantization/francais/home-fourier-fra.html pour la partie française.

Dans différentes partie du poly, il vous est proposé de vous connecter sur ce serveur mis en place dans le cadre d'un projet européen, dont certaines parties ont été développées ou écrites par des étudiants dans le cadre de projets tutorés. Ce serveur contient des morceaux de cours, dans certains cas complémentaires du poly, ainsi que des simulations (sous forme d'applets java) permettant d'aider à la compréhension de certains phénomènes de traitement du signal.

Chapitre 2 : Les signaux analogiques (ou continus)

1. Introduction

Une grandeur physique, traduite par un capteur sous la forme d'un signal électrique, dépend continûment du temps.

Le signal sera alors une fonction **continue** du temps : s : t => s(t)

t est une variable **continue** réelle représentant le temps. s(t) est un nombre réel (parfois complexe, $s^*(t)$ représente alors le conjugué).

s(t), porteur d'**information**, est aussi porteur **d'énergie** ; la puissance est proportionnelle à $s^2(t) = [s(t)\, s^*(t)]$ et l'énergie sur un intervalle $[t_1, t_2]$ sera proportionnelle à $\int_{t1}^{t2} s^2(t)dt$.

En général, on considérera que les signaux sont générés à partir d'un certain moment pris comme origine des temps. On supposera par conséquent que ces signaux n'existent pas pour $t < 0$, c'est-à-dire qu'ils sont nuls pour $t < 0$. Ces signaux sont dits causaux (ou causals).

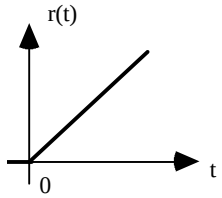
2. Les signaux classiques

2.1. Le signal harmonique ou sinusoïdal

Le signal sinusoïdal, très employé, est le signal périodique par excellence. C'est une sinusoïde éternelle (non causale). On peut donc exciter un système par un signal-test sinusoïdal et explorer sa réponse en faisant varier la fréquence, pour observer par exemple les résonances. On emploie aussi le signal mathématique $e^{j\omega t}$ qui est plus facile à manipuler (Rappel : $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$).

2.2. La rampe unitaire r(t), causale

$$r(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < 0 \\ t \text{ pour } t \geq 0 \end{cases} \text{ (causalité)}$$



En physique, la pente est rarement 1. Elle exprime la vitesse de variation de la grandeur considérée.

$\theta(t) = ar(t)$; a = 0.2 degré par seconde exprime par exemple la croissance linéaire de la température d'un four.

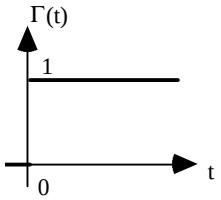
2.3. L'échelon unitaire de Heaviside Γ(t) ou fonction existence

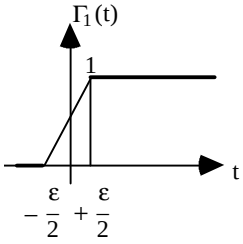
$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < 0 \\ 1 \text{ pour } t \geq 0 \end{cases} \text{ (causalité)}$$

Γ(t) est la dérivée (discontinue à l'origine) de r(t) ; Γ(t) n'est pas définie pour t = 0 ;

$\Gamma(0^+) = 1$ et $\Gamma(0^-) = 0$.

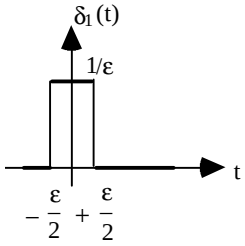
Il est possible de faire l'analogie avec un système électrique. Appliquons une tension continue à un système. La tension est bien connue avant, puis après la fermeture en t = 0 de l'interrupteur. Si son amplitude est E_o la tension sera un échelon non unitaire $E_o\Gamma(t)$. On peut être tenté d'exprimer la durée ε finie de fermeture de l'interrupteur et la continuité de l'évolution de la tension, ici en outre linéarisée, par $\Gamma_1(t)$.

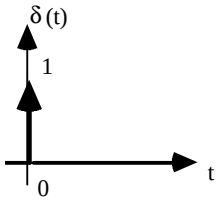




2.4. L'impulsion unitaire de Dirac δ(t)

Dérivons Γ_1, nous obtenons $\delta_1(t)$ qui vaut $1/\varepsilon$ dans l'intervalle $]-\varepsilon/2 , +\varepsilon/2[$.
On observe que son aire est 1 quel que soit ε donc $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt = 1$ $\forall\varepsilon$. Si on fait tendre ε vers 0, δ_1 ne tend pas vers une limite au sens des fonctions, mais au sens des distributions car $\delta_1(t)$ n'est pas dérivable aux deux points de cassure. Cette limite est δ(t), qui est appelée la distribution de Dirac.





L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt = 1$ constitue une sorte de définition de δ(t).

L'impulsion de Dirac δ(t) est dite unitaire car sa mesure, ou son poids, ou son aire vaut 1. En pratique, nous considérerons qu'une impulsion **brève** de forme quelconque peut être approchée, du point de vue de ses effets, par une impulsion de Dirac de mesure A, A étant l'aire de l'impulsion brève.

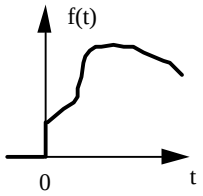
Propriétés de l'impulsion de Dirac : 1) $\int_{-\infty}^{+\infty}s(t)\delta(t-t_1)dt = s(t_1)$; $\int_{-\infty}^{+\infty}s(t)\delta(t)dt = s(0)$

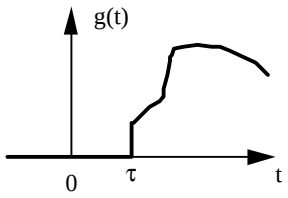
2) $s(t)\delta(t-a) = s(a)\delta(t-a)$

3) Changement de variable : $\delta(at) = |a|^{-1}\delta(t)$

Cas particulier : $\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi}\delta(f)$

2.5. Le signal causal retardé





g(t) = f(t - τ) ; g(t) est nul pour t < τ.

La somme de signaux causaux et de signaux retardés permet de créer des signaux de formes quelconques. Ainsi 3Γ(t) - 3Γ(t - T_o) est un créneau causal de hauteur 3 et de durée T_o.

Chapitre 3 : Spectres de signaux analogiques

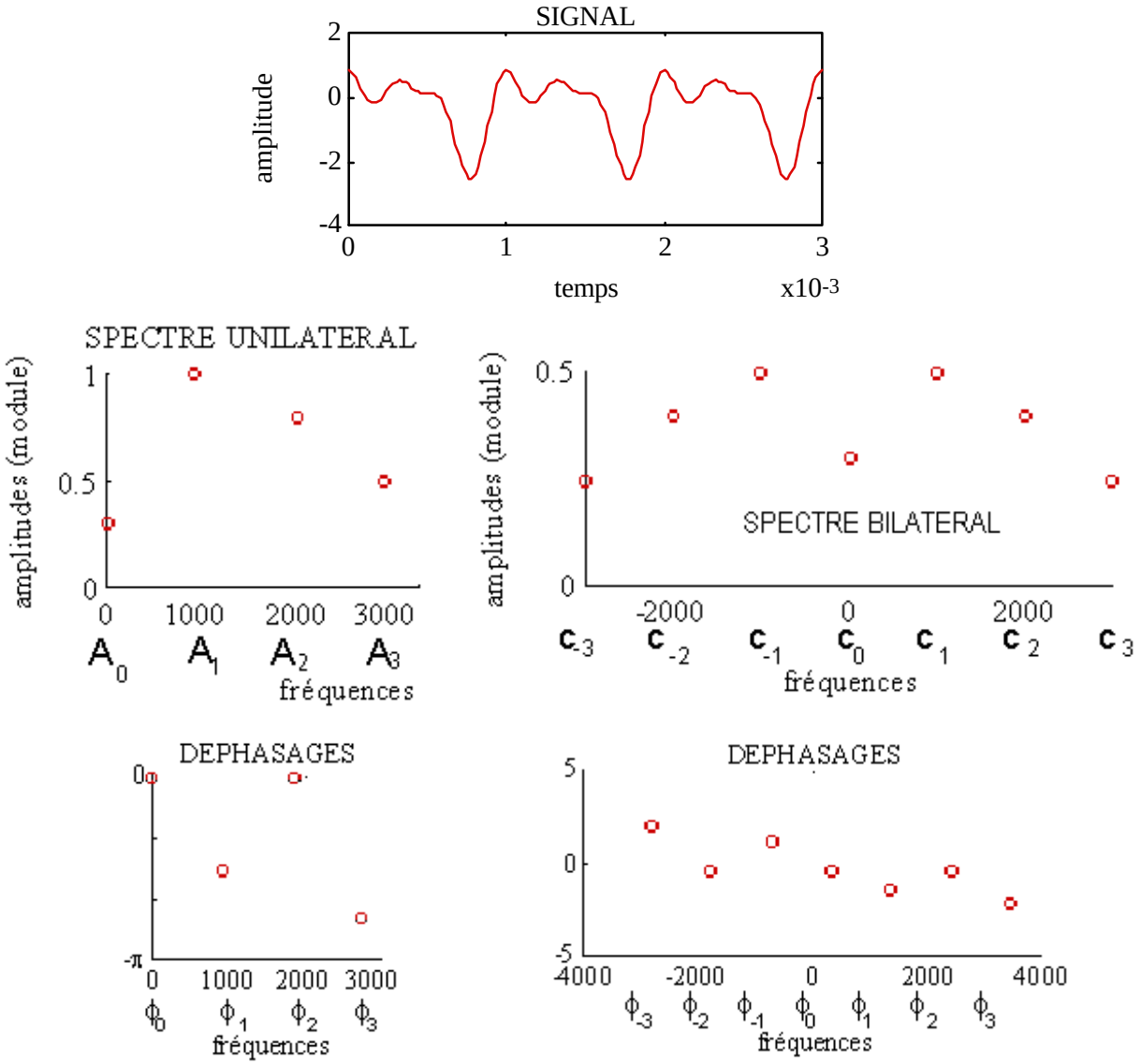
L'objectif est ici d'apprendre à utiliser les outils permettant de calculer le spectre d'un signal analogique. Lorsque nous aurons pris l'habitude de calculer quelques-uns de ces spectres et que nous aurons par conséquent commencé à acquérir une "culture traitement du signal", nous pourrons envisager la construction de spectres graphiquement.
Les outils à mettre en œuvre sont le **développement en série de Fourier** dans le cas des signaux périodiques et la **transformée de Fourier d'un signal analogique (TFSA)** dans le cas des signaux non périodiques.

1. Cas des signaux périodiques

Le baron Fourier a montré à la fin du 18ème siècle (Révolution française) que tout signal périodique pouvait se décomposer en la somme de :

- un signal continu (la moyenne du signal périodique calculée sur une période),
- un signal sinusoïdal de fréquence **fondamentale** f_f (égale à l'inverse de la période du signal),
- des harmoniques de fréquences respectives 2 f_f, 3 f_f, 4 f_f, …, nf_f…

Le spectre obtenu sera donc un spectre "discret" ou spectre de raies qui n'existera que pour des valeurs entières de fois la fréquence fondamentale.
Le signal représenté ci-dessous est le suivant : s(t)=-0.3+sin(ωt)+0.8cos(2ωt)-0.5sin(3ωt-π/4);



1.1. Théorème fondamental

Soit *s(t)* un signal périodique, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ vérifiant les hypothèses suivantes :

- *s* est continu sur tout l'intervalle $[a, a+T]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points en lesquels le signal possède une limite à droite et une limite à gauche (notées s(t+0) et s(t-0)),
- *s* est dérivable sur $[a, a+T]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points en lesquels le signal possède une limite à droite et une limite à gauche.

Alors, pour tout $t \in \Re$:

$$\frac{1}{2}[s(t+0)+s(t-0)] = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right)$$

En particulier, en tout point où *s* est continu :

FORME 1

$$s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_n \cos(nwt) + b_n \sin(nwt)\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos(nwt) + b_n \sin(nwt)\right)$$

De cette forme, on peut également déduire les formes suivantes :

FORME 2

$$s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(A_n \cos(nwt - j_n)\right) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(A_n \cos(nwt - j_n)\right)$$

FORME 3

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jnwt})$$

On dit que *s* est développable en série de Fourier ; $a_0, a_n, b_n, A_n, j_n et c_n$ sont les coefficients de Fourier de *s(t)*.

A l'aide de ces définitions, il sera possible de **reconstruire le signal s(t) à partir de sa décomposition en série de Fourier, donc de passer d'une représentation fréquentielle (spectre de raies) à une représentation temporelle (signal lui-même)** :

1.2. Calcul des coefficients a_n et b_n pour la forme trigonométrique (FORME 1 et, par déduction, 2)

L'objectif est ici d'obtenir les coefficients du développement en série de Fourier (donc du spectre) en fonction de l'expression mathématique du signal

***a_0**

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} s(t)dt$$

****** a_n

$$a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} s(t)\cos(nwt)dt$$

*** b_n

$$b_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin(nwt)dt$$

1.3. Calcul des c_n pour les formes exponentielles complexes (FORME 3)

$$c_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} s(t)e^{-jnwt}dt$$

On pourra retrouver l'expression de c_n en faisant le même type de calcul que pour a_n.

Cette formule, ainsi que les formules de calcul des a_n et b_n ci-dessus, **permettent, à partir de l'expression mathématique d'un signal s(t) de calculer** les coefficients de son développement en série de Fourier, autrement dit **son spectre**.

1.4. Propriétés

a. Les coefficients de Fourier tendent vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

b. Les coefficients de Fourier sont indépendants de l'intervalle $[a, a+T]$.

c. Le spectre d'amplitude est invariant par changement d'origine.

d. Si le signal est pair alors les coefficients sont $b_n = 0$ et

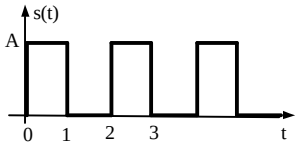
$$s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos nwt = 2\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos(nwt).$$

e. Si le signal est impair alors les coefficients sont $a_n = 0$ et

$$s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin nwt = -2\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \sin nwt.$$

1.5. Reconstruction de signaux usuels

Exemple 1 : Reconstruction du signal en créneau

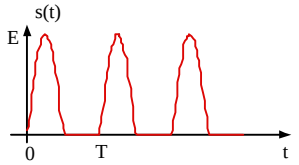


Montrer que ce signal peut s'écrire :

$$s(t) = \frac{A}{2} + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{A}{j(2p+1)p} e^{j(2p+1)wt}$$

Tracer le spectre en amplitude bilatéral.

Exemple 2 : Reconstruction du signal alternatif monophasé

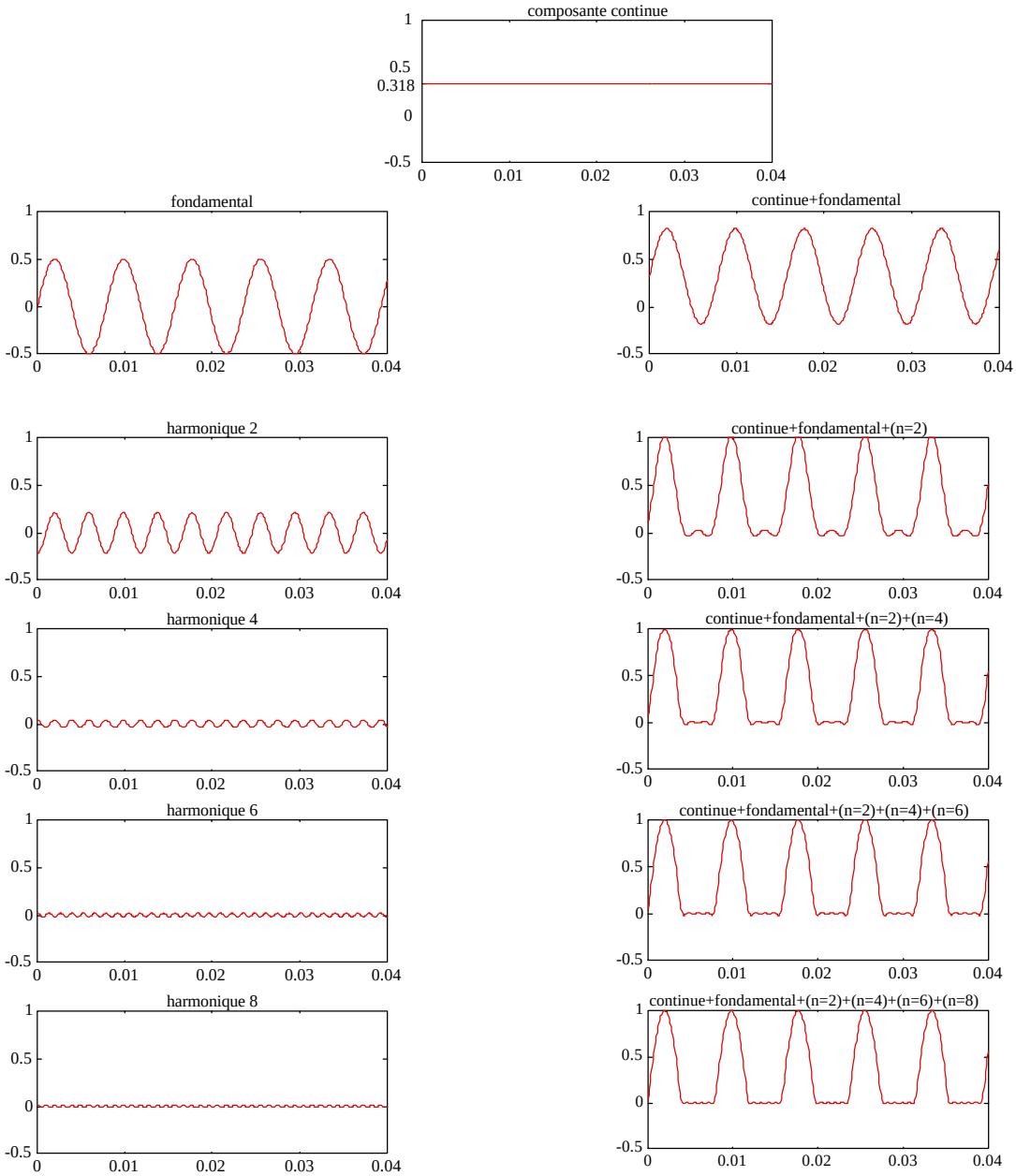


Montrer que ce signal peut s'écrire :

$$s(t) = \frac{E}{p} + \frac{E}{2}\sin(wt) - \frac{2E}{p}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\cos(2pwt)}{(4p^2-1)}$$ (forme trigonométrique)

ou $\quad s(t) = \frac{jE}{4}\sin(-wt) - \frac{jE}{4}\sin(wt) - \frac{E}{p}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(2pwt)}{(4p^2-1)}$ (forme exponentielle complexe).

N.B. : les dessins ci-dessous correspondent au premier cas avec E=1 (forme trigonométrique) :



<u>Solution proposée</u> : (par les exponentielles complexes)

$$s(t) = \begin{cases} E.\sin(\omega.t) \text{ si } 0 \le t \le \frac{T}{2} \text{ modulo } T \\ 0 \text{ si } \frac{T}{2} \le t \le T \text{ modulo } T \end{cases}$$

Calcul de c_n : $c_n = \frac{1}{T}.\int_0^T s(t).e^{-j.n.\omega.t}.dt = \frac{1}{T}.\int_0^{T/2} E.\sin(\omega.t).e^{-j.n.\omega.t}.dt = \frac{1}{T}.\int_0^{T/2} E.\frac{e^{j\omega.t}-e^{-j.\omega.t}}{2.j}.e^{-j.n.\omega.t}.dt =$

$\frac{1}{T}.\int_0^{T/2} E.\frac{e^{j\omega.t}}{2.j}.e^{-j.n.\omega.t}.dt - \frac{1}{T}.\int_0^{T/2} E.\frac{e^{-j.\omega.t}}{2.j}.e^{-j.n.\omega.t}.dt = \frac{E}{T.2.j}.\int_0^{T/2} e^{-j.(n-1).\omega.t}.dt - \frac{E}{T.2.j}.\int_0^{T/2} e^{-j.(n+1).\omega.t}.dt$

Pour n ≠ 1 et n ≠ -1, on a : $\frac{E}{T.2.j}.\left[\frac{e^{-j.(n-1).\omega.t}}{-j.(n-1).\omega}\right]_0^{T/2} - \frac{E}{T.2.j}.\left[\frac{e^{-j.(n+1).\omega.t}}{-j.(n+1).\omega}\right]_0^{T/2}$

$$= \frac{E}{T.2.j}.\left[\frac{e^{-j.(n-1).\frac{2.\pi}{T}.T/2} - e^{-j.(n-1).\frac{2.\pi}{T}.0}}{-j.(n-1).\frac{2.\pi}{T}}\right] - \frac{E}{T.2.j}.\left[\frac{e^{-j.(n+1).\frac{2.\pi}{T}.T/2} - e^{-j.(n+1).\frac{2.\pi}{T}.0}}{-j.(n+1).\frac{2.\pi}{T}}\right] = \frac{E}{4.\pi}.\left[\frac{e^{-j.(n-1).\pi}-1}{(n-1)}\right] - \frac{E}{4.\pi}.\left[\frac{e^{-j.(n+1).\pi}-1}{(n+1)}\right]$$

Si n pair, n = 2.p, $c_{2.p} = \frac{E}{4.\pi}.\left[\frac{e^{-j.(2.p-1).\pi}-1}{(2.p-1)}\right] - \frac{E}{4.\pi}.\left[\frac{e^{-j.(2.p+1).\pi}-1}{(2.p+1)}\right] = \frac{E}{4.\pi}.\left[\frac{-1-1}{(2.p-1)}\right] - \frac{E}{4.\pi}.\left[\frac{-1-1}{(2.p+1)}\right] =$

$$\frac{E}{2.\pi}.\left[\frac{-1}{(2.p-1)} + \frac{1}{(2.p+1)}\right] = \frac{E}{2.\pi}.\left[\frac{-(2.p+1)+(2.p-1)}{(2.p-1).(2.p+1)}\right] = \frac{-E}{\pi.(4.p^2-1)}$$

Si n impair, n = 2.p+1, $c_{2.p+1} = \frac{E}{4.\pi}.\left[\frac{e^{-j.(2.p).\pi}-1}{(2.p)}\right] - \frac{E}{4.\pi}.\left[\frac{e^{-j.(2.p+2).\pi}-1}{(2.p+2)}\right] = \frac{E}{4.\pi}.\left[\frac{1-1}{(2.p)}\right] - \frac{E}{4.\pi}.\left[\frac{1-1}{(2.p+2)}\right] = 0.$

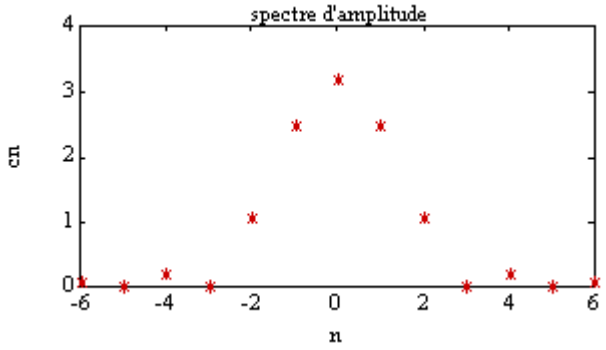
Pour n=1, on a : $c_1 = \frac{E}{T.2.j}.\int_0^{T/2} dt - \frac{E}{T.2.j}.\int_0^{T/2} e^{-j.2.\omega.t}.dt = \frac{E}{T.2.j}.[t]_0^{T/2} - \frac{E}{T.2.j}.\left[\frac{e^{-j.2.\omega.t}}{-j.2.\omega}\right]_0^{T/2}$

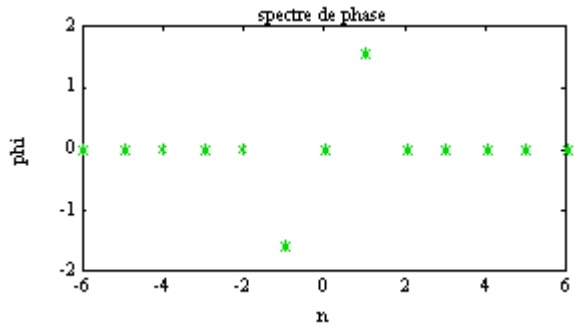
$$= \frac{E}{T.2.j}.\left[\frac{T}{2}-0\right] - \frac{E}{T.2.j}.\left[\frac{e^{-j.2.\frac{2.\pi}{T}.T/2} - e^{-j.2.\frac{2.\pi}{T}.0}}{-j.2.\frac{2.\pi}{T}}\right] = \frac{E}{4.j} - \frac{E}{8.\pi}.\left[e^{-j2.\pi}-1\right] = \frac{E}{4.j} - \frac{E}{8.\pi}.[1-1] = -\frac{j.E}{4}.$$

Pour n=-1, on a : $c_{-1} = \frac{E}{T.2.j}.\int_0^{T/2} e^{j2.\omega.t}.dt - \frac{E}{T.2.j}.\int_0^{T/2} dt = \frac{E}{T.2.j}.\left[\frac{e^{j.2.\omega.t}}{j.2.\omega}\right]_0^{T/2} - \frac{E}{T.2.j}.[t]_0^{T/2} = \frac{j.E}{4}$

SPECTRE EN MODULE ET PHASE

n	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
Module	$\frac{E}{35.\pi}$	0	$\frac{E}{15.\pi}$	0	$\frac{E}{3.\pi}$	$\frac{E}{4}$	$\frac{E}{\pi}$	$\frac{E}{4}$	$\frac{E}{3.\pi}$	0	$\frac{E}{15.\pi}$	0	$\frac{E}{35.\pi}$
Phase	0	/	0	/	0	π/2	0	π/2	0	/	0	/	0





Reconstruction du signal s(t) :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jnwt} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_{2.p}.e^{j2.p.\omega.x} + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_{2.p+1}.e^{j.(2.p+1).\omega.x} =$$

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_{2.p}.e^{j2.p.\omega.x} + \sum_{p=-\infty}^{-2} c_{2.p+1}.e^{j.(2.p+1).\omega.x} + \sum_{p=-1}^{0} c_{2.p+1}.e^{j.(2.p+1).\omega.x} + \sum_{p=1}^{+\infty} c_{2.p+1}.e^{j.(2.p+1).\omega.x} =$$

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{E}{\pi.(1-4.p^2)}.e^{j.2.p.\omega.x} + \sum_{p=-\infty}^{-2} 0.e^{j.(2.p+1).\omega.x} + \sum_{p=-1}^{0} \frac{-E.j}{4.(2.p+1)}.e^{j.(2.p+1).\omega.x} + \sum_{p=1}^{+\infty} 0.e^{j.(2.p+1).\omega.x} =$$

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{E}{\pi.(1-4.p^2)}.e^{j.2.p.\omega.x} + \frac{E.j}{4}.e^{-j.\omega.x} - \frac{E.j}{4}.e^{j.\omega.x}$$

1.6. Récapitulatif des formules à retenir pour la calcul de spectres de signaux analogiques périodiques (utilisation des développements en série de Fourier)

Formes exponentielles (complexes) => permettent l'obtention directe d'un spectre bilatéral	Formes trigonométriques (réelles) => permettent l'obtention directe d'un spectre unilatéral
Reconstruction du signal à partir de ses coefficients de série de Fourier (spectre) : $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jnwt}$	Reconstruction du signal à partir de ses coefficients de série de Fourier (spectre) : $s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nwt) + b_n \sin(nwt)\right)$ $= A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(nwt - j_n)$
Calcul du spectre à partir de l'expression du signal : $c_n = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} s(t) e^{-jnwt} dt$	Calcul du spectre à partir de l'expression du signal : $a_0 = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} s(t) dt$ $a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} s(t) \cos(nwt) dt$ $b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} s(t) \sin(nwt) dt$
bilatéral ⇔ unilatéral : $A_n = 2\lvert c_n \rvert$; $tg j_n = \frac{-\mathrm{Im}(c_n)}{Ré(c_n)}$ pour n ≠ 0 $A_0 = \lvert c_0 \rvert$	unilatéral : $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$; $tg j_n = \frac{b_n}{a_n}$
$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \ si \ n > 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + jb_{-n}) \ si \ n < 0 \end{cases}$	$a_n = 2Ré(c_n)$; $b_n = -2\,\mathrm{Im}(c_n)$

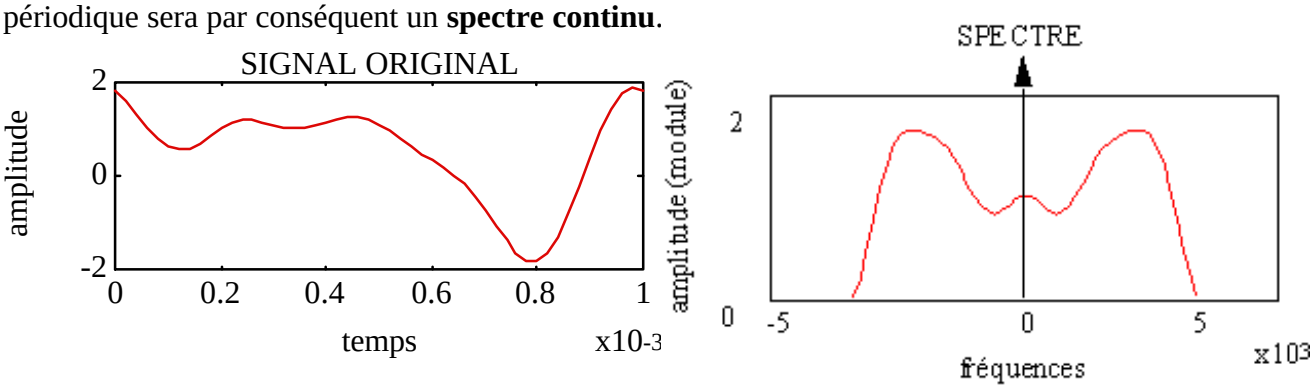
1.7. Utilisation du serveur web

Le paragraphe 2 du serveur vous propose :

- un cours en anglais proposé par l'Université de Ulm (Allemagne) (attention à la façon de calculer a_0 qui est différente sur le site allemand et dans le poly, la façon de reconstruire le signal s(t) en fonction des coefficients de Fourier s'en ressent également).
- Plusieurs exercices dont ceux ci-dessous peuvent vous être utiles :
  1. "Find the Fourier …"
  2. "How should …"
  3. "Expand f(x)…"
  5. "Find the Fourier …"
- Un questionnaire d'auto-évaluation.

2. Cas des signaux non périodiques

Fourier a raisonné de la manière suivante : considérer qu'un signal non périodique est un signal périodique de période infinie. Concernant le spectre, l'espacement (égal à 1/T, avec T la période du signal) entre les points du spectre de "raies" va donc tendre vers 0. Le spectre du signal non périodique sera par conséquent un **spectre continu**.



2.1. Définition

La Transformée de Fourier d'un signal analogique (TFSA) est définie par :

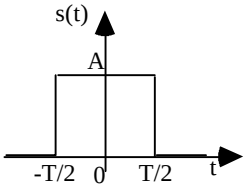
$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt \;;\; S(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-jwt} dt \text{ avec } \omega = 2\pi f$$

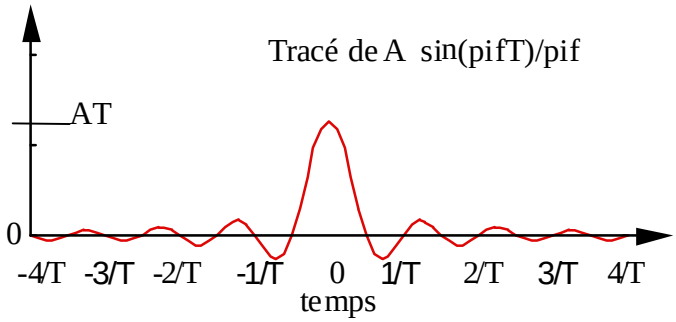
La Transformée de Fourier inverse (TFISA) est définie par :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} S(w) e^{jwt} dw$$

On peut constater que les équations mathématiques de la TFSA et de la TFISA sont très proches, les propriétés des deux transformées seront donc similaires, ceci est dû à la **dualité temps-fréquence**.

2.2. Exemple 1 : spectre d'un signal rectangulaire





$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-T/2}^{T/2} A e^{-j2\pi ft} dt = A\left[\frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f}\right]_{-T/2}^{T/2} = A\left[\frac{e^{-j2\pi fT/2} - e^{j2\pi fT/2}}{-j2\pi f}\right] = \frac{A}{pf}\sin(pfT)$$

Le spectre obtenu est un sinus cardinal.

Etude du sinus cardinal :

Largeur du lobe principal : 2/T

Sommet du lobe principal : $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ donc $\lim_{f \longrightarrow 0} \frac{A\sin(pfT)}{pf} = AT$.

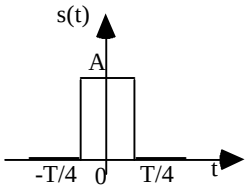
Pseudo-période : Pour f≠0, le sinus cardinal s'annule pour sin(πfT)=0 <=> πfT=0 ± kπ => f=± k/T

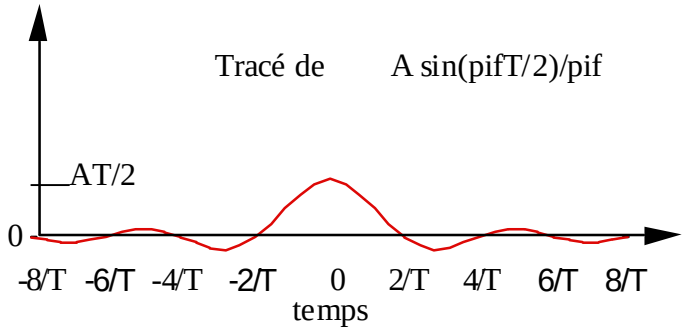
Largeur des lobes secondaires : 1/T

Sommets des lobes secondaires : Les sommets sont atteints tous les 1,5/T± k/T.

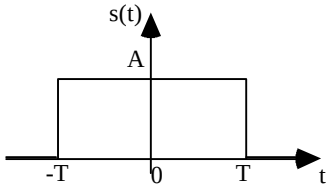
La valeur est : $\frac{A}{p(1{,}5/T \pm k/T)}\sin\left(p(1{,}5/T \pm k/T)T\right) = \frac{AT}{p(1{,}5 \pm k)}\sin\left(p(1{,}5 \pm k)\right)$

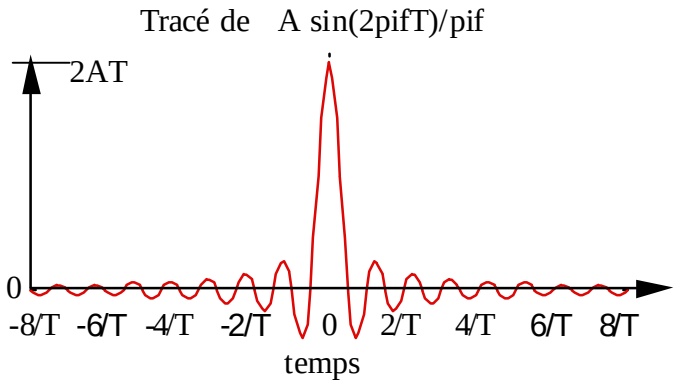
N.B. Lorsque la fenêtre rectangulaire se réduit, le sinus cardinal a tendance à s'étaler et les amplitudes décroissent :





Au contraire, si la fenêtre est plus longue, le sinus cardinal se resserre et les amplitudes croissent :





2.3. Exemple 2 : spectre de l'impulsion de Dirac δ(t)

(cf. cours chapitre sur les signaux analogiques pour la définition de δ(t))

La transformée de Fourier de $\delta_1(t)$ est la suivante :

$$F(d_1(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} d_1(t)e^{-jwt}dt = \int_{-e/2}^{+e/2} \frac{1}{e}e^{-jwt}dt = \frac{1}{e}\left[\frac{e^{-jwt}}{-jw}\right]_{-e/2}^{e/2} = \frac{1}{-jwe}\left(e^{-jwe/2} - e^{jwe/2}\right) = \frac{2\sin(we/2)}{we}$$

On peut en tirer la transformée de Fourier de l'impulsion de Dirac δ(t) :

$$F(d(t)) = \lim_{e \longrightarrow 0}\left(F(d_1(t))\right) = \lim_{e \longrightarrow 0}\frac{2\sin(we/2)}{we} = 1$$

2.4. Propriétés de la transformée de Fourier

Linéarité

Soit $\lambda \in \Re$,

$$F(u(t) + lv(t)) = F(u(t)) + l.F(v(t)) = U(f) + l.V(f)$$

De la même façon, on peut écrire pour la transformée de Fourier inverse :

$$F^{-1}(U(f) + lV(f)) = F^{-1}(U(f)) + l.F^{-1}(V(f)) = u(t) + l.v(t)$$

Transformée de u(at) avec a ∈ ℜ*

Soit v(t)=u(at), on effectue le changement de variables x=at, donc cx=a.dt

$$F(u(at)) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(at)e^{-jwt}dt$$

Si t varie de -∞ à +∞, alors il faut discuter du signe de a :

- Si a > 0, x varie de -∞ à +∞, la fonction sgn(a)=1 (signe de a = 1),
- Si a < 0, x varie de +∞ à -∞, la fonction sgn(a)=-1

$$F(u(x)) = sgn(a)\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)e^{-jwx/a}dx/a = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)e^{-jwx/a}dx = \frac{1}{|a|}.U\left(\frac{f}{a}\right)$$

Transformée de $u(t-t_0)$, autrement dit du signal u(t) décalé de la constante t_0

Pour résoudre ce problème, on effectuera le changement de variable $x= t-t_0$, d'où dx=dt.

$$F(u(t-t_0)) = F(u(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)e^{-jw(x+t_0)}dx = e^{-jwt_0}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)e^{-jwx}dx = e^{-jwt_0}.F(u(t)) = e^{-jwt_0}.U(f)$$

Transformée inverse de $U(f-f_0)$, autrement dit du spectre U(f) décalé de la constante f_0

En faisant la même démonstration que dans le cas précédent :

$$F^{-1}(U(f-f_0)) = e^{j2pf_0t}u(t)$$

Transformée de Fourier de u'(t)

On admettra sans démonstration :

$$F(u'(t)) = 2jpfU(f)$$

Transformée inverse de Fourier de U'(f)

On admettra sans démonstration :

$$F^{-1}(U'(f)) = -2jptu(t)$$

Transformée de Fourier du produit de convolution

- Définition du produit de convolution (*)

$$u(t)*v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x).v(t-x)dx$$

- Transformée du produit de convolution :

$$F\big(u(t)*v(t)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(t-x)e^{-jwt}dxdt = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(t-x)e^{-jw(t-x)}e^{-jwx}dxdt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)e^{-jwx}dx\int_{-\infty}^{+\infty} v(t-x)e^{-jw(t-x)}dt = U(f).V(f)$$

La transformée de Fourier du produit de convolution de deux signaux est égale au produit simple des transformées de Fourier de chacun des deux signaux.

$$F(u(t)*v(t)) = F(u(t)).F(v(t)) = U(f).V(f)$$

Transformée de Fourier du produit simple

$$F(u(t).v(t)) = F(u(t))*F(v(t)) = U(f)*V(f)$$

La transformée de Fourier du produit simple de deux signaux est égale au produit de convolution des transformées de Fourier de chacun des deux signaux.

2.5. Propriétés

TABLE DE TRANSFORMÉES DE FOURIER DE SIGNAUX ANALOGIQUES

Les transformées de Fourier de signaux analogiques se déduisent des transformées de Laplace en posant p = jω à condition que la transformée de Fourier existe (condition sur la convergence)

Propriétés ou théorèmes	domaine temporel	domaine fréquentiel
Linéarité	$f_1(t) + f_2(t)$ $A.f(t)$ 0	$F_1(\omega) + F_2(\omega)$ $A.F(\omega)$ 0
Facteur d'échelle	$f(\omega_0 t)$	$\frac{1}{\omega_0} F\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$
Théorème du retard	$f(t - \tau)$	$e^{-jwt} F(w)$
Théorème de l'amortissement ou décalage fréquentiel	$e^{-jw_0 t} f(t)$	$F(\omega + \omega_0)$
Dérivée par rapport au temps	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^n.F(\omega)$
Théorème de l'intégration	$\int_{-\infty}^{t} f(x)dx$	$\frac{F(w)}{jw}$
Produit de convolution	$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau).d\tau$	$F(\omega) . G(\omega)$
	$f(t) . g(t)$	$\frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega)$
Inter (Auto) corrélation	$C_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t+\tau)dt$	

domaine temporel	domaine fréquentiel
$\delta(t)$; $\delta^{(n)}(t)$ 1	1 ; p^n $2\pi.\delta(\omega)$
$\Gamma(t)$	$VP\left(\frac{1}{j\omega}\right) + \pi.\delta(\omega)$
$(-jt)^n.f(t)$	$\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$
$\frac{t^n.\Gamma(t)}{n!}$	$VP\left(\frac{1}{(j\omega)^{n+1}}\right) + \frac{j^n}{n!}.\pi.\delta^{(n)}(\omega)$
$\sin \omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}\delta(\omega - \omega_0) - \frac{\pi}{j}\delta(\omega + \omega_0)$
$\cos \omega_0 t$	$\pi.\delta(\omega - \omega_0) + \pi.\delta(\omega + \omega_0)$

VP est la valeur principale de Cauchy :

$VP\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}, \forall x \neq 0$

$VP\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, pour x = 0

2.6. Utilisation du serveur web

Le paragraphe 3 du serveur vous propose :

- un cours en anglais proposé par l'Université de Ulm (Allemagne).
- Plusieurs exercices dont celui ci-dessous peut vous être utile :

  8 : "The Heaviside function…"
- Un questionnaire d'auto-évaluation.

3. Convolution

La convolution est un outil qui est utile pour deux applications principales : la modulation et l'échantillonnage.

3.1. Convolution d'un signal quelconque s(t) par l'impulsion de Dirac δ(t)

En raisonnant sur les transformées de Fourier : sachant que :

$$F(d(t)) = 1$$

On a :

$$F(d(t) * s(t)) = F(d(t))F(s(t)) = F(s(t)) = S(f)$$

L'égalité des transformées implique l'égalité des signaux, autrement dit :

$$d(t) * s(t) = s(t)$$

On dit que l'impulsion de Dirac δ(t) est l'élément neutre pour l'opération "produit de convolution".

3.2. Convolution d'un signal quelconque s(t) par l'impulsion de Dirac décalée $\delta(t-t_0)$

En raisonnant sur les transformées de Fourier : sachant que :

$$F(d(t-t_0)) = e^{-jwt_0} F(d(t)) = e^{-jwt_0}$$

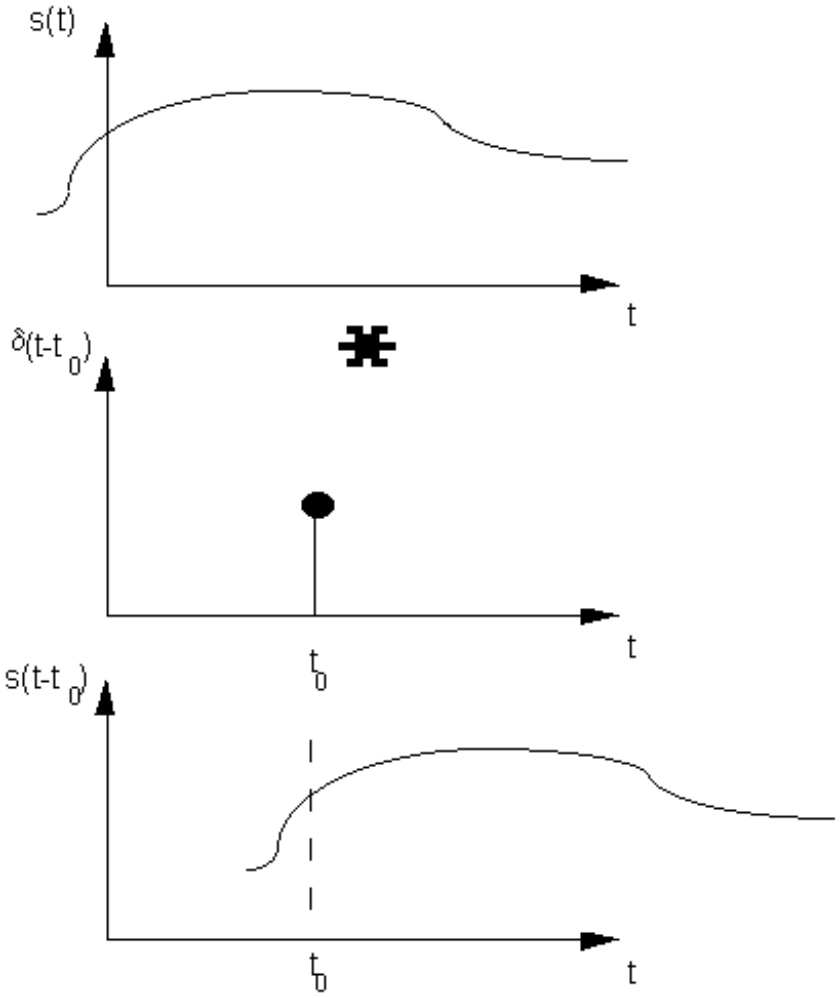
On a :

$$F(d(t-t_0) * s(t)) = F(d(t-t_0)).F(s(t)) = e^{-jwt_0} F(s(t)) = e^{-jwt_0} S(f) = F(s(t-t_0))$$

L'égalité des transformées implique l'égalité des signaux, autrement dit :

Autrement dit, effectuer le produit de convolution entre une impulsion de Dirac décalée de la valeur t_0 et un signal quelconque s(t) revient à **décaler** le signal s(t) de la valeur de t_0.

$$d(t-t_0) * s(t) = s(t-t_0)$$



Chapitre 4 : Les signaux discrets (ou numériques)

1. Introduction

Les signaux physiques existant dans la nature sont en général des signaux de type analogique et il sera nécessaire, lorsque nous voudrons les faire transiter sur un réseau, de les échantillonner. Nous allons voir l'influence de l'échantillonnage (discrétisation) d'un signal sur son spectre (analyse fréquentielle). Ceci nous permettra de mettre en évidence certaines limitations. Nous verrons également comment s'effectue en pratique l'opération d'échantillonnage et quel compromis il est nécessaire de faire entre la théorie et la pratique.

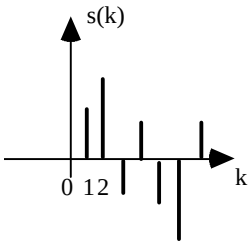
Les avantages des techniques numériques sont :
- la répétabilité parfaite,
- la précision,
- la possibilité de faire transiter de manière transparente sur les mêmes supports des données de types divers (voix et sons, images, données de type informatique...),
- par rapport aux techniques analogiques : pas de vieillissement, pas de dérive...

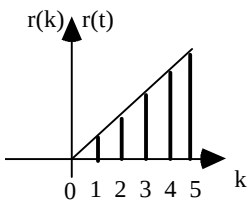
Les signaux numériques ou discrets ou encore échantillonnés sont le plus souvent issus de signaux analogiques dont on prélève les valeurs à des instants régulièrement espacés : c'est l'opération d'échantillonnage qui transforme un signal continu en une suite numérique. Lorsqu'on veut échantillonner un signal s(t), deux problèmes se posent :
- dans le domaine temporel, quelle est la perte éventuelle d'information et existe-t-il une fonction d'interpolation qui permet de reconstituer le signal continu original de manière univoque à partir de la suite numérique ? Le théorème d'échantillonnage répond à cette question.
- dans le domaine des amplitudes du signal, se pose le problème de la taille numérique des nombres de la série. En effet, du fait de leur manipulation sur un calculateur, les quantités numériques sont forcément codées sur un nombre fini d'éléments binaires. Il s'agit de l'opération de quantification.

2. Le signal échantillonné

Echantillonner un signal consiste donc à prendre des échantillons de celui-ci à des instants *régulièrement* espacés.
Au niveau écriture, il est habituel de représenter les signaux de la façon suivante.
Soit un signal continu **s(t)**, on prélève un échantillon de celui-ci à chaque période d'échantillonnage T_e (aussi appelée Δ dans la littérature). Les échantillons en fonction du temps peuvent donc s'écrire $\mathbf{s(k}T_e\mathbf{)}$. Pour simplifier l'écriture et aussi se rapprocher de la représentation mathématique des suites numériques, on écrit : $\mathbf{s_k}$, ce qui signifie le $k^{ème}$ échantillon du signal s(t) pour $t=kT_e$.

Exemples de signaux discrets :





Aux équations différentielles linéaires à coefficients constants du domaine analogique correspondent, dans le cas discret, des équations récurrentes à coefficients constants.

Ex : Considérons l'équation différentielle : $\dot{x} - ax = 0$ avec x(0) = c.

Sa solution est $x(t) = ce^{at}$, $\forall\ t \geq 0$.

Considérons parallèlement l'équation récurrente $x_{k+1} - ax_k = 0$ avec x_0 = c.

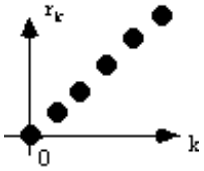
Sa solution est $x_k = ca^k$, $\forall\ k \geq 0$.

N.B. : pour simplifier l'étude mathématique et puisque cela correspond à une réalité physique, nous ne traiterons ici que de signaux causals, qui sont nuls pour k < 0.

Comme pour les signaux analogiques, des signaux-tests sont utilisés dans le domaine numérique qui sont la rampe r_k, l'échelon Γ_k, l'impulsion de Dirac δ_k et un signal particulier, le peigne de Dirac Ш_k (lettre cyrillique tcha).

2.1. La rampe discrète unitaire $\{r(kT_e)\}=\{r_k\}$

$$\{r_k\} = \begin{cases} 0 & pour\ \ k < 0 \\ kT_e & pour\ \ k \geq 0 \end{cases} \quad \text{(causalité)}$$



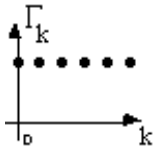
La pente exprime la vitesse de variation de la grandeur considérée.

$\theta = ar_k$; a = 0.2 degré par seconde exprime par exemple la croissance linéaire de la température d'un four.

N.B. : la rampe discrète unitaire r_k est le signal issu de l'échantillonnage de la rampe unitaire continue r(t).

2.2. L'échelon unitaire discret de Heaviside $\{\Gamma_k\}$ ou fonction existence

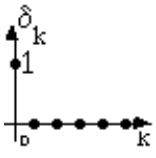
$$\{\Gamma(kT_e)\}=\{\Gamma_k\} = \begin{cases} 0 & \text{pour } k < 0 \\ 1 & \text{pour } k \geq 0 \end{cases} \quad \text{(causalité)}$$



2.3. L'impulsion de Dirac discrète $\{\delta_k\}$

La définition de l'impulsion de Dirac discrète est très proche de celle de l'impulsion continue :

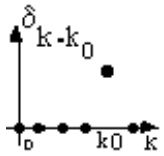
$$\{\delta(kT_e)\}= \delta_k = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \neq 0 \\ 1 & \text{pour } k = 0 \end{cases}$$



ATTENTION : La définition de l'impulsion de Dirac discrète est sensiblement différente de celle de l'impulsion de Dirac analogique. En effet, ici il n'est pas question de surface unitaire : la suite $\{\delta_k\}$ est une suite d'échantillons valant tous 0 sauf l'échantillon pour k=0 qui vaut 1.

2.4. L'impulsion de Dirac discrète décalée $\delta\{k-k_0\}$

La définition de l'impulsion de Dirac discrète décalée est la suivante :



$$\{\delta((k-k_0)T_e)\}= \delta_{k-k0} = \begin{cases} 0 \;\; pour \;\; k \neq k_0 \\ 1 \;\; pour \;\; k = k_0 \end{cases}$$

2.5. Le peigne de Dirac unitaire centré |_|_| (tcha)

C'est une distribution singulière périodique. On note $|_|_|_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d(t-kT_e)$.

La sommation s'étend sur l'infini (dans le cas idéal) d'une suite de "fonctions de Dirac" retardées $\delta(t - kT_e)$.

La multiplication de $|_|_|_k$ par une fonction s_k est une opération licite qui conduit à une pondération des poids des impulsions du peigne par les valeurs de la fonction aux instants kT_e. Cette opération correspond par ailleurs à une opération d'échantillonnage.

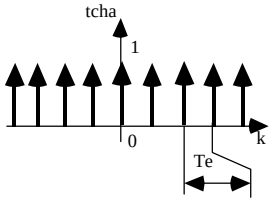
$$s_k.|_|_|_k = \sum_k s_k.d(t-k.T_e)$$

Le peigne de Dirac possède la propriété fondamentale d'être invariant dans la transformation de Fourier :

$$F(|_|_|_k)=F\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} d(t-k.T_e)\right)=\frac{1}{T_e}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} d\left(f-\frac{k}{T_e}\right) = |\hat{_}|\hat{_}|(f)$$

Démonstration :

Décomposition en série de Fourier du peigne de Dirac qui est un signal périodique :



$$s(t) = d(t) = \lim_{T_i \longrightarrow +\infty} \frac{1}{T_i} \text{ pendant la durée } T_i$$

$$c_n = \frac{1}{T}.\int_a^{a+T} s(t).e^{-j.n.w.t}.dt \;\; = \frac{1}{T_e}.\int_0^{T_e} d(t).e^{-j.n.w.t}.dt$$

$$= \frac{1}{T_e}.\lim_{T_i \longrightarrow 0}\left(\int_0^{T_i} \frac{1}{T_i}.e^{-j.n.w.t}.dt + \int_{T_i}^{T_e} 0.e^{-j.n.w.t}.dt\right)$$

$$= \frac{1}{T_e}.\lim_{T_i \longrightarrow 0}\left[\frac{e^{-j.n.w.t}}{T_i.(-j.n.w)}\right]_0^{T_i}$$

$$= \frac{1}{T_e}.\lim_{T_i^- 0}\left[\frac{e^{-j.n.w.T_i}-1}{T_i.(-j.n.w)}\right] = \frac{1}{T_e}.\lim_{T_i \longrightarrow 0}\left[\frac{\left(1+\frac{-j.n.w.T_i}{1!}\right)-1}{T_i.(-j.n.w)}\right] = \frac{1}{T_e}.$$

Le calcul ci-dessus est vrai à condition que n ≠ 0. Il faut refaire le calcul pour n = 0 :

$$c_0 = \frac{1}{T}.\int_a^{a+T} s(t).dt = \frac{1}{T_e}.\int_0^{T_e} d(t).dt = \frac{1}{T_e}\lim_{T_i \to 0}.\int_0^{T_i}\frac{1}{T_i}.dt = \frac{1}{T_e}\lim_{T_i \to 0}.\left[\frac{T_i}{T_i}\right] = \frac{1}{T_e}$$

En spectre bilatéral, on obtient donc des raies d'amplitude $1/T_e$ tous les $1/T_e$.

2.6. Le signal harmonique ou sinusoïdal discret

De même que lorsqu'on étudie un filtre analogique, on fera l'étude de la réponse fréquentielle d'un système numérique et pour cela on considérera un signal sinusoïdal échantillonné pour lequel on fera varier la fréquence entre 0 et une limite maximale que l'on verra plus tard.

3. Problèmes d'échantillonnage

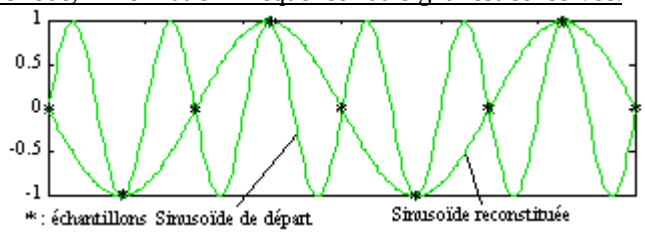
Nous allons voir dans cette partie les contraintes théoriques de l'opération d'échantillonnage. Sur le plan théorique, nous pouvons considérer qu'échantillonner un signal revient à le multiplier par un peigne de Dirac, nous allons voir comment cela se traduit dans les domaines temporel et fréquentiel.

3.1. Domaine temporel

S'il y a plus de deux échantillons par période, l'information "fréquence" du signal est conservée.

3.1.2 Supposons que l'on échantillonne le signal harmonique de fréquence f à la fréquence $f_e = \frac{4}{3} f$.

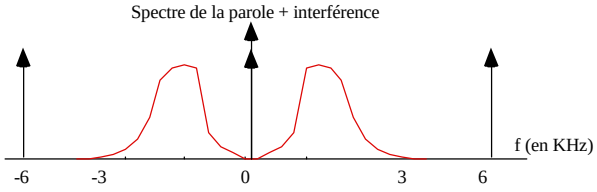
Cela implique que la période d'échantillonnage est égale aux trois quarts de la période du signal.



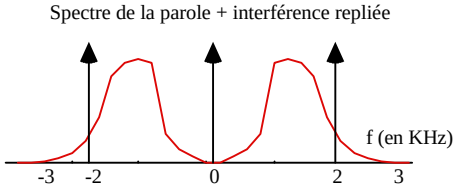
On constate que la "reconstruction la plus normale" d'une sinusoïde passant par les échantillons est la sinusoïde de fréquence f/3. Il s'agit de l'illustration dans le domaine temporel du repliement des fréquences.

3.2. Domaine fréquentiel

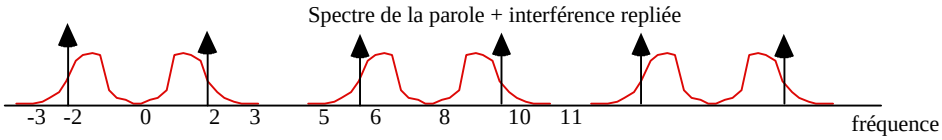
A titre d'exemple, nous traiterons le cas de la transmission numérique (téléphone numérique) ou du stockage numérique sur disque compact de la parole.



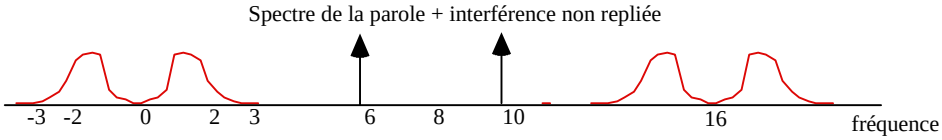
Supposons que se superpose au signal de parole (spectre de 300 Hz à 3 kHz) une interférence à f_i = 6 kHz. La transmission s'effectue à f_e = 8 kHz qui est supérieure à 2 $f_{maxsignal}$, $f_{maxsignal}$ valant à peu près 3 kHz ; il n'y a donc pas "recouvrement" des spectres de parole. En revanche, l'interférence qui est telle que $f_e = \frac{4}{3} f_i$ se replie à $f_i/3$ = 2 kHz et rend inaudible le signal de parole à la réception.



On peut expliquer ceci par la "périodisation" fréquentielle du signal discret représenté ci-dessous.



Si l'on avait échantillonné à 16 kHz, le problème ne se serait pas posé car la condition de Nyquist (ou de Shannon) d'échantillonnage serait respectée y compris pour l'interférence à 6 kHz.



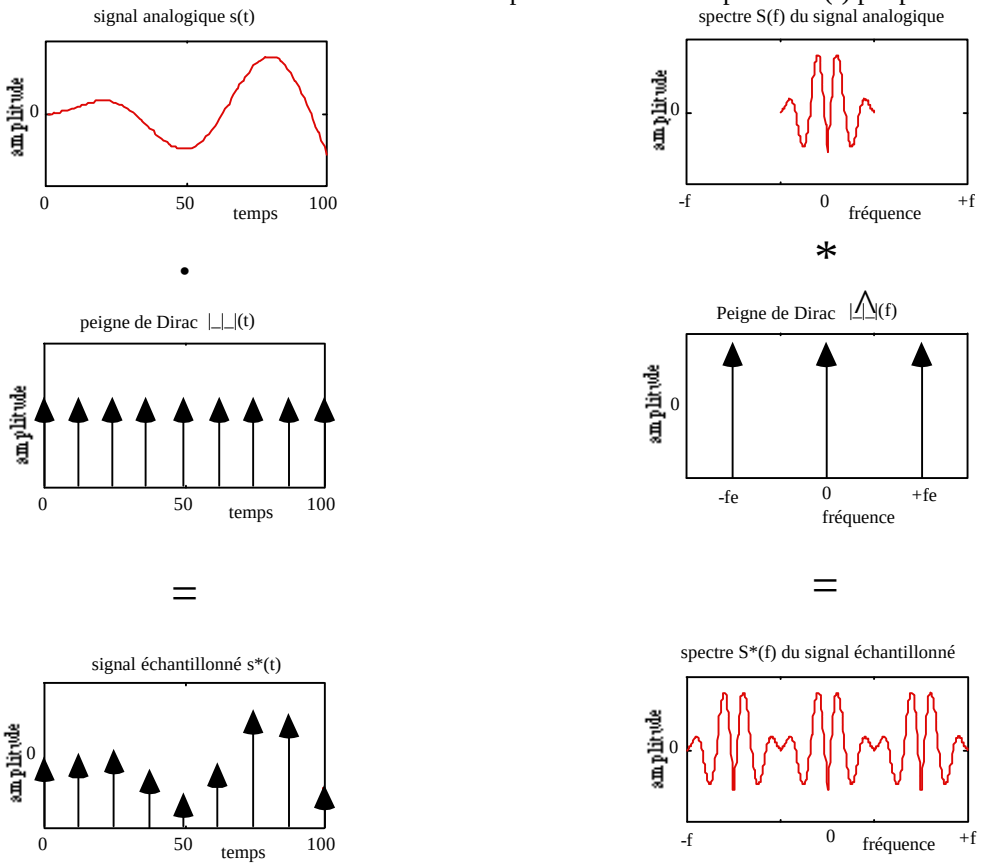
3.3. Théorème d'échantillonnage

DOMAINE TEMPOREL

Soit un signal s(t), en le multipliant par le peigne de Dirac |_|_|(t), on obtient le signal échantillonné s*(t).

DOMAINE FRÉQUENTIEL

Le signal S(f) est le spectre du signal s(t), le produit simple dans le domaine temporel équivalant à un produit de convolution dans le domaine fréquentiel, on obtient par convolution le spectre S*(f) par périodisation de S(f).



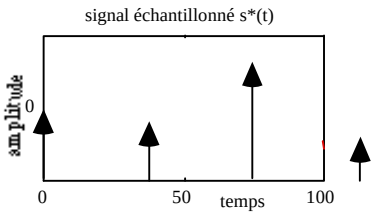
Si le peigne de Dirac |/\|(f) a une "période fréquentielle" f_e suffisamment grande, le spectre du signal échantillonné est constitué d'une répétition dans le domaine fréquentiel d'un motif qui n'est autre que le spectre du signal continu. Si f_e est trop petite, il ne devient plus possible d'extraire du spectre S*(f) le motif de S(f).

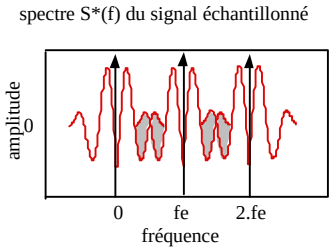
La condition qui lie f_e à la fréquence maximale f_{max} contenue dans le signal est appelée la condition de Nyquist. Celle-ci stipule que $f_e > 2f_{max}$ (en théorie $f_e \geq 2f_{max}$).

Repliement des spectres

Si le peigne de Dirac |⍓|(f) a une "période fréquentielle" trop petite (ne respectant pas les conditions de Nyquist), c'est-à-dire si la période temporelle de |_|(t) est trop grande, les motifs s'entrelacent dans le plan des fréquences et il devient impossible de les dissocier, de là il ne sera pas possible de restituer un signal analogique correct.

On parle de repliement de spectre car les fréquences situées au-delà de $f_e/2$ sont ramenées par symétrie autour de $f_e/2$ dans le domaine de 0 à $f_e/2$.

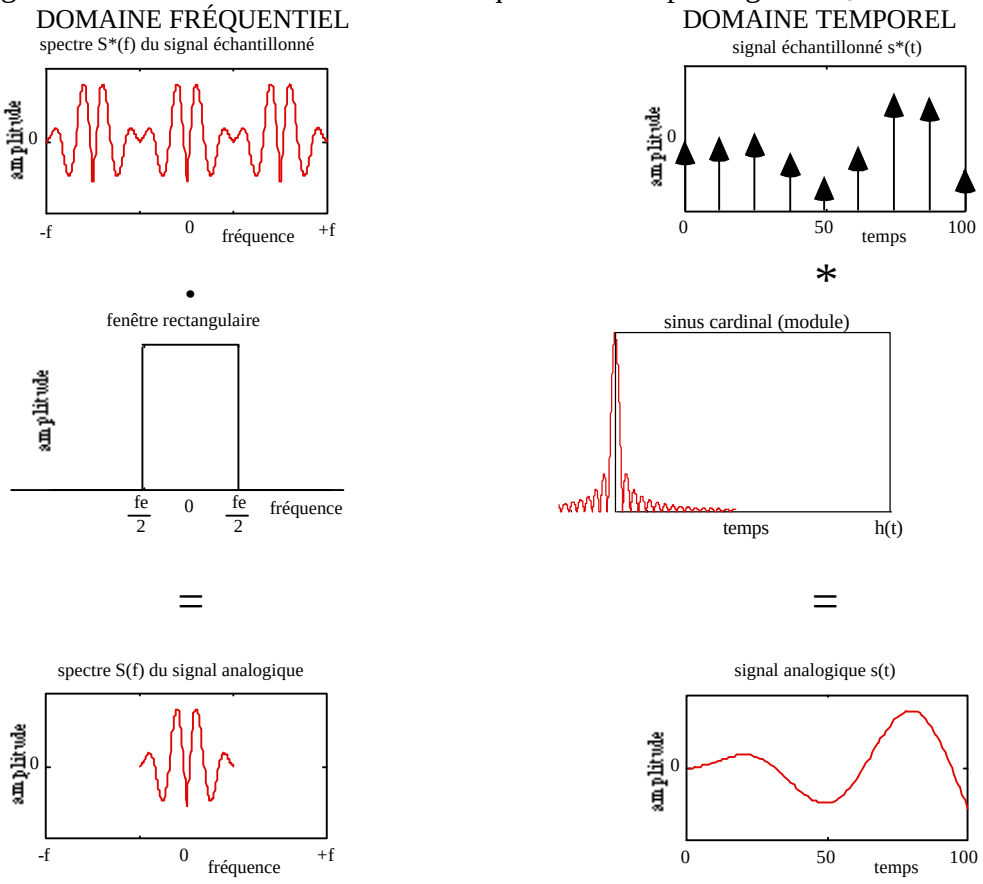




Sur le schéma de droite, la zone hachurée représente la partie où les spectres sont superposés et qu'il est impossible de dissocier par filtrage.

3.4. La restitution du signal analogique

Restituer un signal analogique à partir d'un signal numérique peut se représenter par le filtrage passe-bas d'un signal échantillonné avec un filtre de fréquence de coupure égale à $F_e/2$.



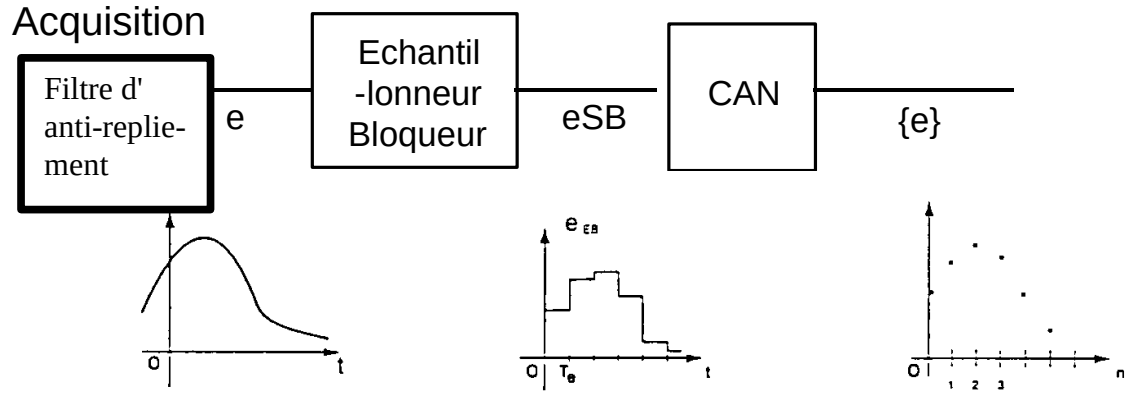
Echantillonner un signal n'a de sens que si l'on est capable de retrouver le signal à partir des échantillons prélevés. On pourra alors affirmer que le signal échantillonné contient toutes les informations présentes dans s.

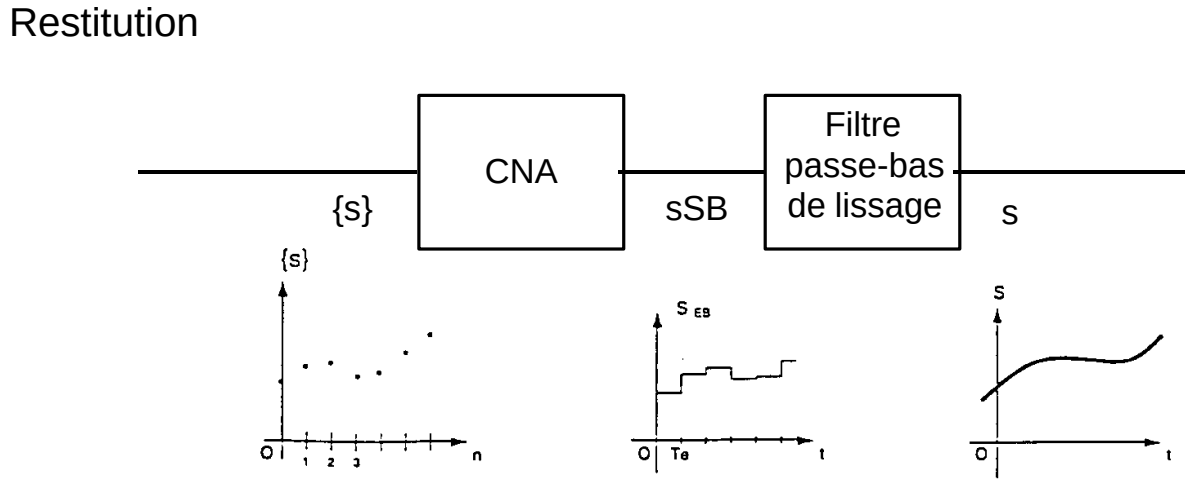
Observons un signal s et son échantillonnage s* pendant une durée T. Il paraît évident que si on a beaucoup d'échantillons, on pourra facilement reconstituer s (t) pendant la durée T.

La fréquence d'échantillonnage $F_e = \frac{1}{T_e}$ ne pouvant être infinie, on ne pourra pas échantillonner des signaux de très haute fréquence ou dont les variations sont très rapides (forte dynamique). En fait, on ne pourra restituer le signal qu'à la condition d'avoir respecté la condition de Nyquist au moment de l'échantillonnage.

Pour obtenir un signal analogique à partir d'un signal échantillonné, il faut multiplier ce dernier par une fenêtre rectangulaire, autrement dit par un filtre passe-bas idéal. La multiplication dans le domaine fréquentiel se traduit par un produit de convolution dans le domaine temporel, autrement dit par une recopie du sinus cardinal pondérée par l'aire de chaque impulsion de Dirac du signal échantillonné, autour de chacune de ces impulsions.

3.5. Chaîne d'acquisition





3.6. Utilisation du serveur web

Dans le paragraphe 4 du serveur, vous trouverez :

- Une simulation de l'effet du choix de la fréquence d'échantillonnage sur un signal,

  Ci-dessous se trouve un extrait de devoir donné en 97-98 en utilisant cette applet

  Données numériques :

  a. Fréquence d'échantillonnage : 1000 Hz,

b. Fréquences du signal : 50 Hz ; 500 Hz ; 950 Hz ; 1000 Hz ; 1050 Hz

La courbe de gauche (noire) de l'applet représente une sinusoïde analogique sur laquelle sont schématisés les échantillons extraits du signal sous forme de petites croix. Il est possible de paramétrer la fréquence de la sinusoïde ainsi que la durée d'affichage.

La courbe de droite représente le signal reconstitué sous forme d'une sinusoïde passant au mieux par les échantillons extraits de la courbe de gauche. La fréquence d'échantillonnage est paramétrable.

Préparation :

Il est demandé d'observer le signal pendant 10 périodes.

1.1 Donner la valeur de la "durée d'affichage en secondes" pour chacun des signaux définis ci-dessus.

1.2 Donner le nombre d'échantillons par période (à calculer) et donner la manière de faire le calcul pour le premier signal.

1.3 La condition d'échantillonnage de Shannon-Nyquist est-elle respectée pour chacun des cinq cas ? Expliquez.

En utilisant l'applet :

Tester chacun des cinq signaux à l'aide des paramètres calculés précédemment. Pour chacun, représenter succinctement les courbes obtenues, de gauche et de droite, constater les résultats obtenus (nombre de périodes visibles à l'écran, nombre d'échantillons sur chaque courbe, nombre d'échantillons par période), et commenter ces résultats.

Vous trouverez également dans cette partie du serveur :

- Un questionnaire d'auto-évaluation sur le signal échantillonné,
- Un questionnaire d'auto-évaluation sur la numérisation.

Chapitre 5 : Spectres de signaux discrets

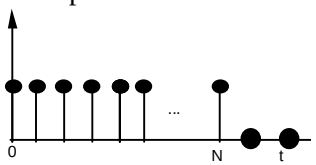
Le problème posé consiste en la détermination du spectre d'un signal discret. Le spectre d'un signal échantillonné est un spectre "périodique" dans le domaine fréquentiel. Les outils mathématiques à mettre en œuvre sont basés sur la somme de nombres discrets Σ au lieu des calculs d'intégrales.

1. Transformée de Fourier d'un Signal Discret (TFSD)

$$S(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k e^{-j2\pi fkT_e} \;;\; S(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k e^{-jwkT_e}$$

Cette expression est une fonction continue de la variable f (c'est-à-dire qu'elle est déterminée pour toute valeur de f) et périodique. Cette expression mathématique rappelle l'expression du développement en série de Fourier, mais à "l'envers", c'est-à-dire que l'on retrouve ici pour les fréquences les propriétés que l'on avait rencontré dans le premier chapitre pour les temps, et vice-versa. Ces constatations sont une conséquence de la propriété de la **dualité temps-fréquence**.

Exemple : transformée de Fourier de la fenêtre rectangulaire discrète :



$$S(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k e^{-j2\pi fkT_e} = \sum_{k=0}^{N} Ae^{-j2\pi fkT_e}$$

2. Transformée de Fourier inverse d'un signal discret (TFISD)

$$s(kT_e) = s_k = \int_{-F_e/2}^{+F_e/2} S(f).e^{j2\pi fkT_e}.df = \frac{1}{2\pi}\int_{-w_e/2}^{+w_e/2} S(w).e^{jwkT_e}.dw$$

Cette expression ressemble beaucoup à la définition du coefficient c_n du développement en série de Fourier (encore une conséquence de la dualité temps-fréquence).

TABLE DE TRANSFORMÉES DE FOURIER D'UN SIGNAL DISCRET

Les transformées de Fourier d'un signal discret se déduisent des transformées en Z en posant $z = e^{pT_e}$ et $p = j2\pi f$ à condition que la transformée de Fourier existe (condition sur la convergence)

(T_e est la période d'échantillonnage)

Passage de Laplace à z => $z = e^{pT_e}$	$s(kT_e) = s_k$	$S(f) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} s_k.e^{-j2\pi fkT_e}$

Propriétés ou théorèmes	domaine temporel	domaine fréquentiel f
Linéarité	$\{x_k + y_k\}$ $\{A.s_k\}$ $\{0\}$	X(f) + Y(f) A.S(f) 0
Théorème du retard	$\{s_{k-k_0}\} = \{s((k-k_0)T_e)\} = s(t-k_0T_e)$	$e^{-j2\pi fk_0T_e}.S(f)$
	$\{s_k e^{j.2.p.f_0k.T_e}\}$	$S(f-f_0)$
Produit de convolution	$\{x_k * y_k\} = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k y_{n-k}$	X(f) . Y(f)
	$\{x_k . y_k\}$	X(f) * Y(f)

3. Exercice :

Soit le signal échantillonné $\{s_k\}$: $s_k = 1$ pour $k = 0$ et $k = 1$.

$s_k = 0$ ailleurs.

Représenter le spectre en amplitude (module) et phase.

Solution :

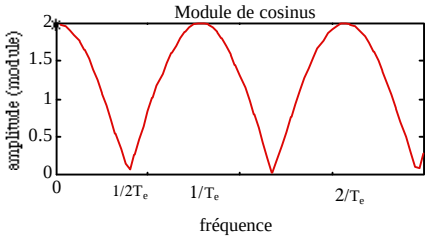
$$S(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k . e^{-j2pfkT_e} = \sum_{k=0}^{1} 1.e^{-j2pfkT_e} = 1 + e^{-j2pf1T_e} = 2\cos(pfT_e)e^{-jpfT_e}$$

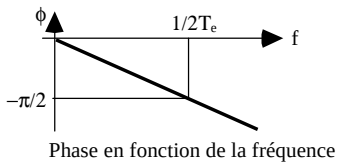
Module de S(f) :

$$|S(f)| = 2|\cos(pfT_e)|$$

Argument de S(f) :

$$\arg(S(f)) = -pfT_e$$





4. Utilisation du serveur web

Dans le paragraphe 4 du serveur, vous trouverez :

- Un questionnaire d'auto-évaluation sur le signal échantillonné,
- Un questionnaire d'auto-évaluation sur la numérisation.

Chapitre 6 : Calcul de spectres par calculateur

Transformée de Fourier Discrète (TFD) & Transformée de Fourier Rapide (TFR)

Lorsque l'on désire **calculer la transformée de Fourier par ordinateur** ou via **un module de calcul FFT**, il faut trouver une expression de la transformée de Fourier qui donne non pas une expression continue de la variable f (impossible à faire sur un ordinateur) mais une suite d'échantillons de cette transformée de Fourier : c'est la **TFD/DFT (Transformée de Fourier Discrète / Discrete Fourier Transform)** ou la **TFR/FFT (transformée de Fourier Rapide / Fast Fourier Transform)**. La TFR/FFT est en fait un algorithme optimisé plus efficace pour le calcul de la TFD/DFT.

1. Transformée de Fourier Discrète (TFD)

Le principe de la TFD consiste, à partir de M échantillons du signal s_0, s_1, ..., s_k, ..., s_{M-1} de déterminer M échantillons de la TFD : S_0, S_1, ..., S_n, ..., S_{M-1}. Les M échantillons de la transformée représentent **une** période de cette tranformée, soit prise entre $\frac{-F_e}{2}$ et $\frac{F_e}{2}$ (c'est-à-dire entre $-\frac{1}{2.T_e}$ et $\frac{1}{2.T_e}$), soit entre 0 et F_e.

L'expression mathématique de la TFD est la suivante :

$$S(n.f_i) = \sum_{k=0}^{M-1} s(kT_e) e^{-j2pkT_e nf_i} \quad \text{ou} \quad S(\frac{n}{M}) = \sum_{k=0}^{M-1} s(kT_e) e^{-j2pk\frac{n}{M}}$$

où $s(kT_e)=s_k$ représente le $k^{ème}$ échantillon du signal temporel,

$S(nf_i)=S(n/M)=S_n$ le $n^{ème}$ échantillon de la TFD,

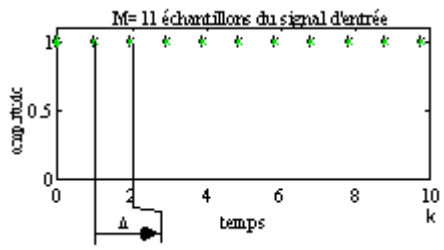
k est l'indice temporel,

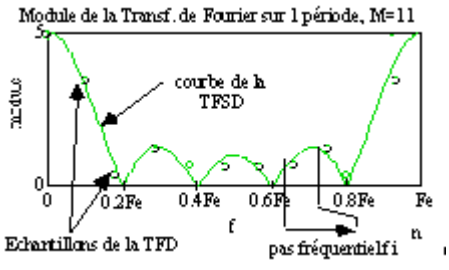
n est l'indice fréquentiel,

M est le nombre total d'échantillons du signal ainsi que celui de la TFD (typiquement 1024),

f_i est appelé le pas fréquentiel et représente la distance entre deux échantillons du spectre, cette valeur est donc telle que $f_i = \frac{F_e}{M}$.

Ex : pour M=11





Exercice :

Soit le signal échantillonné $\{s_k\}$: s_k= 1 pour k = 0 et k = 1.

s_k = 0 ailleurs.

Calculer la TFD d'ordre 4 de $\{s_k\}$ et représenter le module du spectre.

Solution :

1) Calcul de la TFD sur 4 échantillons (4 échantillons de la TFD à partir de 4 échantillons du signal)

$$S(n) = \sum_{k=0}^{M-1} s_k .e^{-j.2.p.k.n/M} \quad \text{pour n=0, 1 , ... , M-1 et M=4}$$

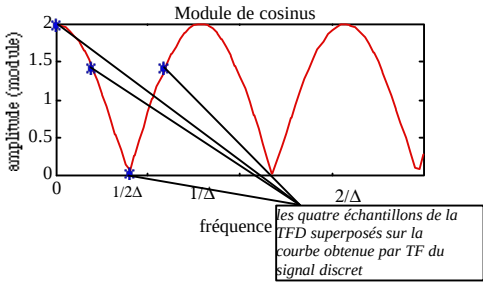
$$\begin{cases} n=0, \quad S(0)=\sum_{k=0}^{3} s(k)e^{0} = s(0)+s(1)+s(2)+s(3) = 2 \\ n=1, \quad S(1)=\sum_{k=0}^{3} s(k)e^{-j2\pi k/4} = s(0)+s(1)e^{-j2\pi/4}+s(2)e^{-j2\pi 2/4}+s(3)e^{-j2\pi 3/4} = 1+e^{-j\pi/2} = 2\cos(\pi/4)e^{-j\pi/4} \\ n=2, \quad S(2)=\sum_{k=0}^{3} s(k)e^{-j2\pi 2k/4} = 1+e^{-j\pi} = 2\cos(\pi/2)e^{-j\pi/2} \\ n=3, \quad S(3)=\sum_{k=0}^{3} s(k)e^{-j2\pi 3k/4} = 1+e^{-j\pi 3/2} = 2\cos(3\pi/4)e^{-j3\pi/4} \end{cases}$$

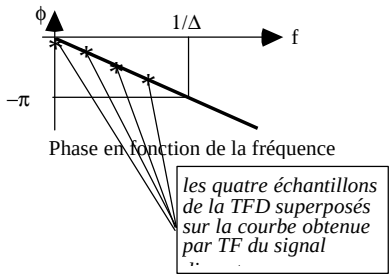
Modules de ces 4 échantillons :

$$\begin{cases} |S(0)| = |2| = 2 \\ |S(1)| = \left|2\cos(\pi/4)e^{-j\pi/4}\right| = 2\left|\cos(\pi/4)\right| = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \\ |S(2)| = \left|2\cos(\pi/2)e^{-j\pi/2}\right| = 2\left|\cos(\pi/2)\right| = 2.0 = 0 \\ |S(3)| = \left|2\cos(3\pi/4)e^{-j3\pi/4}\right| = 2\left|\cos(3.\pi/4)\right| = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \end{cases}$$

Arguments de ces 4 échantillons :

$$\begin{cases} \arg(S(0)) = \arg(2) = 0 \\ \arg(S(1)) = \arg(2)+\arg(\cos(\pi/4))+\arg\left(e^{-j\pi/4}\right) = 0+0-\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} \\ \arg(S(2)) = \arg(2)+\arg(\cos(\pi/2))+\arg\left(e^{-j\pi/2}\right) = 0+0-\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \\ \arg(S(3)) = \arg(2)+\arg(\cos(3\pi/4))+\arg\left(e^{-j3\pi/4}\right) = 0+0-\frac{3\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} \end{cases}$$





2. Transformée de Fourier discrète inverse (TFID)

$$s_k = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} S_n e^{j2pkT_e nf_i} = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} S_n e^{j2pk\frac{n}{M}}$$

TABLE DE TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRETE

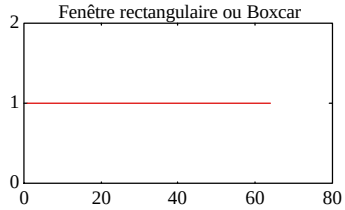
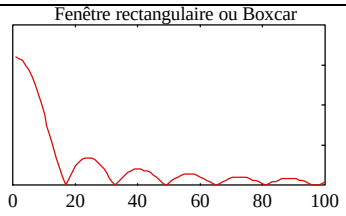
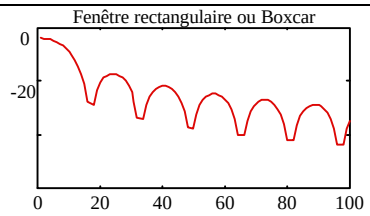
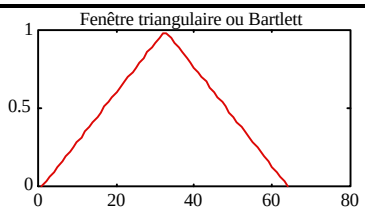
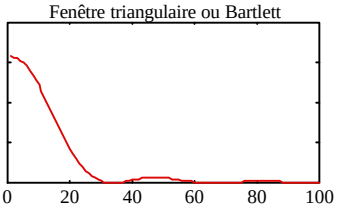
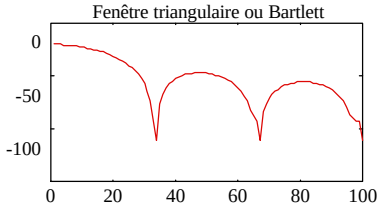
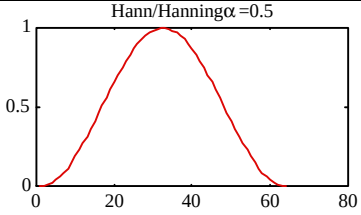
(T_e est la période d'échantillonnage)

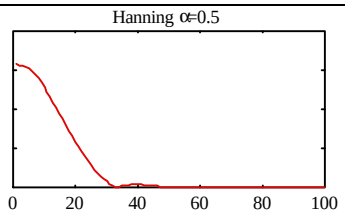
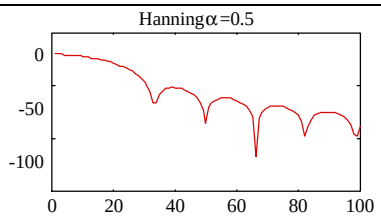
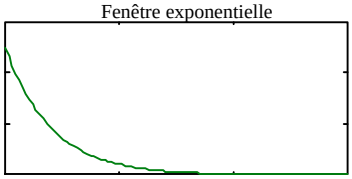
	$s(kT_e) = s_k$	$S_n = \sum_{k=0}^{M-1} s_k e^{-j2pkT_e nf_i}$

Propriétés ou théorèmes	domaine temporel	domaine fréquentiel
Linéarité	$\{x_k + y_k\}$ $\{A.s_k\}$ $\{0\}$	$X_n + Y_n$ $A.S_n$ 0
Théorème du retard	$\{ s_{k-k_{0\,\text{modulo M}}} \}$	$S_n.e^{-j.2p.k_0.n/M}$
	$\{ s_k.e^{j.2p.n_0.k/M} \}$	$S_{n-n_{0\,\text{modulo M}}}$

3. Problèmes de fenêtrage (apodisation)

Les fenêtres ci-dessous ont été calculées par MATLAB avec N = 64

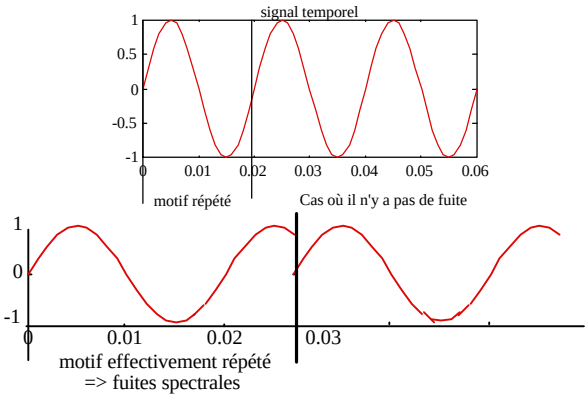
Ci-contre : domaine temporel		Cette fenêtre est définie par : $\begin{cases} f_n = 1 \text{ pour } 0 \le n \le N-1 \\ f_n = 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$ Son expression fréquentielle est : $W_R(e^{j.2.\pi.f}) = e^{-j.\pi(N-1).f}.\frac{\sin(\pi.N.f)}{\sin(\pi.f)}$
Ci-contre : domaine fréquentiel : à gauche, échelle linéaire à droite : ordonnées en dB		
Ci-contre : domaine temporel		Cette fenêtre est définie par : $\begin{cases} f_n = \frac{n}{N/2} \text{ pour } 0 \le n \le N/2 \\ f_{N-n} \text{ pour } N/2 \le n \le N-1 \end{cases}$ Son expression fréquentielle est : $W_T(e^{j.2.\pi.f}) = e^{-j.2.\pi(N/2-1)f}.\left(\frac{\sin(\pi.\frac{N}{2}.f)}{\sin(\pi.f)}\right)^2$
Ci-contre : domaine fréquentiel : à gauche, échelle linéaire à droite : ordonnées en dB		
Ci-contre : domaine temporel		La fenêtre de Hann (ou Hanning) est le cas particulier de la fenêtre de Hamming généralisée pour α = 0,5. Les fenêtres de la famille Hamming se caractérisent par un pic central de largeur double de la fenêtre rectangulaire mais une atténuation des oscillations sensiblement plus importante. La représentation fréquentielle de la fenêtre de Hamming généralisée a pour équation : $W_{Hg}(e^{j.2.\pi.f}) = \alpha.W_R + \frac{1-\alpha}{2}.[W_R(e^{j.2.\pi(f-1/N)}) + W_R(e^{j.2.\pi(f+1/N)})]$

Ci-contre : domaine fréquentiel : à gauche, échelle linéaire à droite : ordonnées en dB		
Ci-contre : domaine temporel	 La fenêtre à réponse exponentielle est utile pour la mesure des signaux transitoires (de type impulsion).	Le début du signal n'est pas perturbé, mais la fin de l'enregistrement temporel est forcée à zéro. **La fenêtre exponentielle ne convient que pour la mesure des signaux transitoires.** Cette fenêtre est définie par : $\begin{cases} f_n = B.e^{-at} \text{ pour } t \geq 0 \\ f_n = 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$ Son expression fréquentielle est : $W_E(e^{j2\pi.f}) = \frac{1}{j.2.\pi.f + a}$

Problème des fuites spectrales

Ce problème intervient lorsque la transformée de Fourier rapide n'est pas calculée sur un nombre entier de périodes. Le motif répété pour créer le signal périodique n'est dans ce cas pas celui attendu. En effet, dans ce cas, le spectre obtenu par FFT n'est pas une bonne approximation du spectre du signal. Étant donné que l'utilisateur n'a souvent aucun contrôle sur la localisation du signal dans l'enregistrement temporel, il faut généralement envisager l'existence possible d'une discontinuité. Cet effet, connu sous le nom de fuites (leakage) est manifeste dans le domaine fréquentiel. Cette discontinuité provoque, par effet de transitoire, un élargissement de la raie spectrale (qui devrait apparaître très fine). L'utilisation d'une fenêtre type Hanning ou Blackman aura pour effet, en filtrant fortement les extrémités du motif dans le domaine temporel, d'atténuer l'effet des fuites. Il pourra également être le cas échéant judicieux d'essayer, lorsque cela est possible, de synchroniser l'analyseur de spectre (module FFT) sur un nombre entier de périodes d'échantillonnage du signal périodique à analyser. D'autre part, la résolution de l'analyseur (plus petite fréquence entre deux raies) est égale à $1/T_e$.

Les courbes ci-dessous concernent une sinusoïde de f = 50 Hz et d'amplitude 1 échantillonnée à f_e = 1000 Hz.



4. Utilisation du serveur web

Dans le paragraphe 4 du serveur, vous trouverez :

- Une partie de cours en Anglais sur la transformée de Fourier rapide proposée par l'Université de Ulm,
- Une simulation (applet Java) permettant le calcul du spectre de signaux en utilisant la FFT.

Références bibliographiques

- Aspect mathématique :

Mathématiques pour l'électronique - J.C. Belloc & P. Schiller - Masson, Paris, 1994.

- Signaux et systèmes analogiques

Cours d'électronique analogique tome 1 - A. Deluzurieux & M. Rami - Eyrolles, Paris, 1990.

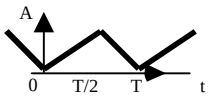
Cours d'électronique analogique tome 2 - A. Deluzurieux & M. Rami - Eyrolles, Paris, 1990.

- Signaux et systèmes discrets

Cours d'électronique numérique et échantillonnée - A. Deluzurieux & M. Rami - Eyrolles, Paris, 1991.

Signaux et systèmes linéaires - Y. Thomas - Masson, Paris, 1992.

TD 1 : SPECTRES DE SIGNAUX PERIODIQUES



Ex 1.1 : Calculer le spectre du signal périodique ci-contre en utilisant le développement en série de Fourier en exponentielles complexes. Pour simplifier les calculs, mettre en évidence la parité. Donner les spectres bilatéral et unilatéral.

Ex 1.2 : Application à la modulation d'amplitude

Soit à transmettre, à l'aide d'un signal porteur $v(t)=\cos(\omega_p t)$, un signal A(t). Le signal A(t) module l'amplitude du signal porteur v(t) qui est alors de la forme :

$s(t) = A(t)\cos(\omega_p t)$ où $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi}$ est la fréquence porteuse.

1 - Si l'on suppose le signal à transmettre A(t) périodique, de période $T_0 \neq \frac{2\pi}{\omega_p}$, celui-ci est alors développable en série de Fourier et peut s'écrire :

$$A(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega_0 t - \varphi_n), \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Tracer le spectre bilatéral en amplitude de A(t).

2 - Modulation

Écrire l'équation générale du signal modulé s(t) en faisant apparaître la pulsation porteuse (ou centrale) ω_p, les bandes latérales de modulation $\omega_p \pm n.\omega_0$. Tracer le spectre en amplitude du signal modulé s(t). On fera l'hypothèse $\omega_p >> \omega_0$.

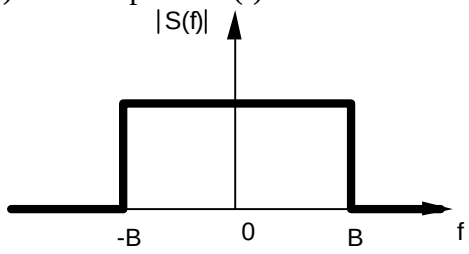
3 - Démodulation

Le système récepteur devra restituer le signal à transmettre original A(t) (signal modulant). Dans ce but, le signal reçu s(t) est dans un premier temps multiplié par le signal porteur original v(t). Donner l'expression du signal obtenu u(t)=s(t) v(t). Tracer le spectre en amplitude du signal u(t). En déduire le type de filtrage à appliquer au signal u(t) pour restituer le signal original A(t).

TD 2 : SPECTRES DE SIGNAUX NON PERIODIQUES

Ex 2.1 : Soit le signal $s(t) = 200\ t.e^{-10t}$ pour $t \geq 0$, $s(t)=0$ pour $t<0$. Calculer le spectre de ce signal.

Ex 2.2 : Déterminer le signal s(t) dont le spectre S(f) vaut 1 dans la bande [-B, +B] et 0 ailleurs.



Le signal obtenu est-il causal ?

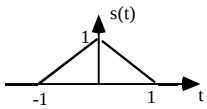
Ex 2.3 : Déterminer les spectres de ces deux signaux

a) $\cos(2.\pi.f_0.t)$

b) $\sin(2.\pi.f_0.t)$

TD 3 : SPECTRES DE SIGNAUX NON PERIODIQUES / CONVOLUTION PAR DIRAC

Ex 3.1 : Déterminer le spectre du signal triangulaire ci-dessous :



Ex 3.2 : Convolution par une impulsion de Dirac

Soit le signal s(t) représenté figure a, son spectre S(f) obtenu par transformée de Fourier est représenté en figure b.

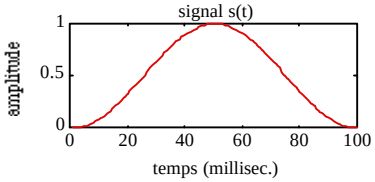


figure a

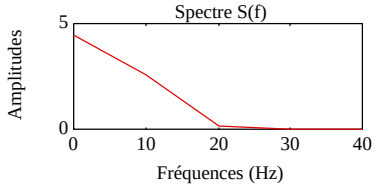


figure b

a) Donner le résultat obtenu graphiquement après la convolution du spectre du signal S(f) (en module) par une impulsion $\delta(f-f_0)$.

b) Quelle opération cela revient-il à faire dans le domaine temporel ?

(extrait de l'examen de 96-97)

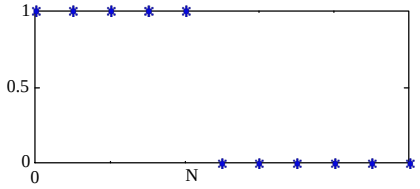
TD 4 : SPECTRES DE SIGNAUX DISCRETS

Ex 4.1 : Représenter les signaux ci-dessous et calculer leurs spectres:

1) $\{\delta_k\}$.

2) $\{\delta_{k-k0}\}$.

3) Soit un signal discret de N+1 échantillons valant 1 entre 0 et N.



3.a - Calculer le spectre $S(\omega)$ (ou $S(f)$) du signal discret ainsi observé.

3.b - Préciser le module de $S(\omega)$ (ou $S(f)$).

3.c - Tracer le spectre en amplitude du signal discret.

Extrait du devoir de 96-97

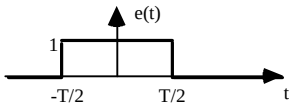
Ex 4.2 : Soit le signal $\{s_k\}$: $s_k = 1$ pour $k = 0$ et $k = 3$.

$s_k = 0$ ailleurs.

Calculer le spectre de $\{s_k\}$ et figurer le module du spectre.

Définir le domaine utile du spectre, c'est-à-dire la zone de fréquence respectant la condition d'échantillonnage de Shannon-Nyquist.

Ex 4.3 : Soit le signal e(t) suivant :



1) Déterminez le spectre du signal e(t).

2) Représentez graphiquement celui-ci.

3) On échantillonne e(t) pour obtenir $\{e(kT_e)\}$. On supposera que la fréquence d'échantillonnage est suffisamment élevée. Tracez l'allure de la représentation spectrale de $\{e(kT_e)\}$.

Extrait du devoir de 93-94

TD 5 : SPECTRES OBTENUS PAR CALCULATEUR

Ex 5.1 : Convolution par deux Diracs.

1) Soit le signal $x(t) = \delta(t - t_1) + 2.\delta(t - t_2)$, représenter x(t).

2) Trouver X(f) en posant $t_1 = k_1.T_e$ et $t_2 = k_2.T_e$.

3) Soit un signal s(t) quelconque : donner le résultat obtenu graphiquement de la convolution s(t)*x(t).

Ex 5.2 : (Suite de l'exercice 4.2) Soit le signal $\{s_k\}$: $s_k = 1$ pour k = 0 et k = 3.
$s_k = 0$ ailleurs.

Calculer la TFD d'ordre 4 de $\{s_k\}$. Comparer avec le spectre calculé dans l'exercice 4.2.

Ex 5.3 : **Raisonnement graphique**

Soit le signal s(t) représenté figure a, son spectre S(f) obtenu par transformée de Fourier est représenté en figure b.

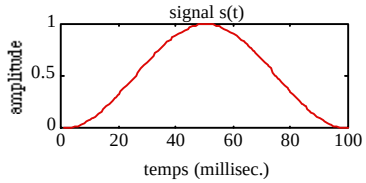


figure a

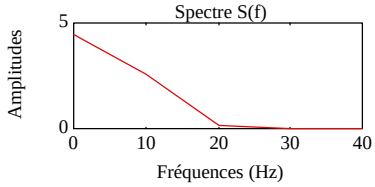


figure b

1 - On désire échantillonner ce signal afin de le transporter sur un réseau :

1a) On se propose d'échantillonner ce signal avec une fréquence d'échantillonnage F_e = 20 Hz, ce choix est-il judicieux ? Pourquoi ?

1b) On se propose d'échantillonner ce signal avec une fréquence d'échantillonnage F_e = 40 Hz, ce choix est-il judicieux ? Pourquoi ?

1c) Parmi les deux solutions étudiées précédemment, choisir la fréquence d'échantillonnage la plus appropriée. Dans ce cas, représenter le signal s*(t) obtenu par échantillonnage de s(t) ainsi que son spectre S*(f) (en module).

2 - On désire calculer le spectre du signal discret par TFD (ou FFT).

Donner le résultat obtenu graphiquement si :

2a) la TFD est calculée sur 8 points,

2b) la TFD est calculée sur 16 points.

3

3.a) Donner le résultat obtenu graphiquement après la convolution du spectre du signal S(f) (en module) par une impulsion $\delta(f-f_0)$.

3.b) Quelle opération cela revient-il à faire dans le domaine temporel ?

4 - On désire connaître le spectre d'un signal périodique dont la représentation temporelle est la suivante (figure c) :

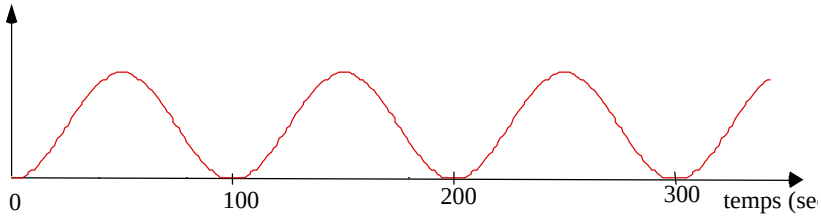


figure c

Il s'agit en fait d'un signal périodique dont le "motif" répété est le signal s(t) décrit figure a. Donner la représentation spectrale approximative de ce signal et justifier.

(extrait de l'examen de 96-97)