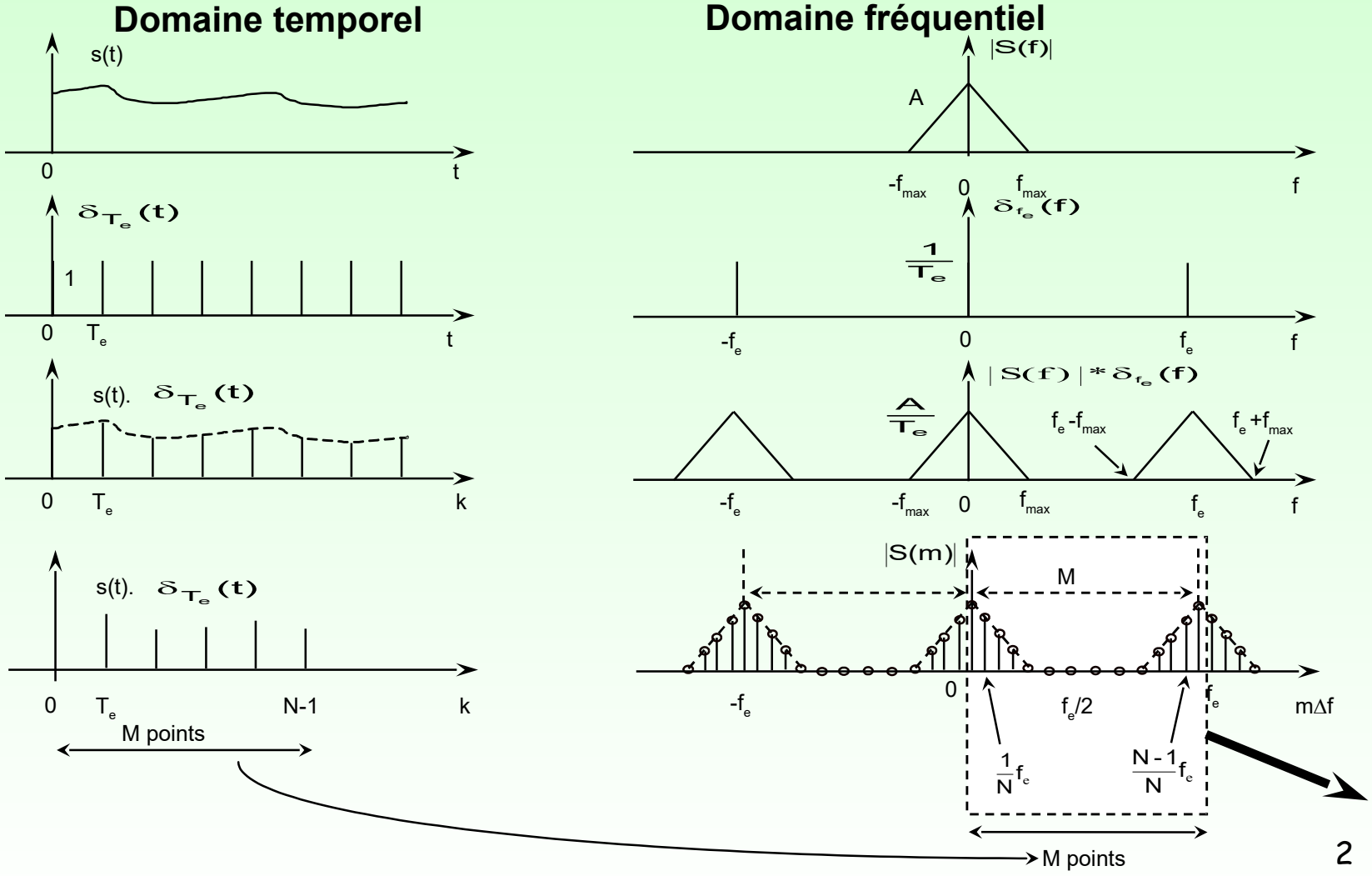
Transformée de Fourier Discrète

(TFD)

Partie utile du spectre d'un signal discret

Le spectre d'un signal échantillonné correspond au spectre du signal continu périodisé tous les f_e



Introduction

Nous venons de voir que la **TFTD** est définie par :

$$S(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) e^{-j2\pi f\, kT_e}$$

S(f) est une ***fonction continue de la variable f*** et ***périodique de période*** f_e

Le calcul numérique de S(f) présente **deux difficultés** :

- f varie continûment,
- le nombre de valeur $s(kT_e)$ est infini.

Les **solutions** sont les suivantes :

- S(f) peut être calculé pour des valeurs échantillonnées de f
- le signal $s(kT_e)$ est supposé à durée limitée (tjs le cas en pratique)

Définitions

- Signaux mesurés lors d'une acquisition : limités dans le temps.

  $T_M = MT_e$: durée d'acquisition

  M : nombre de points de $s_k=s(kT_e)$ avec k=0, 1, ..., M-1.

- La tftd du signal ainsi observé (sur M points) s'écrit :

$$S(f) = \sum_{k=0}^{M-1} s(kT_e) e^{-j2\pi f\, kT_e}$$

- ***Pb*** : S(f) : fonctio[illegible]rs de f.

  Calcul numérique de S(f) discrétisation de la variable f.

  division de l'intervalle [0, f_e] en M intervalles.

  Le pas de calcul fréquentiel est donc égal :

- On obtient M échan[illegible]cés sur [0, f_e]

$$\Delta f = f_i = \frac{f_e}{M} = \frac{1}{MT_e} = \frac{1}{T_M}$$

Définitions

- ***Transformée de Fourier Discrète (TFD)*** :

TFTD (M points) :

$$S(f) = \sum_{k=0}^{M-1} s(kT_e) e^{-j2\pi f\, kT_e} \text{ et } f = \frac{m}{M} f_e$$

TFD :

$$S_n = S(nf_i) = S\left(\frac{n}{M} f_e\right) = S\left(\frac{n}{MT_e}\right) = \sum_{k=0}^{M-1} s(kT_e) e^{-j2\pi \frac{kn}{M}}$$

Avec :

k : indice temporel k=0, 1, ...,M-1

n : indice fréquentiel n=0, 1, ..., M-1

M : nombre de points du signal temporel et de composantes fréquentielles

$s(kT_e)=s_k$: k-ième échantillon temporel du signal

$S_n= S(nf_i)$: n-ième composante spectrale du signal

T_e : période d'échantillonnage temporelle (intervalle entre 2 échantillons du signal)

f_i : résolution fréquentielle (intervalle entre 2 raies du spectre calculé) : $f_i = \frac{f_e}{M}$

Remarques

- Abus d'écriture à utiliser la notation S_n à la place de $S(nf_i)$ mais notation utilisée pour des raisons pratiques.

- La TFD calculée pour M composantes spectrales est appelée ***TFD à M points*** ou ***TFD d'ordre M***.

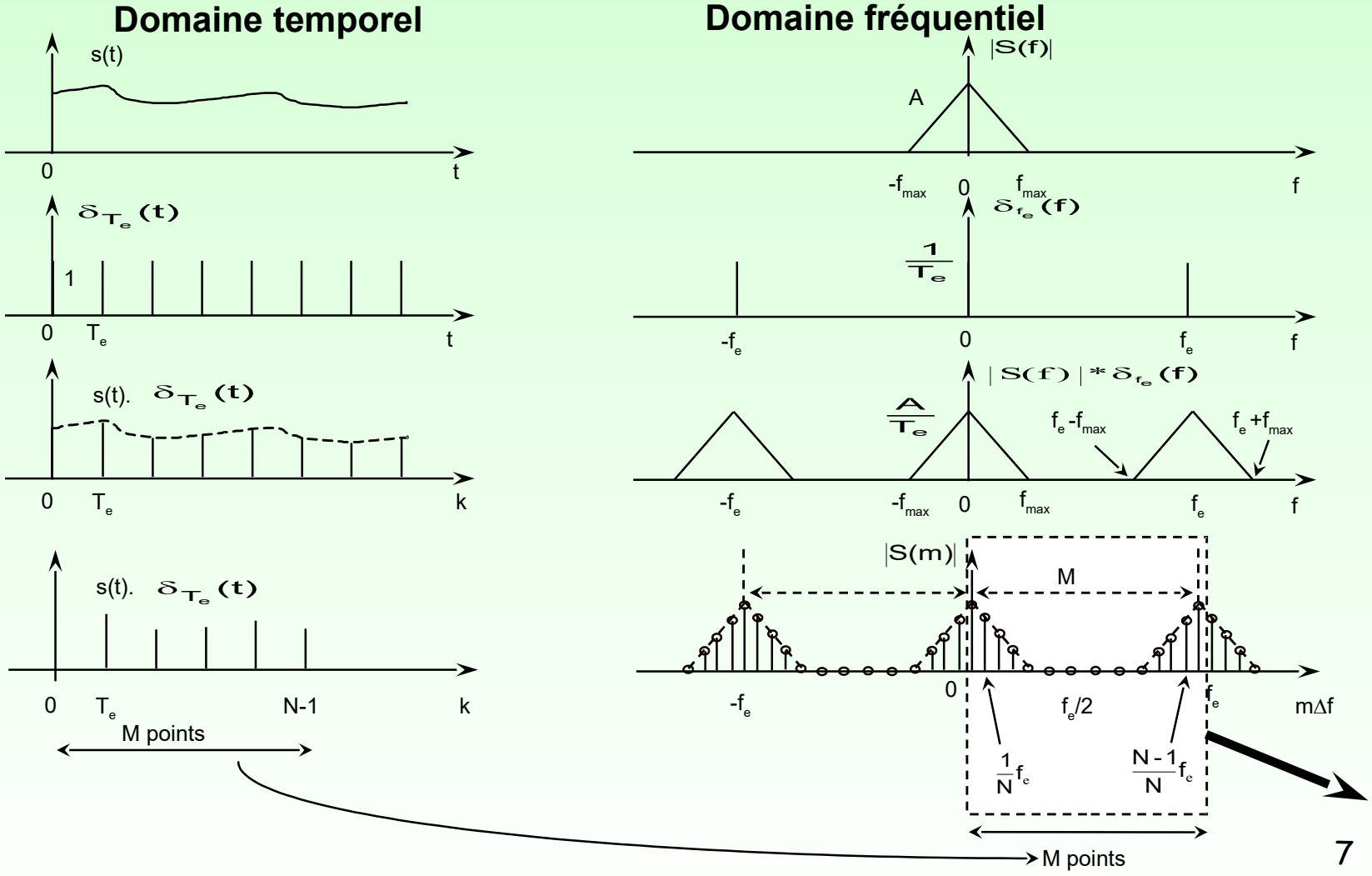
- Il existe un algorithme de calcul de S_n qui utilise de façon très ingénieuse les propriétés de l'exponentielle si M est une puissance de 2. Cette TFD s'appelle alors ***Transformée de Fourier Rapide*** (**TFR** ou **FFT** en anglais). Ex : pour M=1024, FFT environ 100 fois plus rapide que TFD simple.

- Transformée de Fourier Discrète Inverse (TFDI) :

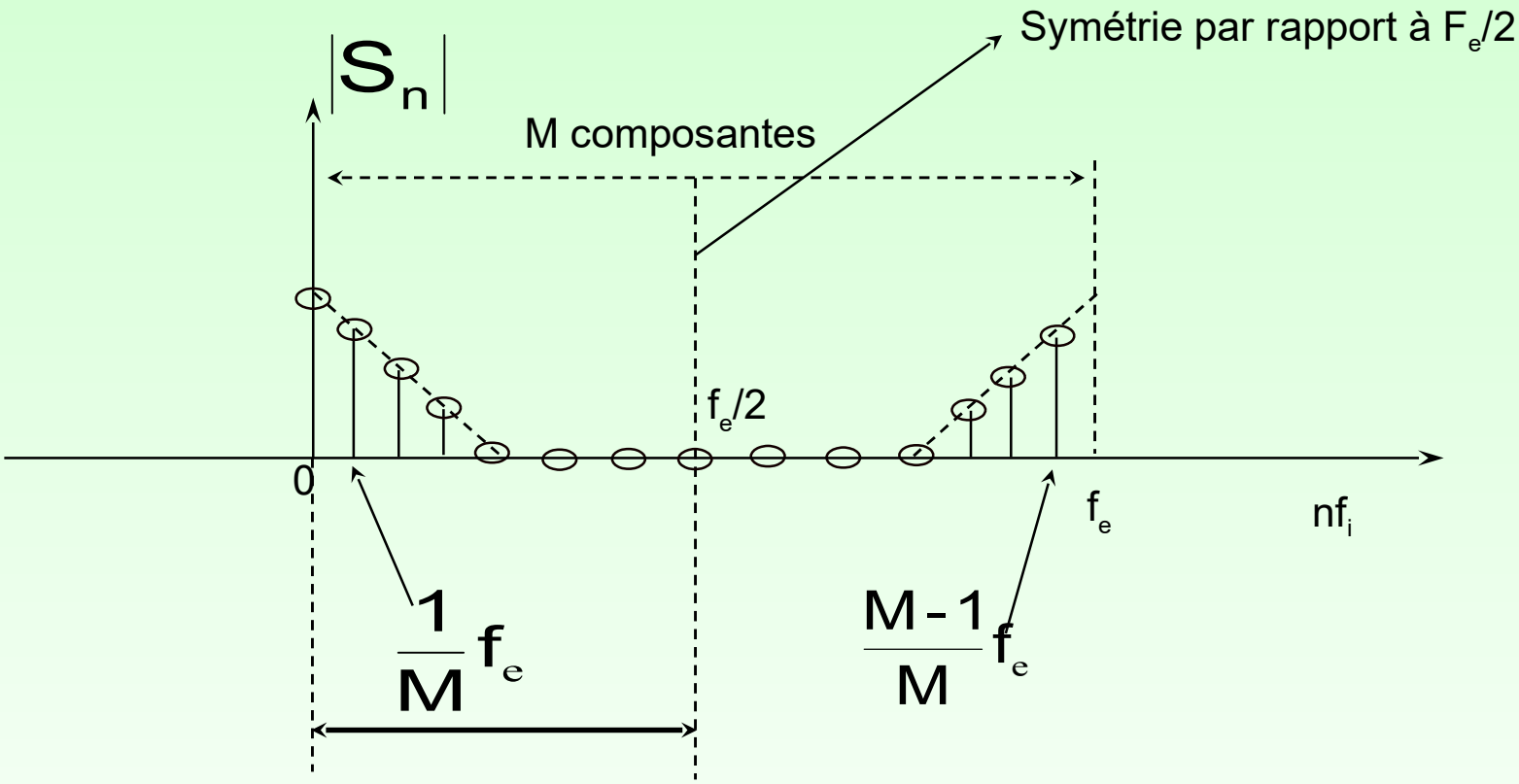
$$s(kT_e) = s_k = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} S(nf_i) e^{j2\pi \frac{kn}{M}}$$

Partie utile du spectre d'un signal discret

Le spectre d'un signal échantillonné correspond au spectre du signal continu périodisé tous les f_e



Partie utile d'un spectre obtenu par TFD



Partie utile

$[0 ; f_e/2]$

Exemple (1/2)

Soit un signal x_k défini par :

$$x_k = \begin{cases} 1 \text{ pour } k = 0,1 \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Calculer la TFD à 2, 4 et 8 points. Représenter le spectre en amplitude et en phase. Comparer avec les spectres obtenus par tftd.

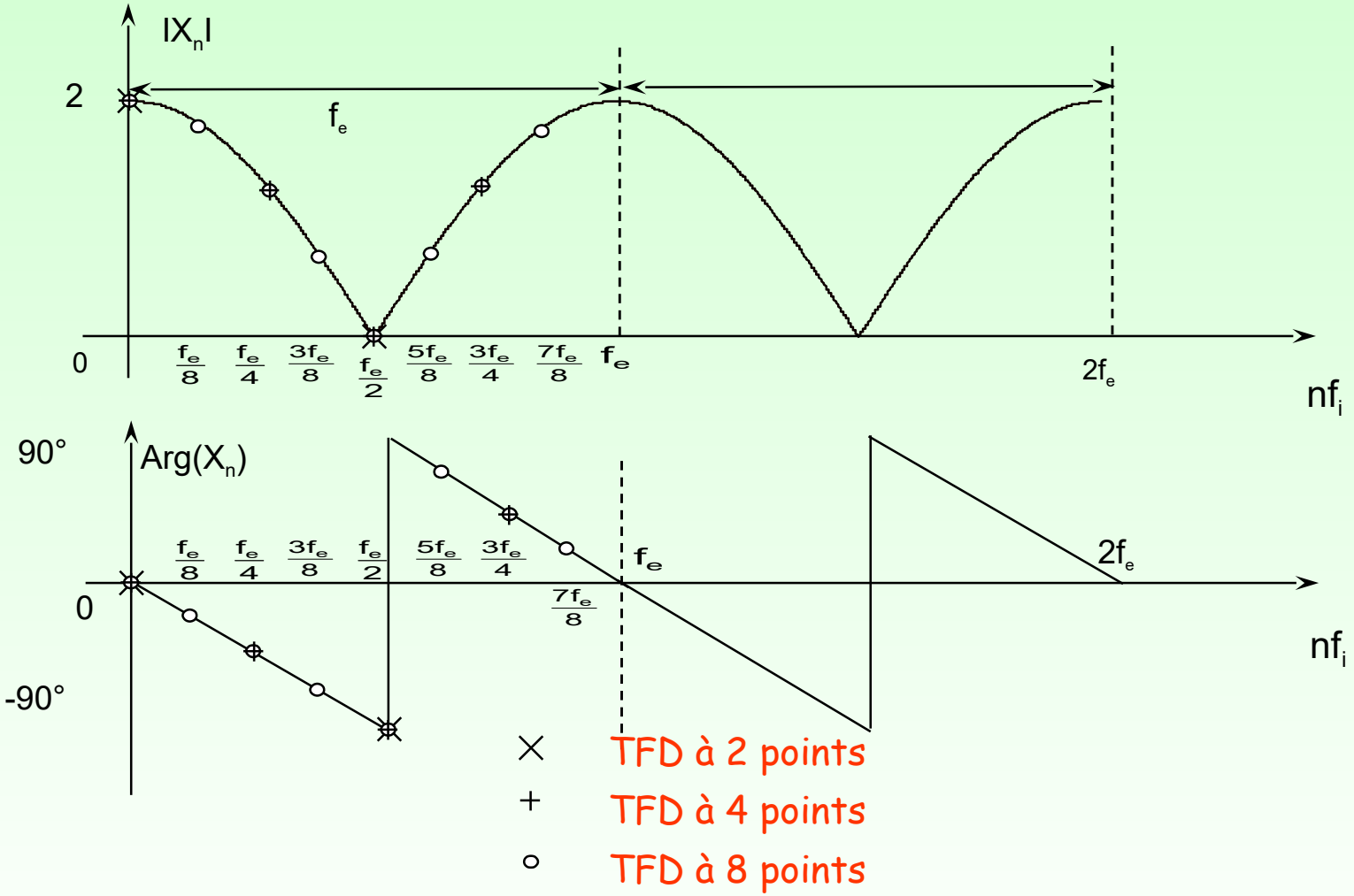
Rappels : par TFTD

$$X(f) = 2\cos(\pi f T_e)\, e^{-j\pi f T_e}$$

$$|X(f)| = 2\,|\cos(\pi f T_e)|$$

$$\mathrm{Arg}(X(f)) = -\pi f T_e \quad (\pi)$$

Exemple (2/2)


IXnI
2
fe
0
fe/8
fe/4
3fe/8
fe/2
5fe/8
3fe/4
7fe/8
fe
2fe
nfi
90°
Arg(Xn)
-90°
0
fe/8
fe/4
3fe/8
fe/2
5fe/8
3fe/4
7fe/8
fe
2fe
nfi
TFD à 2 points
TFD à 4 points
TFD à 8 points

Choix de N - Fenêtrage

Quand on utilise la TFD, il faut choisir M : le nombre d'échantillons du signal.

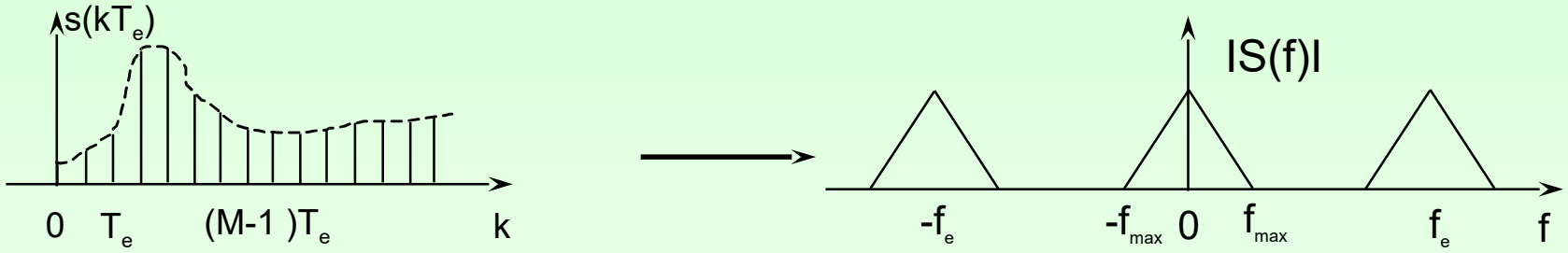
Questions :

- *Comment choisir M pour obtenir de bons résultats ?*
- *Dans le cas de **signaux périodiques**, doit-on prendre 1 période du signal, un nombre entier de périodes ?*
- *Dans le cas de **signaux à durée finie**, doit-on choisir M égal au nombre d'échantillons non nuls ?*
- *Peut-on appliquer* la TFD à des signaux ***non périodiques et de durée infinie*** *?*

Rôle du fenêtrage (1/3)

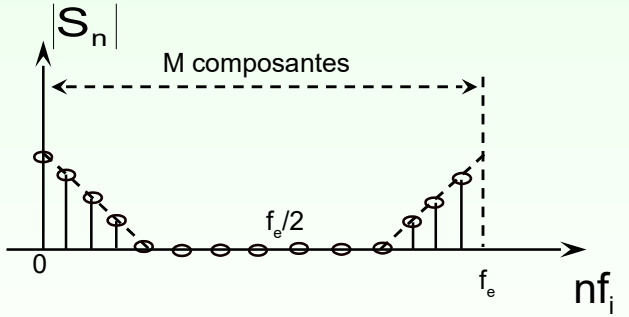
Domaine temporel **Domaine fréquentiel**

signal *échantillonné* (raies temporelles) ⟶ spectre *périodique* continu



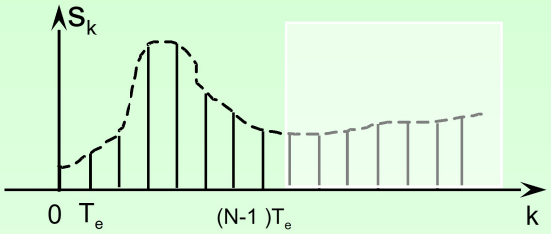
signal périodique ⟵ spectre *échantillonné* (obtenu par TFD)

?

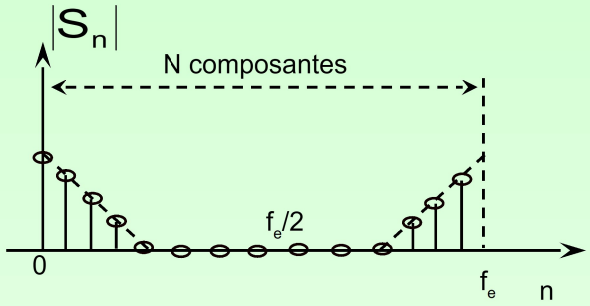


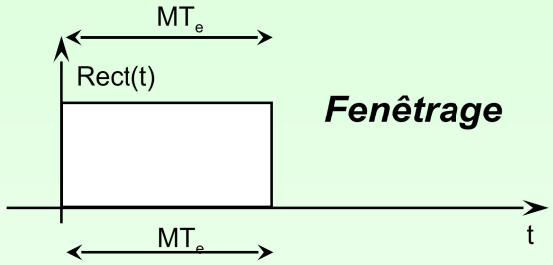
Rôle du fenêtrage (2/3)

Domaine temporel



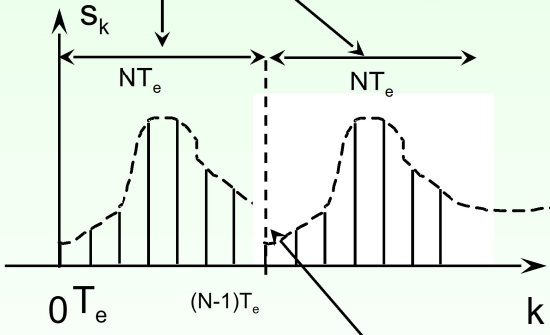
Domaine fréquentiel

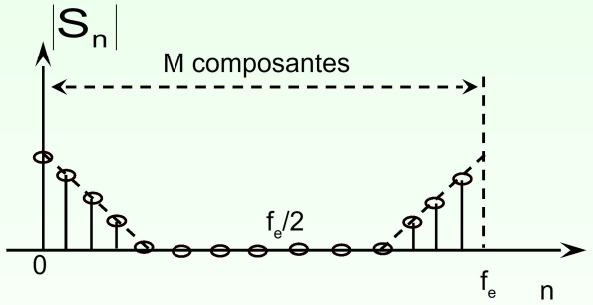




Fenêtrage

Juxtaposition de morceaux de signal de durée MT_e





discontinuité => fuites spectrales

Rôle du fenêtrage (3/3)

Signal échantillonné ⟶ spectre périodique

Spectre échantillonné ⟶ signal périodique

Signal réellement analysé : constitué de la juxtaposition de morceaux de signal de durée MT_e.

On a ainsi enregistré une période du signal, la mise bout à bout reconstitue le signal sur l'infini. Si le signal n'était pas périodique ou que la durée d'observation ne correspond pas à un multiple entier de périodes, il y aura des ***discontinuités*** à chaque raccordement. Ces discontinuités en début et fin d'enregistrement sont sources de ***fuites spectrales***.

Pour éviter cela, il faut ***diminuer l'influence des extrémités*** de l'enregistrement. C'est le rôle des fenêtres.

Dans le cas où on conserve les échantillons du signal sur une durée MT_e, cela revient à mutiplier le signal par une ***fenêtre rectangulaire***.

Il existe d'autres fenêtres de profil varié (***triangulaire, Hanning, Hamming, Blackman, Kaiser***, ...) qui permettent de ***réduire l'effet des fuites spectres.***

Caractéristiques des principales fenêtres

Fenêtre rectangulaire

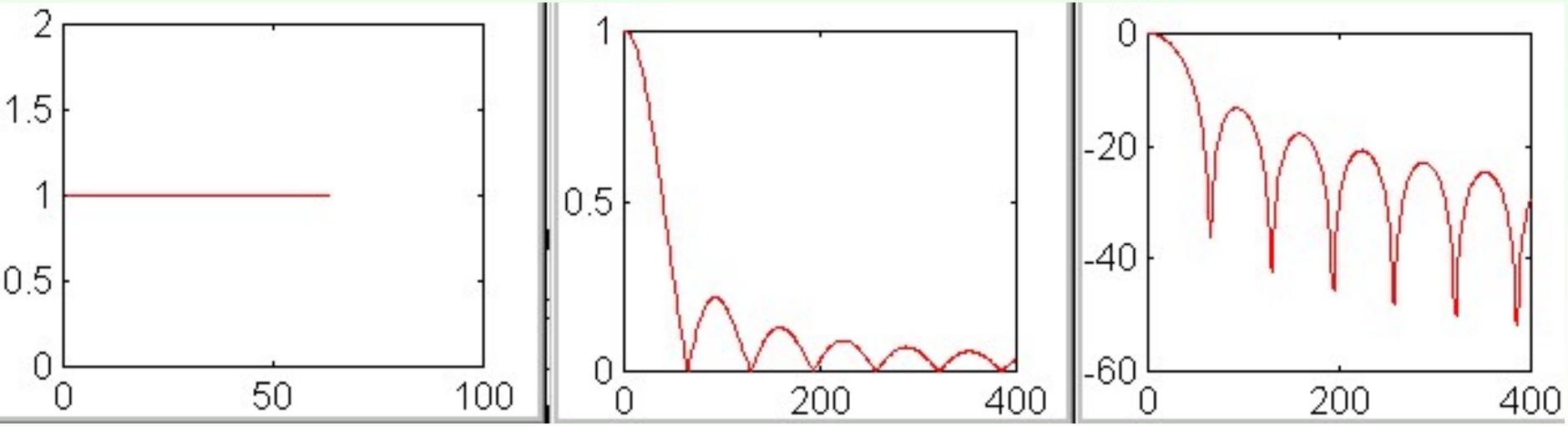
Cette fenêtre est définie par :

$$\begin{cases} f_n = 1 \quad pour \quad 0 \le n \le N-1 \\ f_n = 0 \quad ailleurs \end{cases}$$

On peut également considérer cette fenêtre comme étant le cas particulier de la fenêtre de Hamming généralisée pour $\alpha = 1$ (cf. fenêtre de Hamming).

Son expression fréquentielle est :

$$W_R\left(e^{j.2.\pi.f}\right) = e^{-j.\pi.(N-1).f} \cdot \frac{\sin(\pi.N.f)}{\sin(\pi.f)}$$



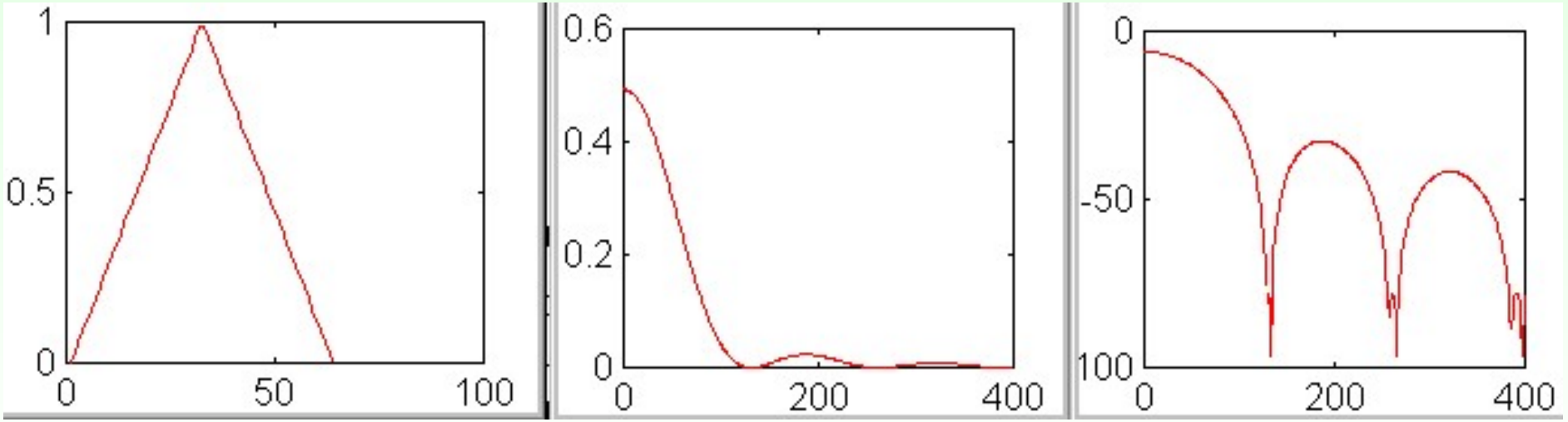
Fenêtre triangulaire ou de Bartlett

Cette fenêtre est définie par :

$$\begin{cases} f_n = \dfrac{n}{N/2} & pour \quad 0 \le n \le N/2 \\ f_{N-n} & pour \quad N/2 \le n \le N-1 \end{cases}$$

Son expression fréquentielle est :

$$W_T\left(e^{j.2.\pi.f}\right) = e^{-j.2.\pi.(N/2-1).f} \cdot \left(\frac{\sin\left(\pi . \frac{N}{2} . f\right)}{\sin(\pi . f)} \right)^2$$



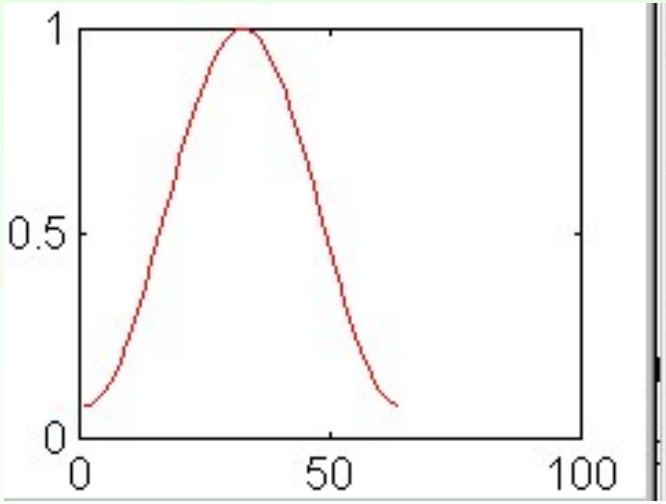
Fenêtre de Hamming

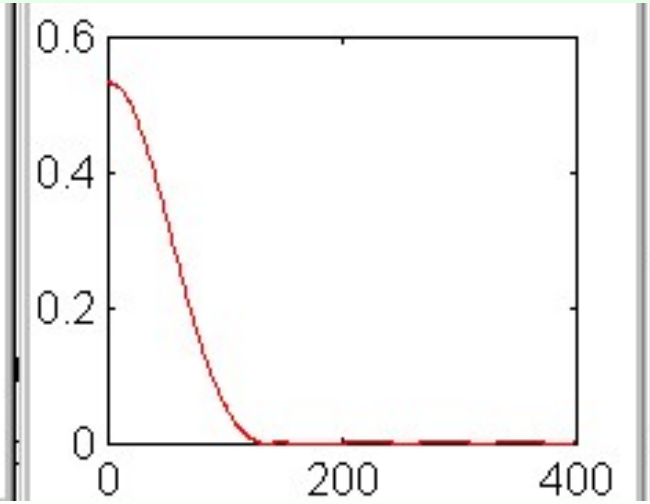
La fenêtre de Hamming généralisée a pour équation :

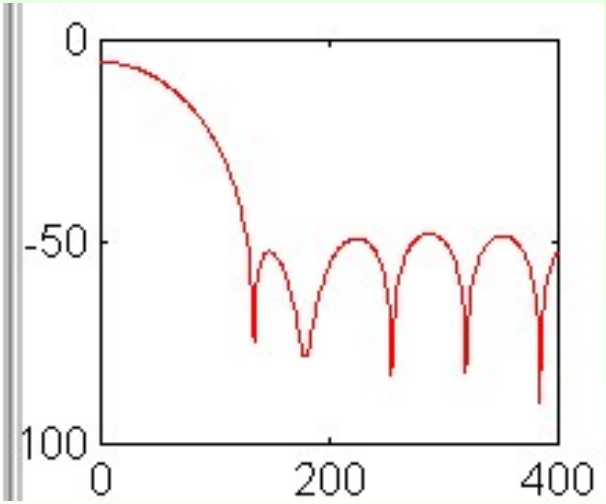
$$\begin{cases} f_n = \alpha + (1-\alpha).\cos\left(\dfrac{2.\pi.n}{N}\right) & pour \quad 0 \le n \le N-1 \\ f_n = 0 & ailleurs \end{cases}$$

La fenêtre de Hamming proprement dite est le cas particulier de la fenêtre généralisée pour $\alpha = 0{,}54$. Les fenêtres de la famille Hamming se caractérisent par un pic central de largeur double de la fenêtre rectangulaire mais une atténuation des oscillations sensiblement plus importante. La représentation fréquentielle de la fenêtre de Hamming généralisée a pour équation :

$$W_{Hg}\left(e^{j.2.\pi.f}\right) = \alpha.W_R + \frac{1-\alpha}{2}.\left[W_R\left(e^{j.2.\pi.(f-1/N)}\right) + W_R\left(e^{j.2.\pi.(f+1/N)}\right)\right]$$



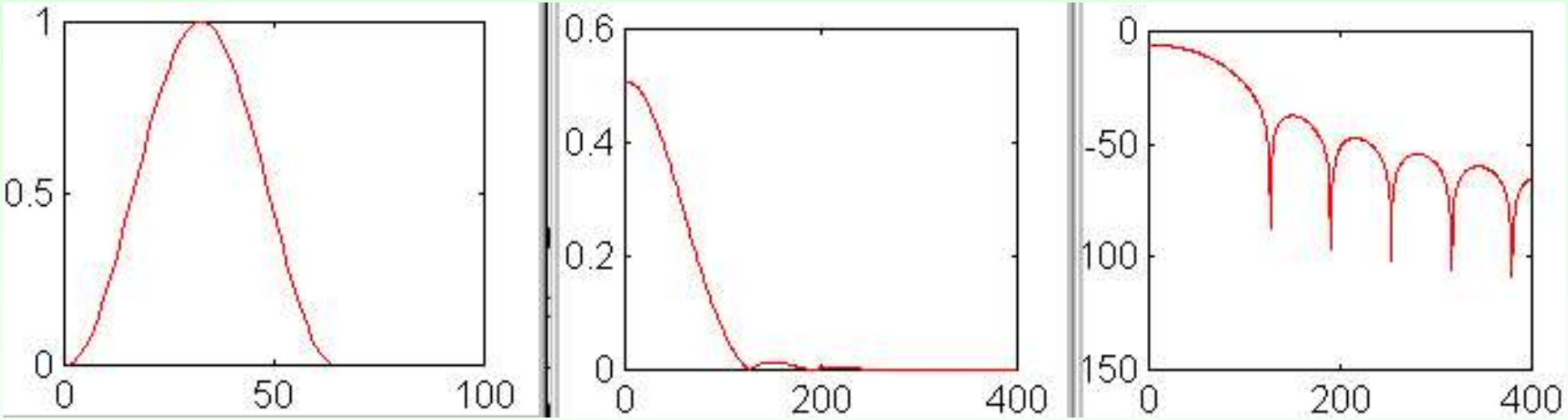




Fenêtre de Hann

La fenêtre de Hann (ou Hanning) est le cas particulier de la fenêtre

de Hamming généralisée pour $\alpha = 0,5$



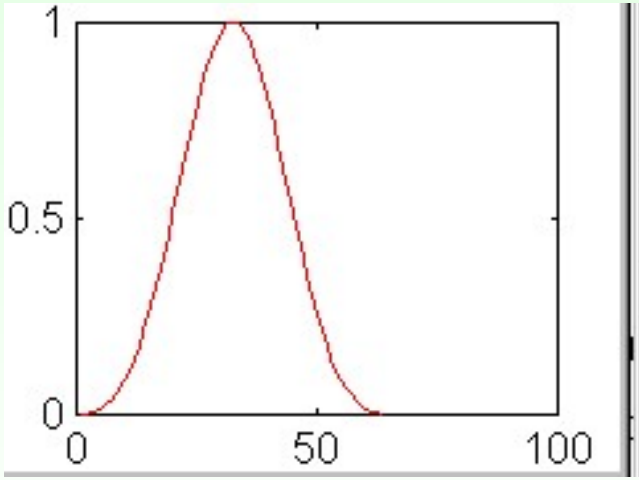
Fenêtre de Blackman

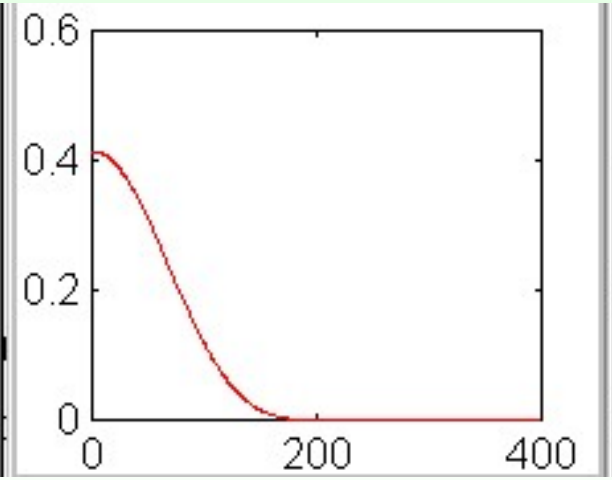
Cette fenêtre est une extension de l'idée de Hamming. Le premier lobe est plus large mais l'atténuation est encore plus élevée. Elle est définie par :

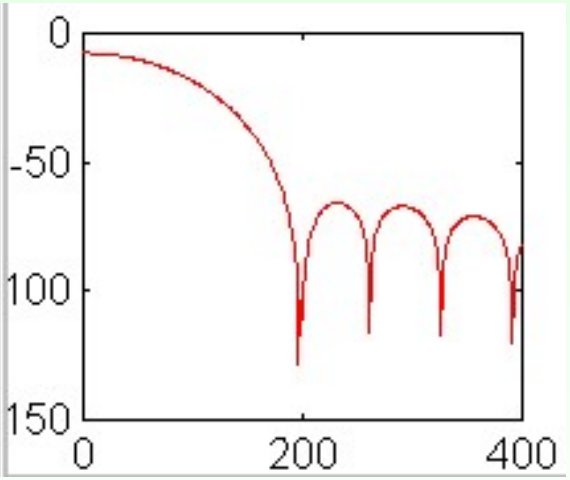
$$\begin{cases} f_n = \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m . a_m . \cos\left(\frac{2.\pi.n.m}{N}\right) & pour \quad 0 \le n \le N-1 \\ f_n = 0 & ailleurs \end{cases}$$

avec la contrainte : $\sum_{m=0}^{M-1} a_m = 1$. Son expression fréquentielle est :

$$W_B(e^{j.2.\pi.f}) = \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m . \frac{a_m}{2} . \left[W_R(e^{j.2.\pi.(f-m/N)}) + W_R(e^{j.2.\pi.(f+m/N)}) \right]$$







Fenêtre de Kaiser (avec $\beta = 5$)

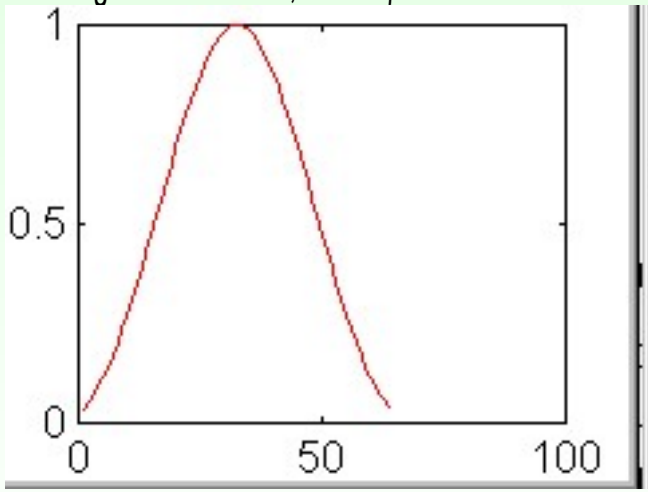
La fenêtre de Kaiser permet de préciser le compromis largeur du pic central/amplitude des oscillations. Elle est définie par :

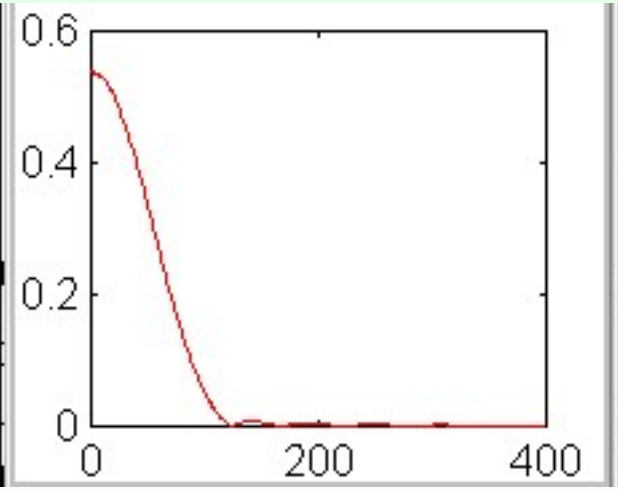
$$\begin{cases} f_n = \dfrac{I_0\left[\beta . \sqrt{N^2 - 4.n^2}\right]}{I_0(\beta N)} & \text{pour} \quad 0 \le n \le N-1 \\ f_n = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

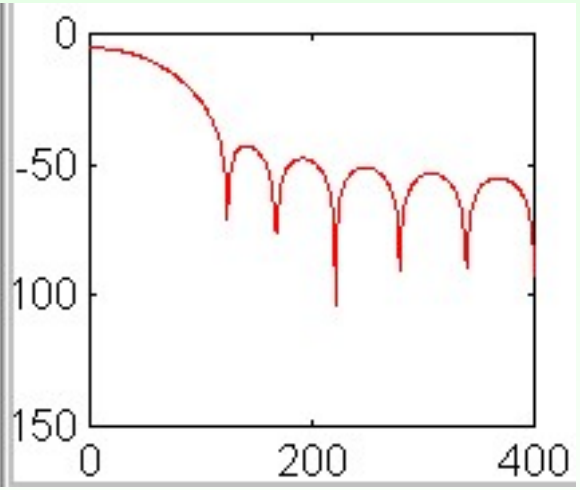
où I_0 est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0 :

$$I_0(x) = 1 + \sum_{m=1}^{M} \left(\frac{(x/2)^m}{m!} \right)^2 .$$

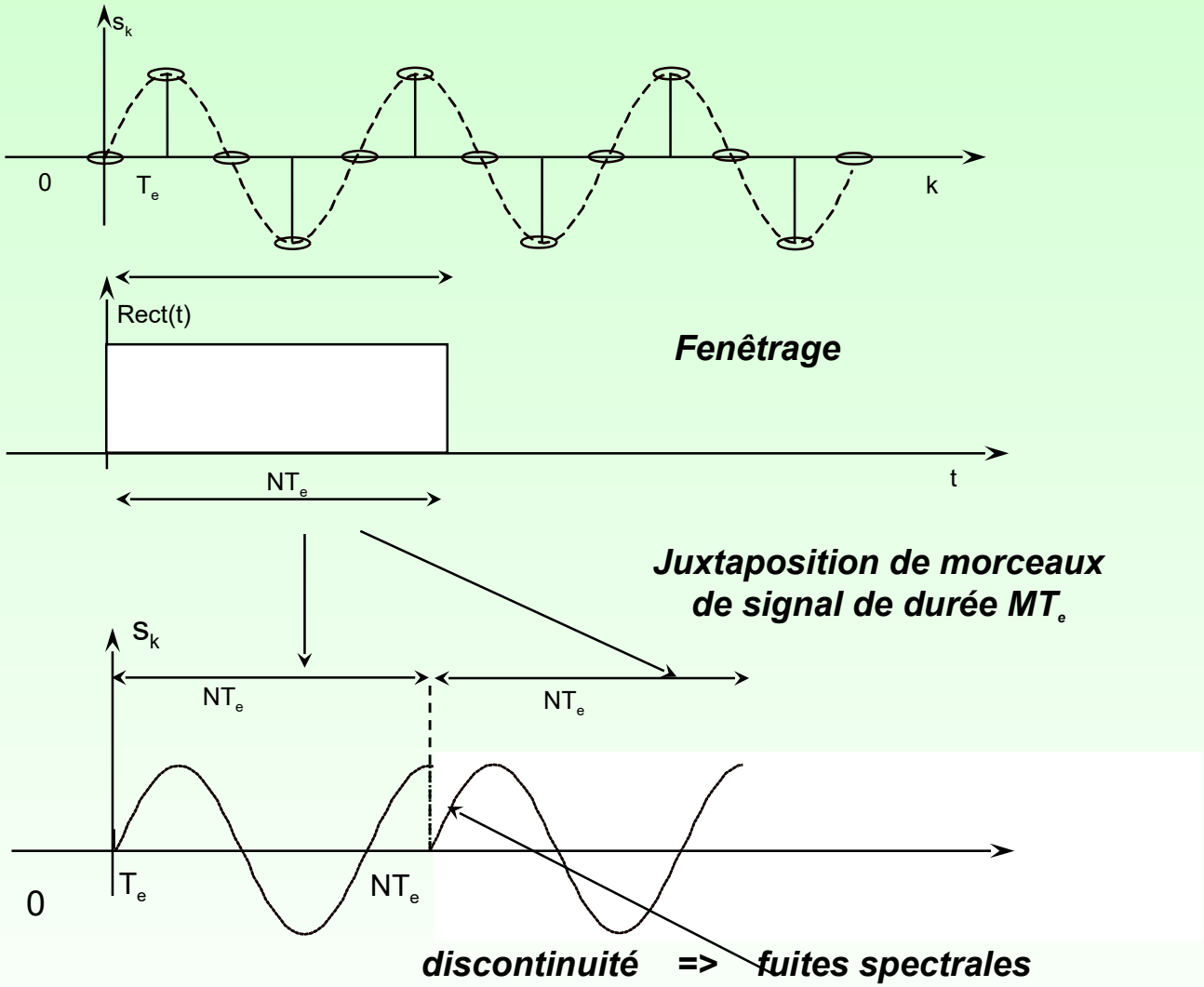
En général, $4 \le \beta \le 9$ et $M = 14$.







Cas d'un signal périodique



Choix de M dans le cas d'un signal périodique

Pour éviter les fuites spectrales :

Choix :

M = multiple entier de la période du signal

sinon apparition de raies parasites

Pb :

M puissance de 2 pour utiliser la FFT

utilisation d'une fenêtre réduisant l'effet les discontinuités

Choix de M dans le cas d'un signal à durée finie

Soit un signal à durée finie tel que

$s_k=0$ pour $k<0$ et pour $k>3$

Ce signal possède 4 échantillons non nuls !

Comment choisir M si on veut un spectre correct par TFD ?

M doit être > 3 puisqu'autrement on perd de l'information sur le signal.

Mais quelle valeur exacte donner à M ?

En fait on peut obtenir toute l'information spectrale avec M=4.

Pour M>4, ***amélioration de la résolution fréquentielle*** uniquement.

On parle alors de ***zero padding*** (complément avec des zéros) qui permet de calculer davantage d'échantillons de la TFTD.

Remarque : revoir exemple traité précédemment

Choix de M dans le cas d'un signal à durée infinie

On ne peut dans ce cas obtenir ***un spectre exact qu'en appliquant la TFTD*** puisque la TFD prend en compte un nombre fini d'échantillons du signal.

En choisissant M assez grand, on peut cependant obtenir un ***spectre assez bien approximé***.