Transformée de Fourier d'un signal à temps discret (TFTD)

Définitions

- La ***TFTD*** d'un signal à temps discret s(k) est définie par :

$$S(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) e^{-j2\pi f\, kT_e} \qquad S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) e^{-j\omega\, kT_e}$$

S(f) est une fonction ***continue de la variable f*** et ***périodique de période*** f_e

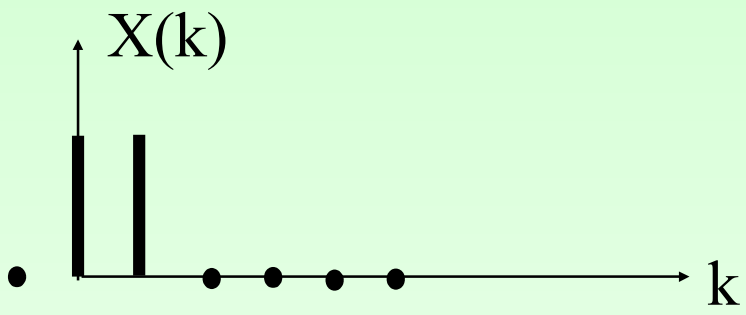
- La ***TFITD*** est définie par :

$$s(kT_e) = \int_{-f_e/2}^{f_e/2} S(f) e^{j2\pi f kT_e} df \qquad s(kT_e) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_e/2}^{\omega_e/2} S(\omega) e^{j\omega kT_e} d\omega$$

Exemple

Soit un signal x(k) défini par :

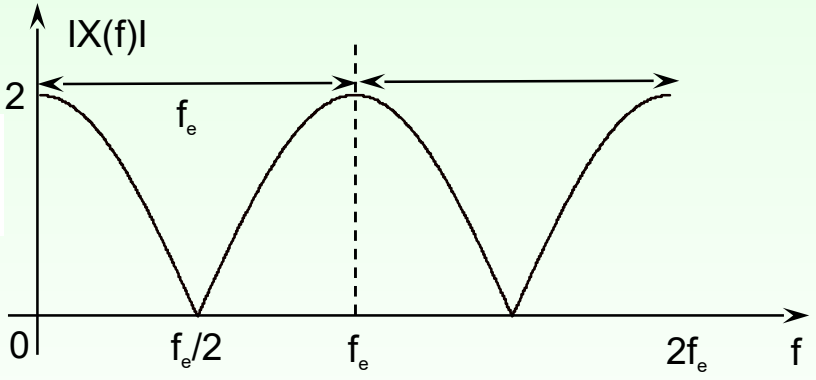
$$x(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = 0,\ 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Calculer la TFTD de x(k) et représenter le spectre en amplitude et en phase

$$X(f) = 2\cos(\pi f T_e)\, e^{-j\pi f T_e}$$

$$|X(f)| = 2\,|\cos(\pi f T_e)|$$



Argument de X(f)

Rappel → $X(f) = 2\cos(\pi f T_e)\, e^{-j\pi f T_e}$

$$\arg(X(f)) = \arg(2) + \arg(\cos(\pi f T_e)) + \arg(e^{-j\pi f T_e})$$

$\arg(2) = 0$

$\arg(\cos(\pi f T_e)) = 0 \;\; si \;\; \cos(\pi f T_e) \geq 0$

$donc \;\; si \;\; \frac{-F_e}{2} < f < \frac{F_e}{2}$ modulo $2F_e$

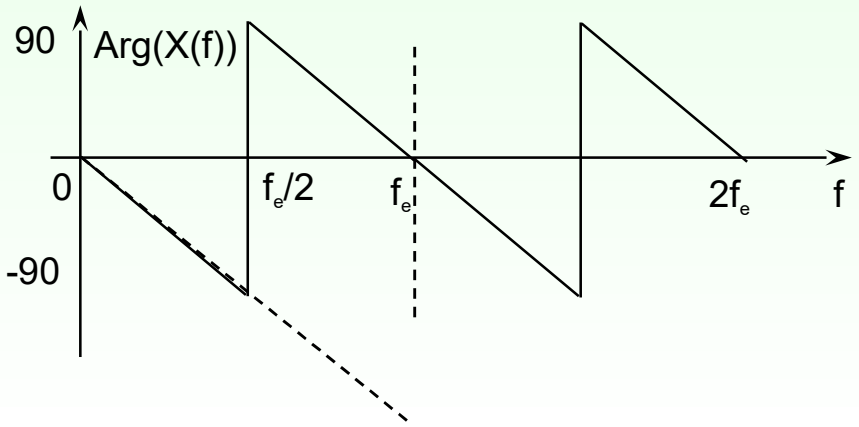
$\arg(\cos(\pi f T_e)) = \pm\pi \;\; si \;\; \cos(\pi f T_e) < 0$

$donc \;\; si \;\; \frac{F_e}{2} < f < \frac{3F_e}{2}$ modulo $2F_e$

$\arg(e^{-j\pi f T_e}) = -\pi f T_e$

$$\mathrm{Arg}(X(f)) = -\pi f T_e$$

$$\mathrm{Arg}(X(f)) = -\pi f T_e + -\pi$$



Propriétés de la TFTD

- ***Linéarité***

$$F(ax_k + b(y_k) = a\,X(f) + b\,Y(f)$$

- ***Décalage fréquentiel ou théorème de modulation***

$$F\left(e^{-j2\pi f_0 kT_e} x_k\right) = X(f - f_0)$$

- ***Translation ou théorème du retard***

$$F(x_{k-n}) = e^{-j2\pi fnT_e}\ X(f)$$

- ***Convolution ou théorème de Plancherel***

Le produit de convolution, noté $x_k * y_k$

est défini par : $x_k * y_k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n\ y_{k-n}$

$$F(x_k * y_k) = X(f).Y(f)$$