Traitement du signal

Chapitre 5 :

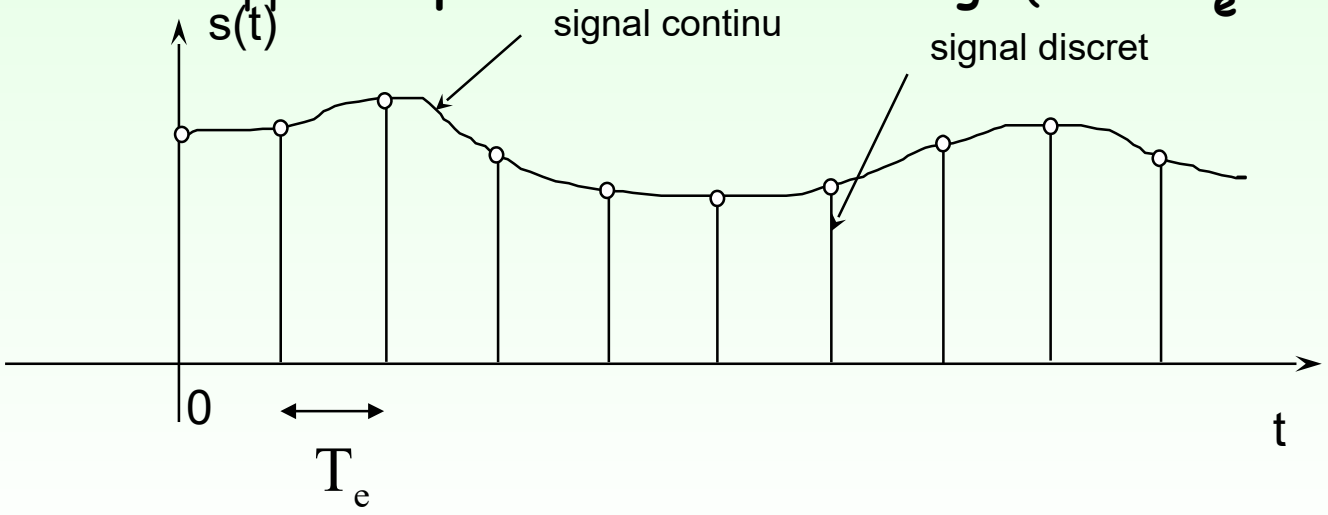
Les signaux à temps discret (ou numériques)

Introduction

Les signaux physiques existant dans la nature sont en général des signaux de type continu et il sera nécessaire, lorsque l'on voudra les faire transiter sur un réseau, de les convertir en signaux discrets.

Cette conversion porte le nom ***d'échantillonnage***.

Echantillonner un signal consiste donc à prendre des échantillons de celui-ci à des instants régulièrement espacés. La période entre deux échantillons s'appellent **période d'échantillonnage** (notée $\mathbf{T_e}$ ou Δ)



Introduction

Lorsqu'on veut échantillonner un signal continu s(t), deux problèmes se posent :

- ***dans le domaine temporel***, quelle est la perte éventuelle d'information et existe-t-il une fonction d'interpolation qui permette de reconstituer le signal continu original de manière univoque à partir de la suite numérique ?

Le théorème d'échantillonnage répond à cette question.

- ***dans le domaine des amplitudes du signal***, se pose le problème de la taille numérique des nombres de la série. En effet, du fait de leur manipulation sur un calculateur, les quantités numériques sont forcément codées sur un nombre fini d'éléments binaires.

Il s'agit de l'opération de quantification.

⟵ *Non traité dans ce cours*

Applications et intérêts des signaux numériques

- Aspect informatique => documents (fichiers) sous forme de suites de nombres => texte, images, séquences sonores, séquences vidéo …
- Répétabilité parfaite, précision
- Pas de vieillissement

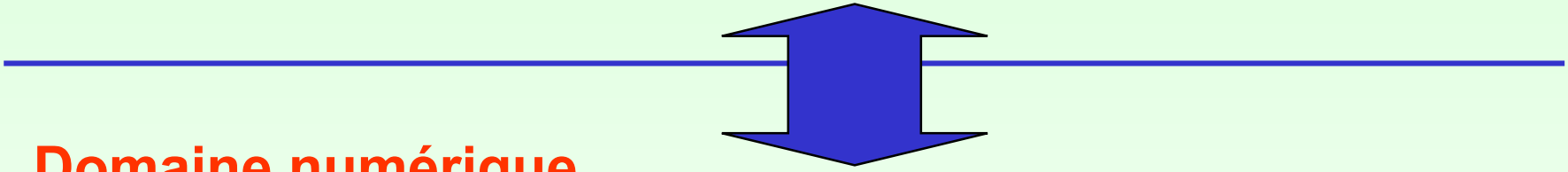
- CD laser et DVD
- TV et radios numériques (satellite, câble, hertzien)
- GSM (téléphone portable)
- maintenant téléphone "traditionnel" (RTC)

Représentation mathématique

Domaine analogique

Equations différentielles

$$\dot{x} - ax = 0$$



Domaine numérique

Equations de récurrence (suites numériques)

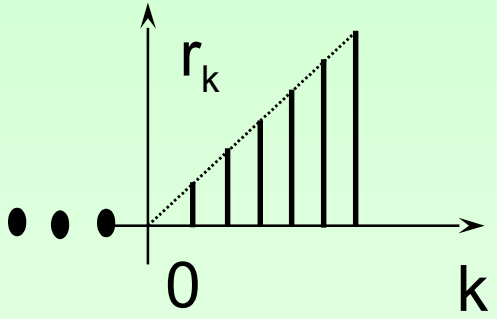
$$x_{k+1} - ax_k = 0$$

Signaux discrets particuliers

Suites de nombres

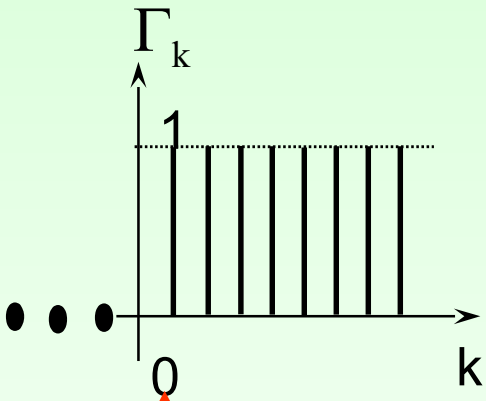
- La rampe unitaire $r_k = r(kT_e)$

$$r_k = \begin{cases} 0 \;\; pour \;\; k < 0 \\ kT_e \;\; pour \;\; k \geq 0 \end{cases}$$



- L'échelon unitaire $\Gamma_k = \Gamma(kT_e)$

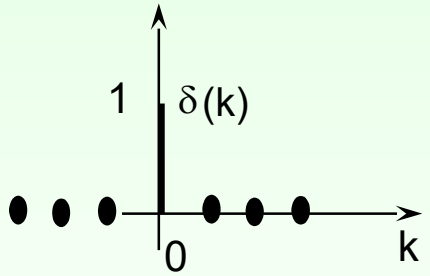
$$\Gamma_k = \begin{cases} 0 \;\; \text{pour} \;\; k < 0 \\ 1 \;\; \text{pour} \;\; k \geq 0 \end{cases}$$



- L'impulsion de Dirac $\delta_k = \delta(kT_e)$

$$\delta_k = \begin{cases} 0 \;\; \text{pour} \;\; k \neq 0 \\ 1 \;\; \text{pour} \;\; k = 0 \end{cases}$$

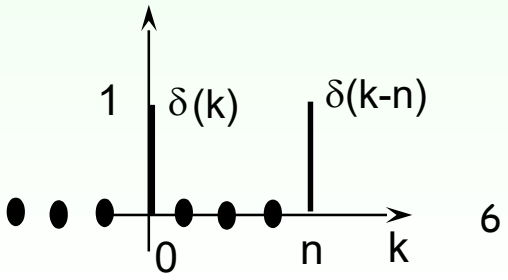




- L'impulsion de Dirac retardée

$$\delta_{k-n} = \delta\big((k-n)T_e\big)$$

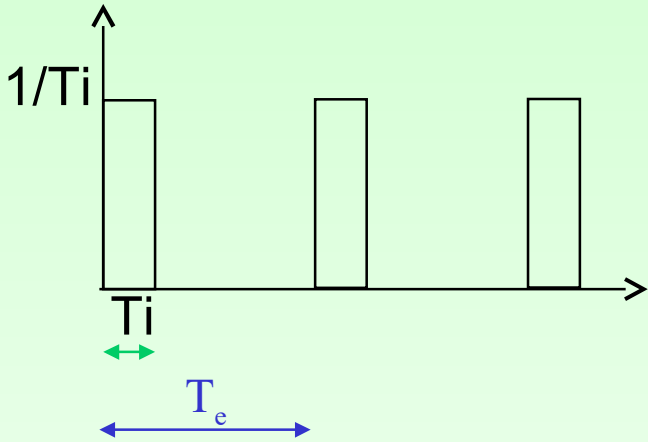
$$\delta_{k-n} = \begin{cases} 0 \;\; \text{pour} \;\; k-n \neq 0, k \neq n \\ 1 \;\; \text{pour} \;\; k-n = 0, k = n \end{cases}$$



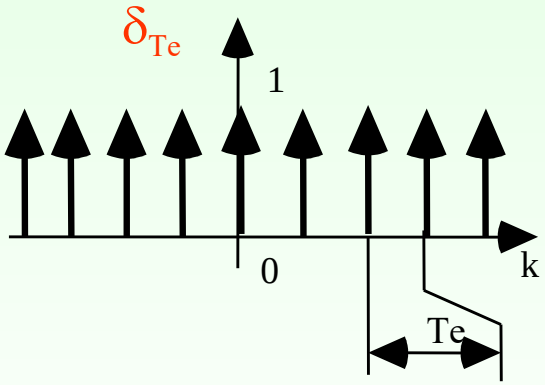
Peigne de Dirac

- Suite d'impulsions
- Signal permettant de traiter mathématiquement

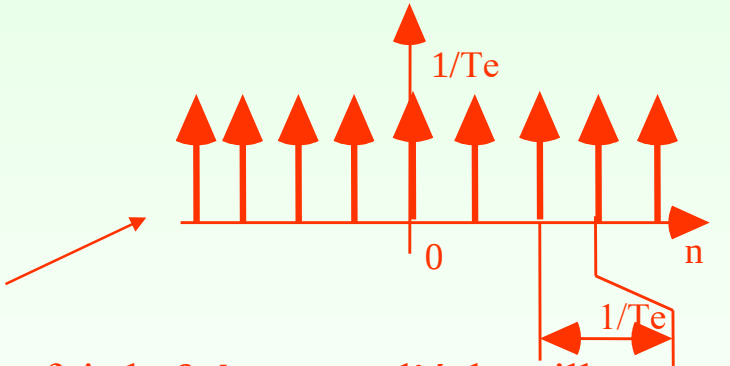
et graphiquement les problèmes d'échantillonnage



k fois la **période** d'échantillonnage



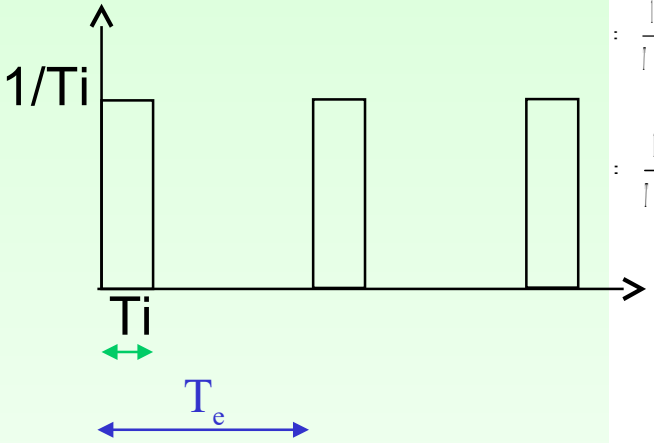
Peigne : domaine temporel



n fois la **fréquence** d'échantillonnage

Spectre du peigne

Spectre du peigne de Dirac



$s(t) = \delta(t) = \lim_{T_i \to 0} \frac{1}{T_i}$ pendant la durée T_i

$$c_n = \frac{1}{T_e}\int_{-\frac{T_e}{2}}^{\frac{T_e}{2}} s(t)\, e^{-jn\omega_e t}\, dt = \frac{1}{T_e}\int_{-\frac{T_i}{2}}^{\frac{T_i}{2}} \delta(t)\, e^{-jn\omega_e t}\, dt$$

$$= \frac{1}{T_e} \lim_{T_i \to 0} \left(\int_{-\frac{T_i}{2}}^{0} \frac{1}{T_i} e^{-jn\omega_e t}\, dt + \int_{0}^{\frac{T_i}{2}} \frac{1}{T_i} e^{-jn\omega_e t}\, dt \right)$$

$$= \frac{1}{T_e} \lim_{T_i \to 0} \left[\frac{e^{-jn\omega_e t}}{T_i(-jn\omega_e)} \right]_{-\frac{T_i}{2}}^{\frac{T_i}{2}} = \frac{1}{T_e} \lim_{T_i \to 0} \left[\frac{e^{-jn\omega_e \frac{T_i}{2}} - e^{jn\omega_e \frac{T_i}{2}}}{T_i(-jn\omega_e)} \right]$$

$$= \frac{1}{T_e} \lim_{T_i \to 0} \left[\frac{\left(1 + \frac{-jn\omega_e T_i}{1!}\right) - \left(1 + \frac{jn\omega_e T_i}{1!}\right)}{T_i(-jn\omega_e)} \right] = \frac{1}{T_e}$$

Le calcul ci-dessus est vrai à condition que $n \neq 0$. Il faut refaire le calcul pour $n = 0$:

$$c_n = \frac{1}{T_e}\int_{-\frac{T_e}{2}}^{\frac{T_e}{2}} s(t)\, dt = \frac{1}{T_e}\int_{-\frac{T_i}{2}}^{\frac{T_i}{2}} \delta(t)\, dt = \frac{1}{T_e} \lim_{T_i \to 0} \int_{-\frac{T_i}{2}}^{\frac{T_i}{2}} \frac{1}{T_i}\, dt = \frac{1}{T_e} \lim_{T_i \to 0} \left[\frac{T_i}{T_i} \right] = \frac{1}{T_e}$$

Echantillonnage

- ***Notations***

Signal continu échantillonné → Echantillonnage à la période T_e (ou Δ) → Signal discret, numérique

$s(t)$ → $s_k = s(k) = s(kT_e)$

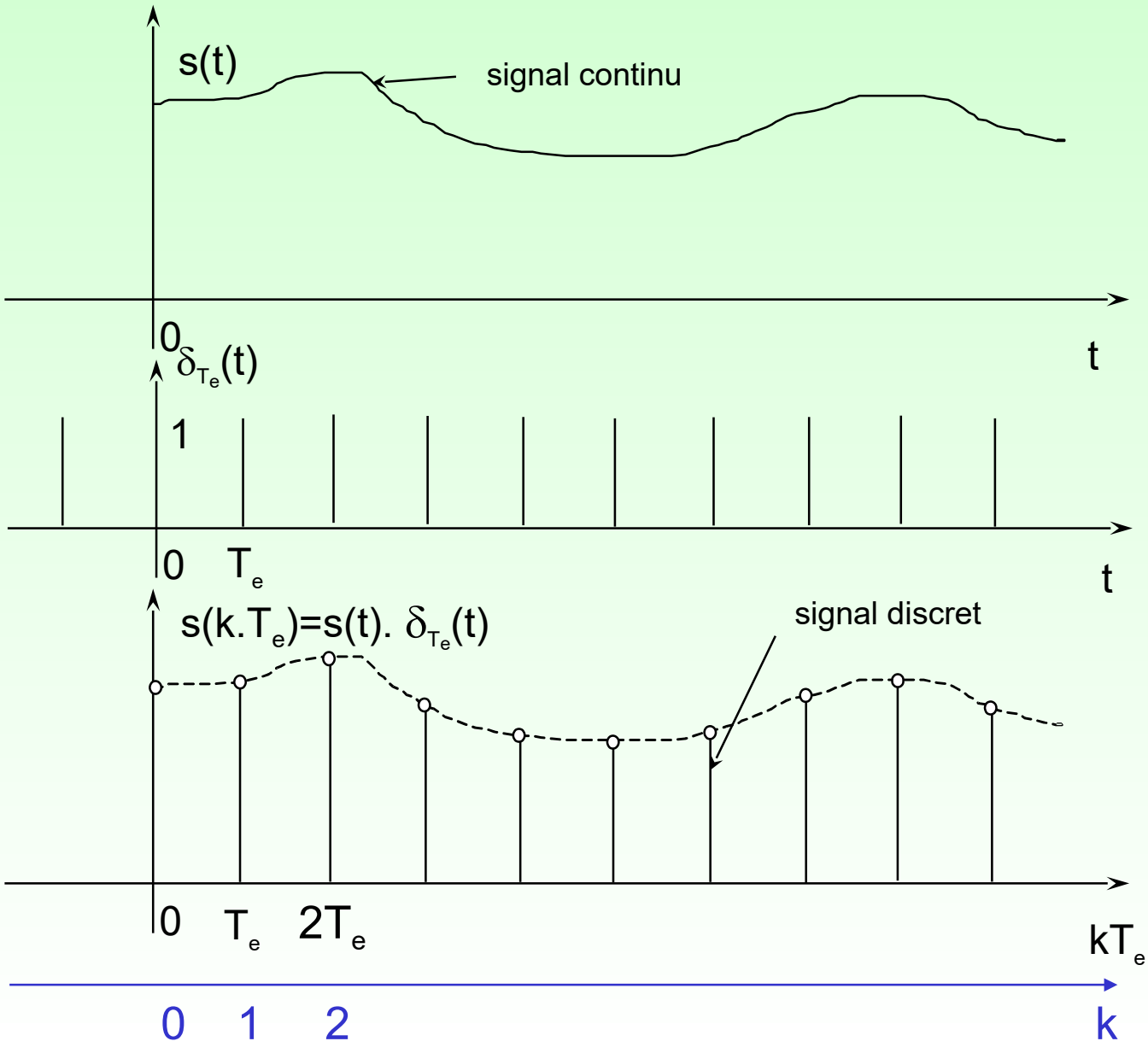
D'un point de vue mathématique, échantillonner un signal continu revient à le multiplier par un peigne de Dirac.

$$s(kT_e) = s(t) \,.\, \delta_{Te}(t) = s(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$$

$$s(kT_e) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t)\delta(t - kT_e)$$

$$s(kT_e) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e)\delta(t - kT_e)$$

Illustration graphique de l'échantillonnage



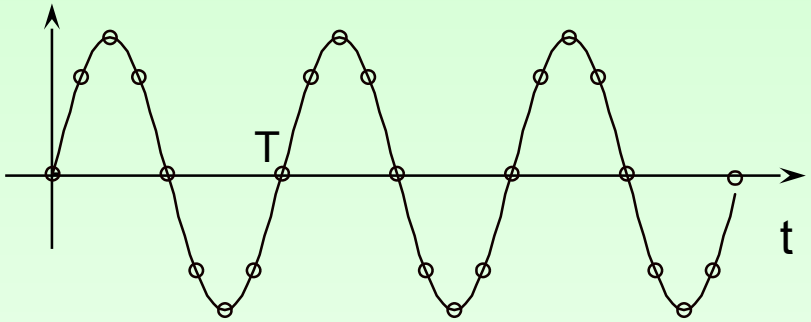
Effet de l'échantillonnage dans le domaine temporel

$s(t)=\sin(2\pi f_0 t)$

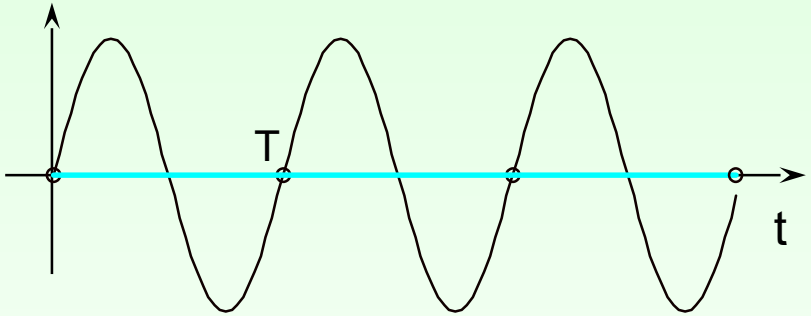
Considérons 3 choix de période d'échantillonnage

Te $\qquad T = \frac{1}{f_0}$

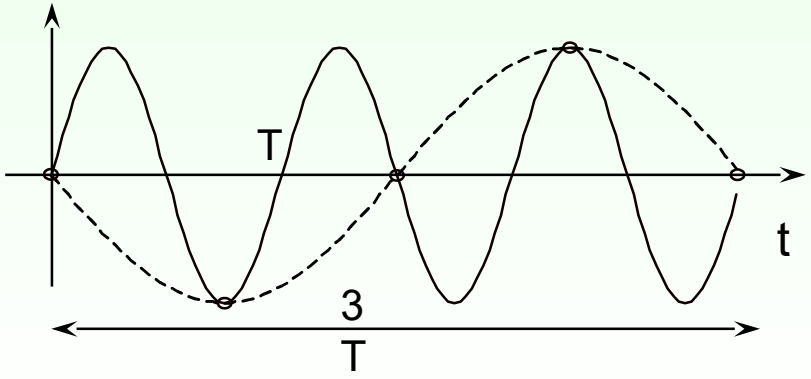
1er choix : $T_e = \frac{T}{8}$ $\qquad f_e = 8\, f_0$



2ème choix : $T_e = T$ $\qquad f_e = f_0$



3ème choix : $T_e = \frac{3}{4} T$ $\qquad f_e = \frac{4}{3}\, f_0$



→

Repliement spectral

$f = f_e - f_0 = \frac{1}{3}\, f_0$

Effet de l'échantillonnage dans le domaine fréquentiel

Soit un signal s(t) et son spectre S(f) (obtenu par TFTC) :
Le signal échantillonné correspondant est défini par : $s(kT_e) = s(t) \cdot \delta_{T_e}(t)$

Soit $\delta_{Fe}(f)$ le spectre de $\delta_{Te}(t)$: $\delta_{Fe}(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_e)$

A un produit simple dans le domaine temporel correspond un produit de convolution dans le domaine fréquentiel

$$F(s(kT_e)) = F(s(t) \cdot \delta_{T_e}(t)) = S(f) * \delta_{f_e}(f)$$

$$F(s(kT_e)) = S(f) * \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_e)$$

$$F(s(kT_e)) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(f) * \delta(f - nf_e)$$

$$\boxed{F(s(kT_e)) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(f - nf_e)}$$

Le spectre d'un signal échantillonné correspond au spectre du signal continu périodisé tous les f_e

Illustration de l'échantillonnage dans le domaine fréquentiel

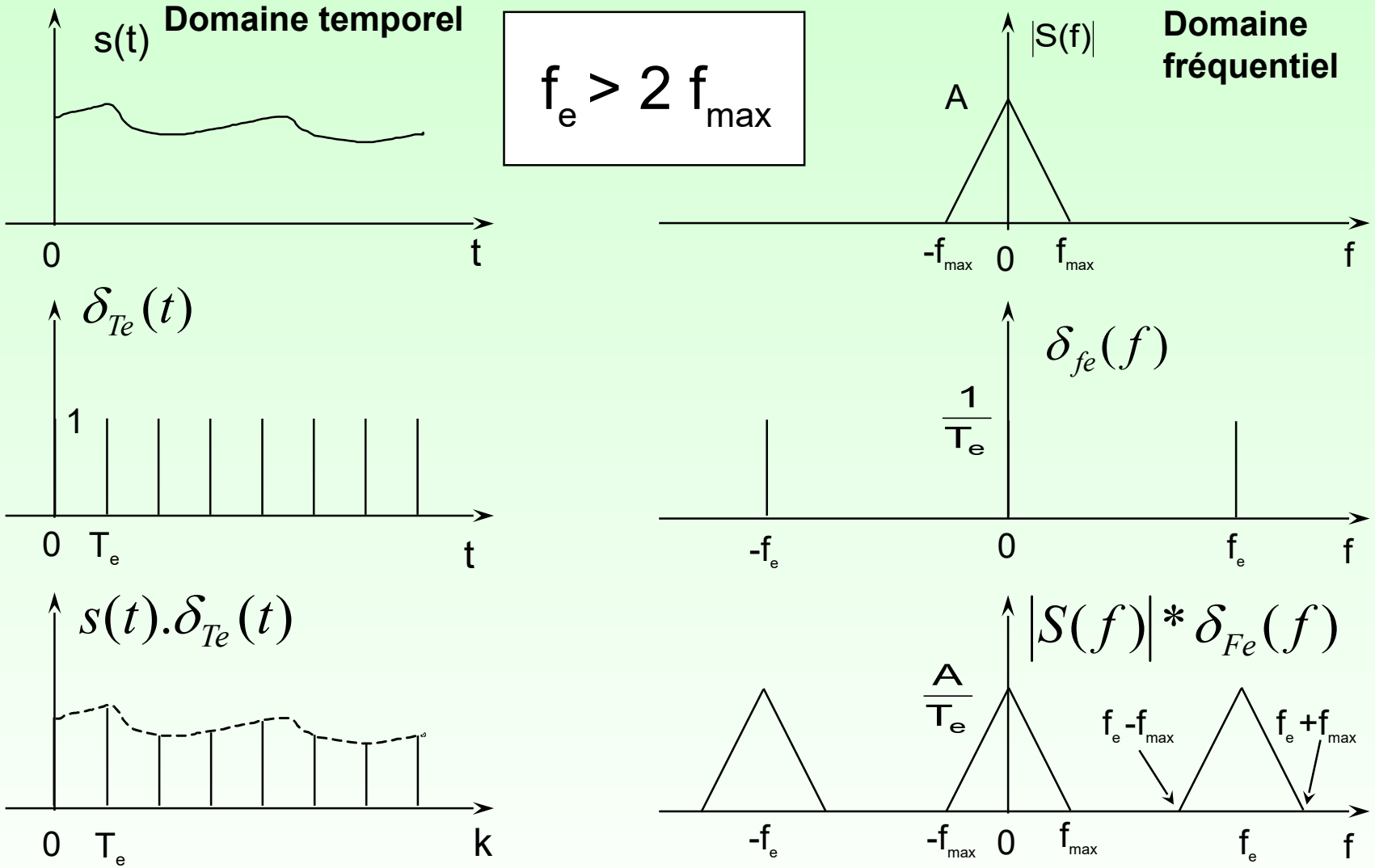


Illustration de l'échantillonnage dans le domaine fréquentiel

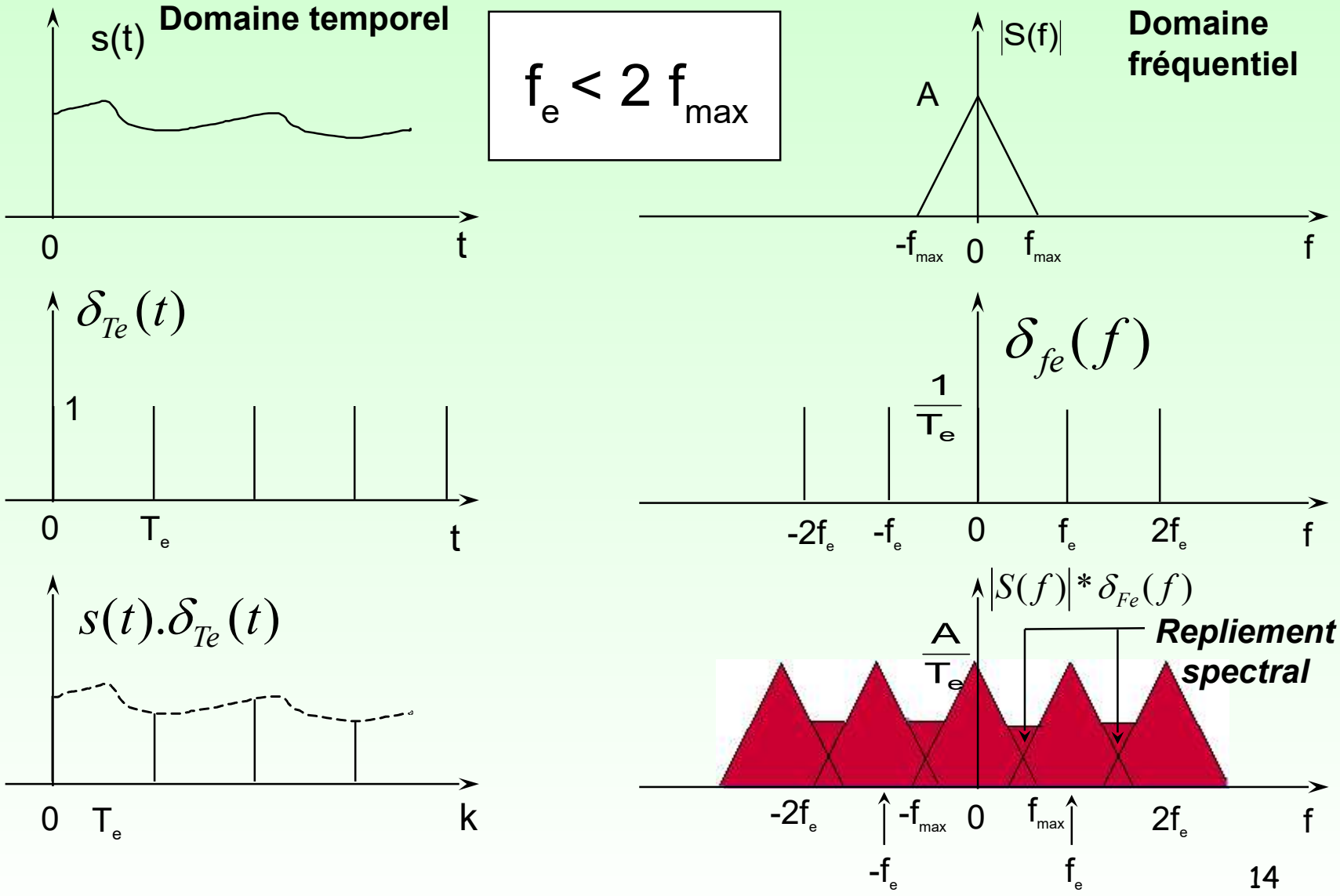
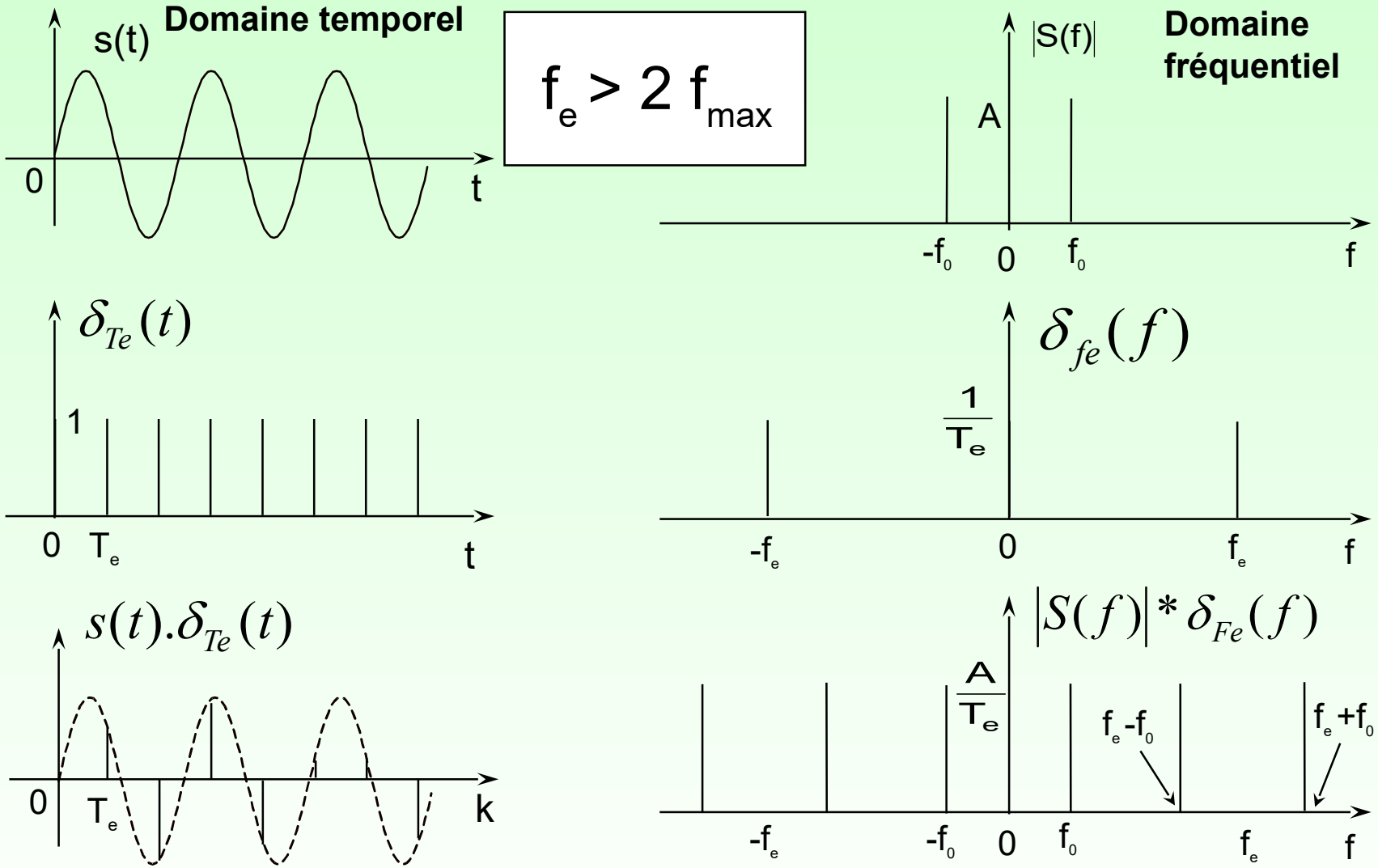


Illustration de l'échantillonnage dans le domaine fréquentiel



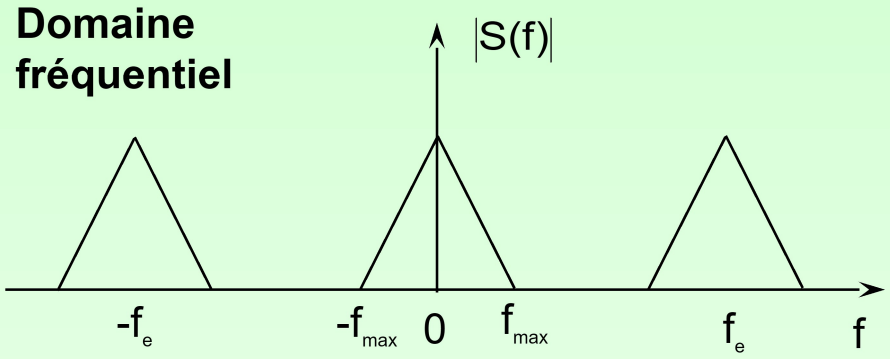
Théorème d'échantillonnage ou de Shannon

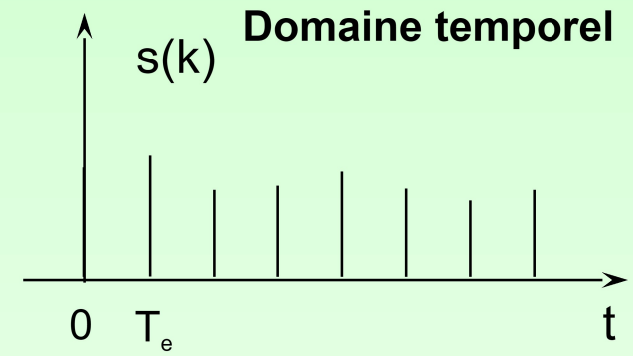
La reconstitution d'un signal s(t) à partir d'échantillons prélevés à la fréquence f_e n'est possible que si f_e est 2 fois supérieure à la fréquence maximale du signal.

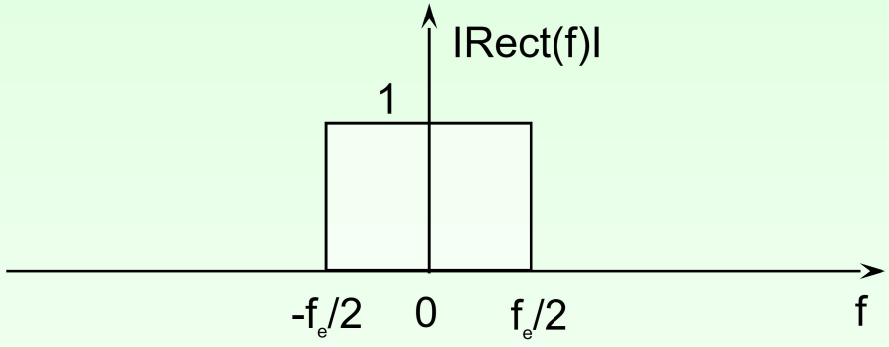
Lorsque $f_e < 2f_{max}$, l'opération de reconstruction exacte n'est plus possible et il y a ***repliement de spectre*** (aliasing). Les fréquences situées au delà de $f_e/2$ sont ramenées dans la bande $[-f_e/2, f_e/2]$.

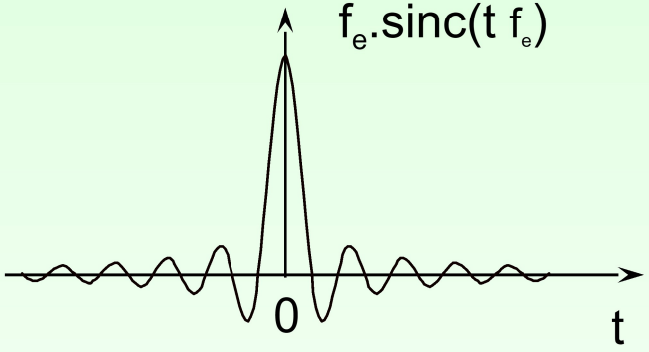
En pratique : indispensable de faire précéder l'opération d'échantillonnage par un filtrage passe-bas appelé ***filtrage anti-repliement*** de fréquence de coupure un peu < à $f_e/2$ => limitation $f_{max} < f_e/2$ évitant ainsi le repliement.

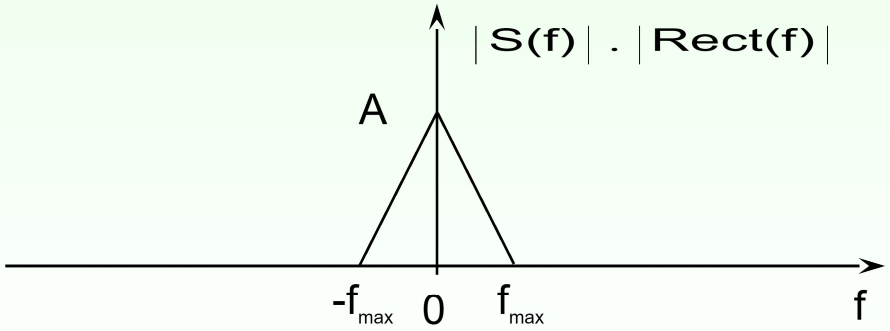
Restitution d'un signal analogique (à temps continu)

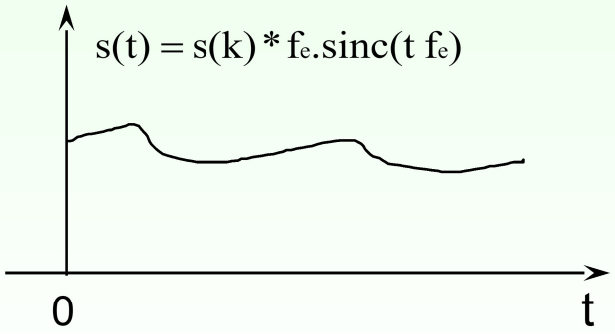












Dualité temps-fréquence

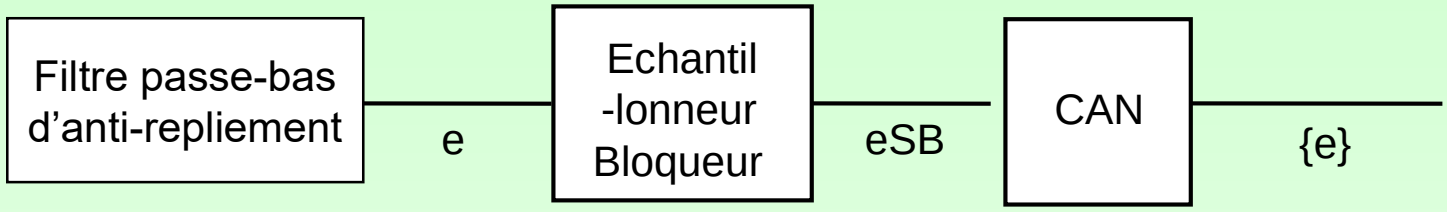
Un ***signal échantillonné*** (raies temporelles) possède un ***spectre périodique*** de la même façon qu'un ***signal continu périodique*** dans le temps possède un ***spectre échantillonné*** (raies fréquentielles).

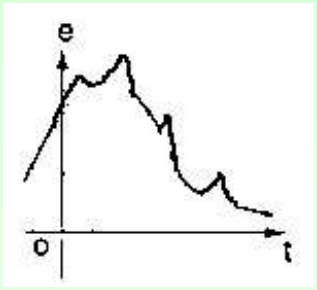
Domaine temporel		**Domaine fréquentiel**
signal *périodique* continu	→	spectre *échantillonné* (raies fréquentielles)
signal *échantillonné* (raies temporelles)	→	spectre *périodique* continu

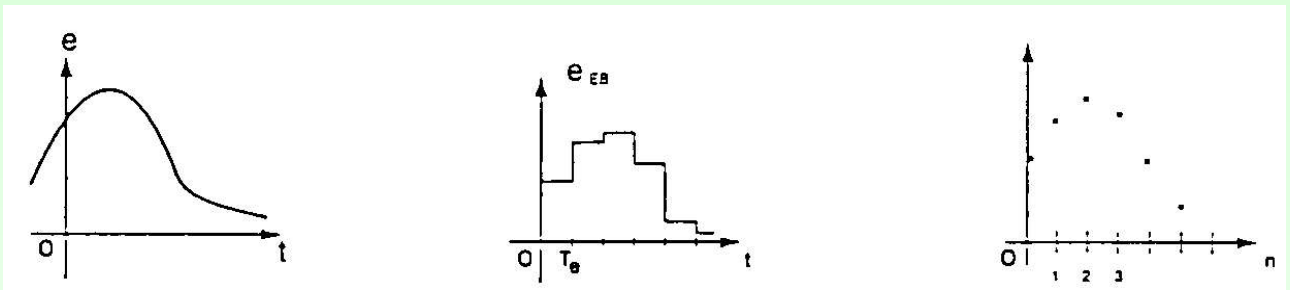
Dualité temps-fréquence

Chaînes d'acquisition et de restitution

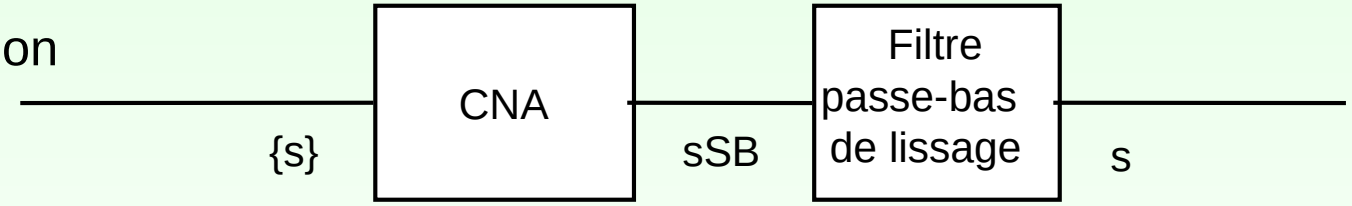
Acquisition

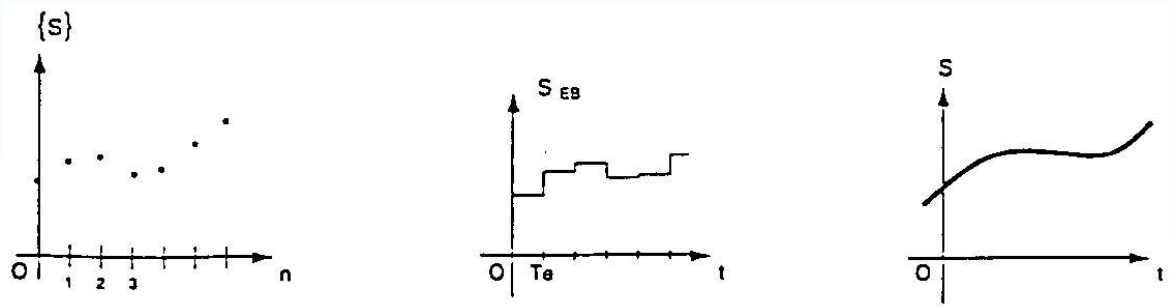






Restitution





Exemple

Soit une sinusoïde, nous allons échantillonner cette sinusoïde et voir ce qui se passe dans les domaines :

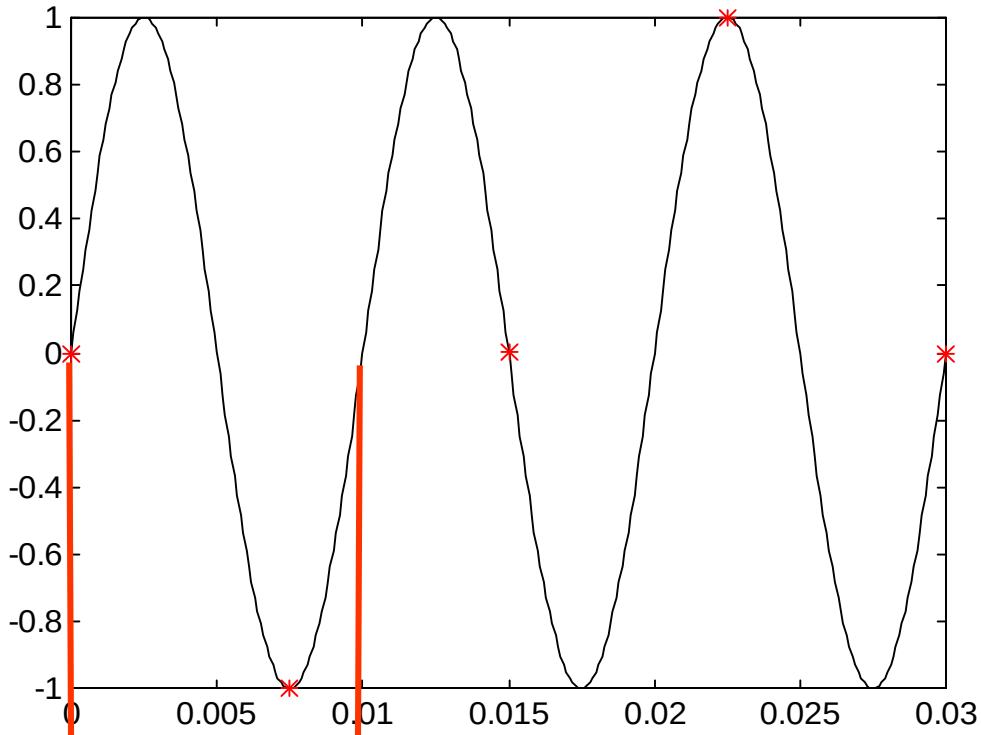
- temporel
- fréquentiel

Analyse dans le domaine temporel

Caractériser ce signal :

amplitude **1**

Fréquence : 100 Hz



expression mathématique

du signal :

$$y = \sin(2\pi ft) = \sin(\omega t)$$

T = 0,01 s
donc
f = 100 Hz

On souhaite

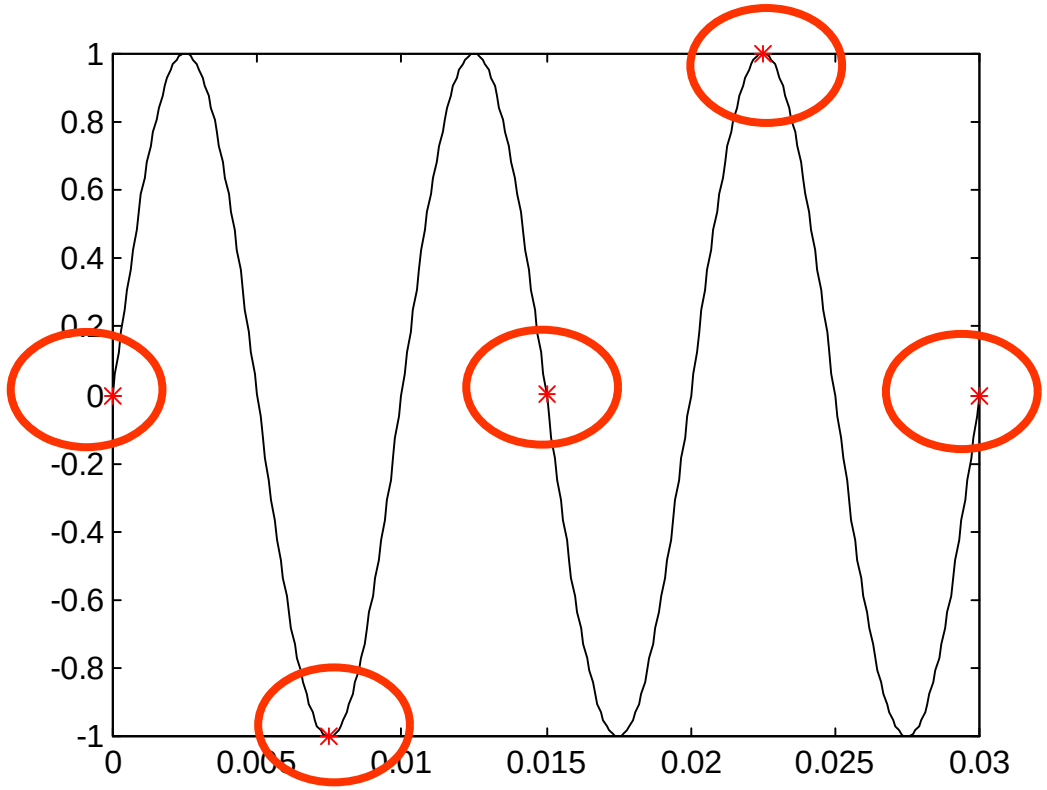
échantillonner

ce signal avec

une T_e= 0,0075 s.

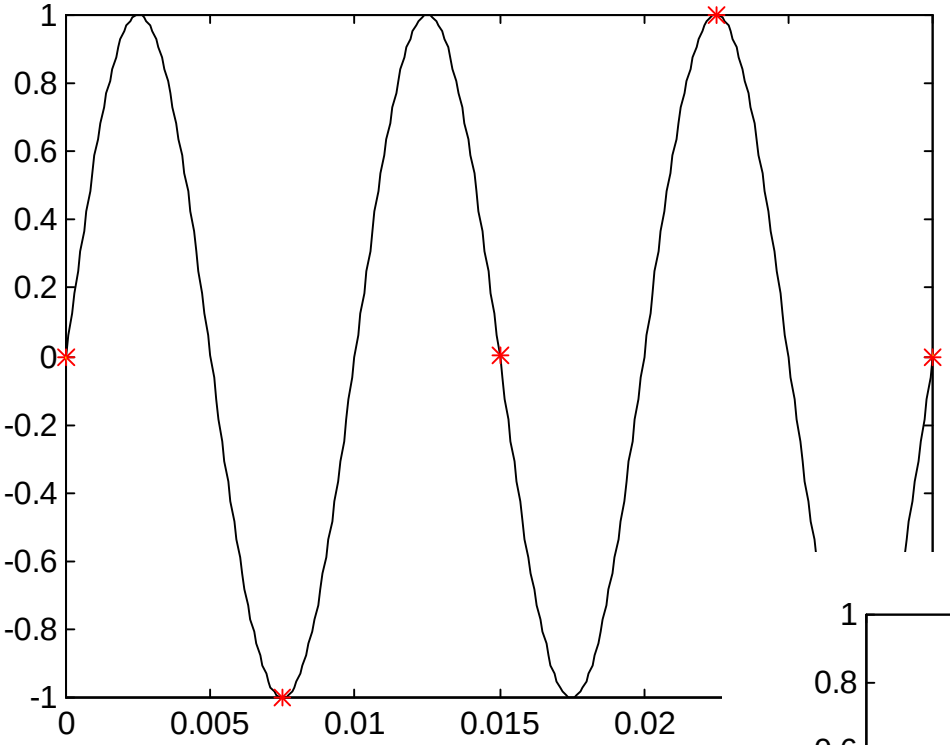
Exprimez T en fct

de T_e et f en fct de F_e

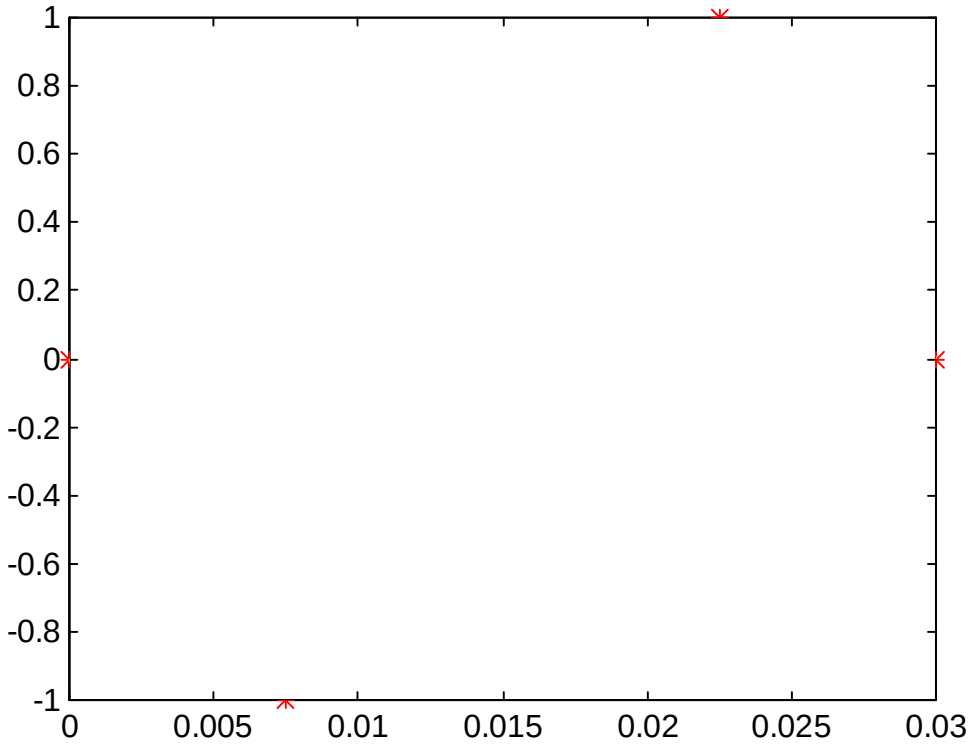


soit Te=3T/4

donc F_e=4f/3



Reconstruire le signal d'après les échantillons connus



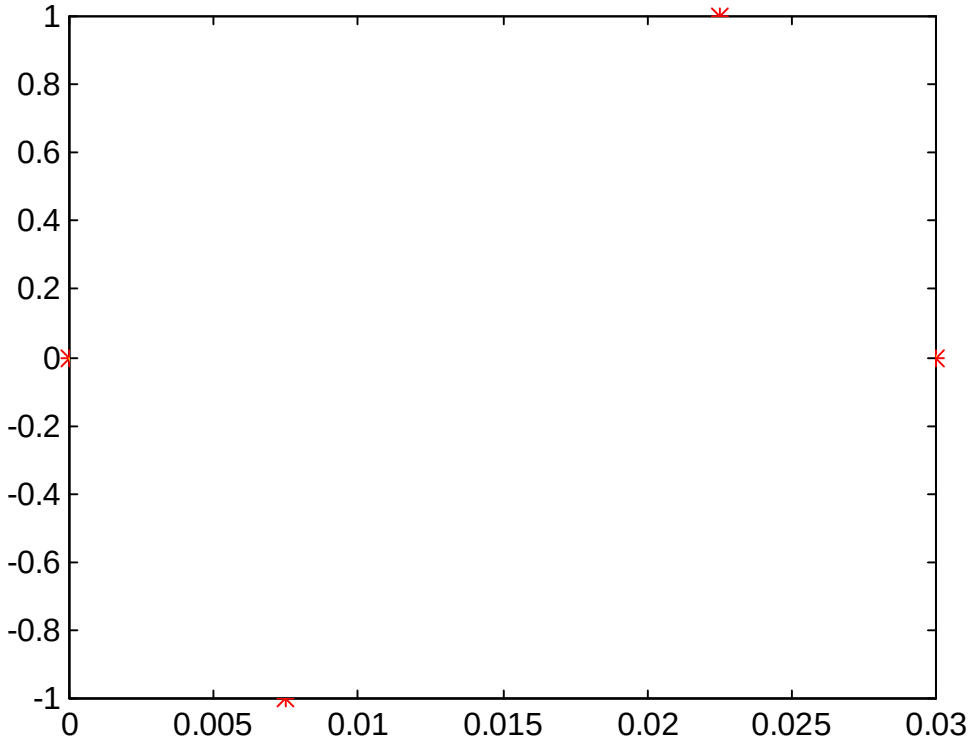
Caractérisation du signal reconstruit

Caractériser ce signal :

- amplitude **1**
- fréquence **Tr = 0,03 s = 3T donc fr = 33,33 Hz =f/3**
- expression mathématique

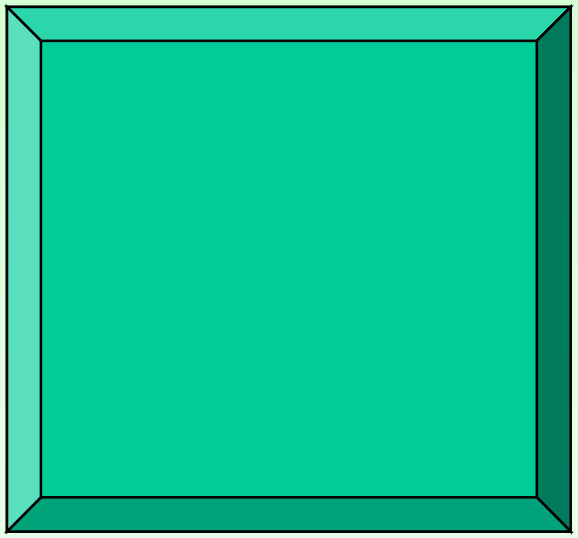
du signal :

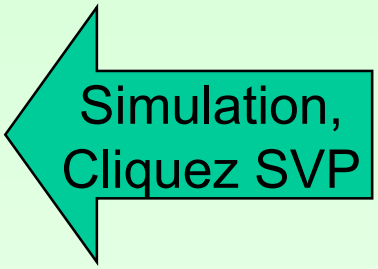
$$y = -\sin(2\pi f_r t) = \sin(\omega_r t)$$



Conclusion, si j'échantillonne un signal avec une Fe=4f/3 (donc ne respectant pas le théorème d'échantillonnage, le signal reconstruit a une fréquence fr=f/3 (repliement de spectre => décalage des fréquences vers le bas => ici le signal de 100 Hz devient un signal de 33,33 Hz car il a été mal échantillonné)

Reconstruction





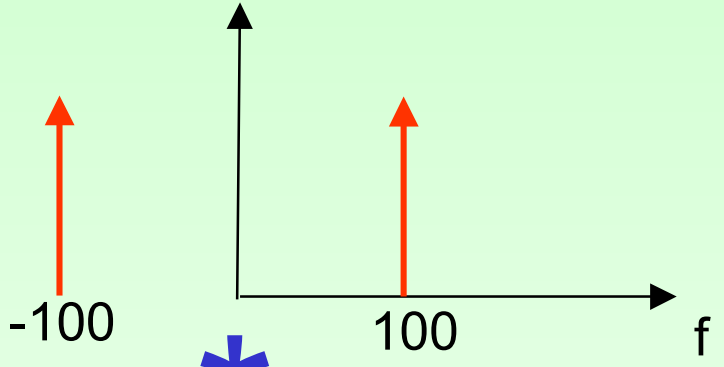
http://www.eaeeie.org/theiere_signal/theiere_signal_fr/frame.htm

Etude dans le domaine fréquentiel

Représenter

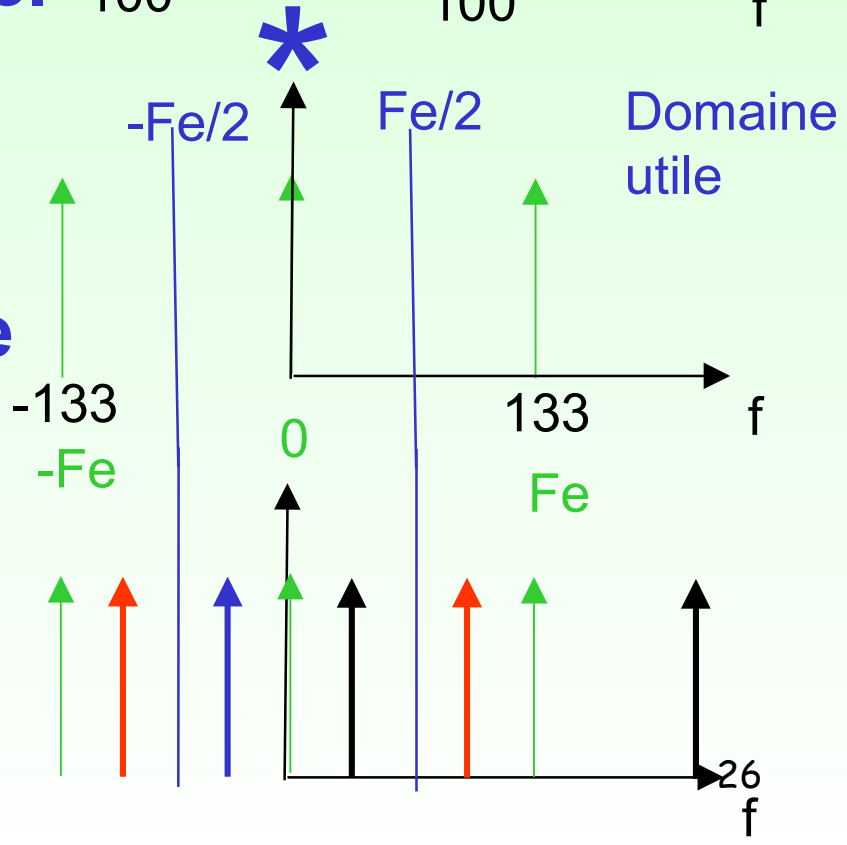
$$y = \sin(2\pi ft) = \sin(\omega t)$$

dans le domaine fréquentiel



Représenter l'opération d'échantillonnage dans le domaine fréquentiel telle que Te= 0,0075 s :

Fe=133,33 Hz



Convolution :

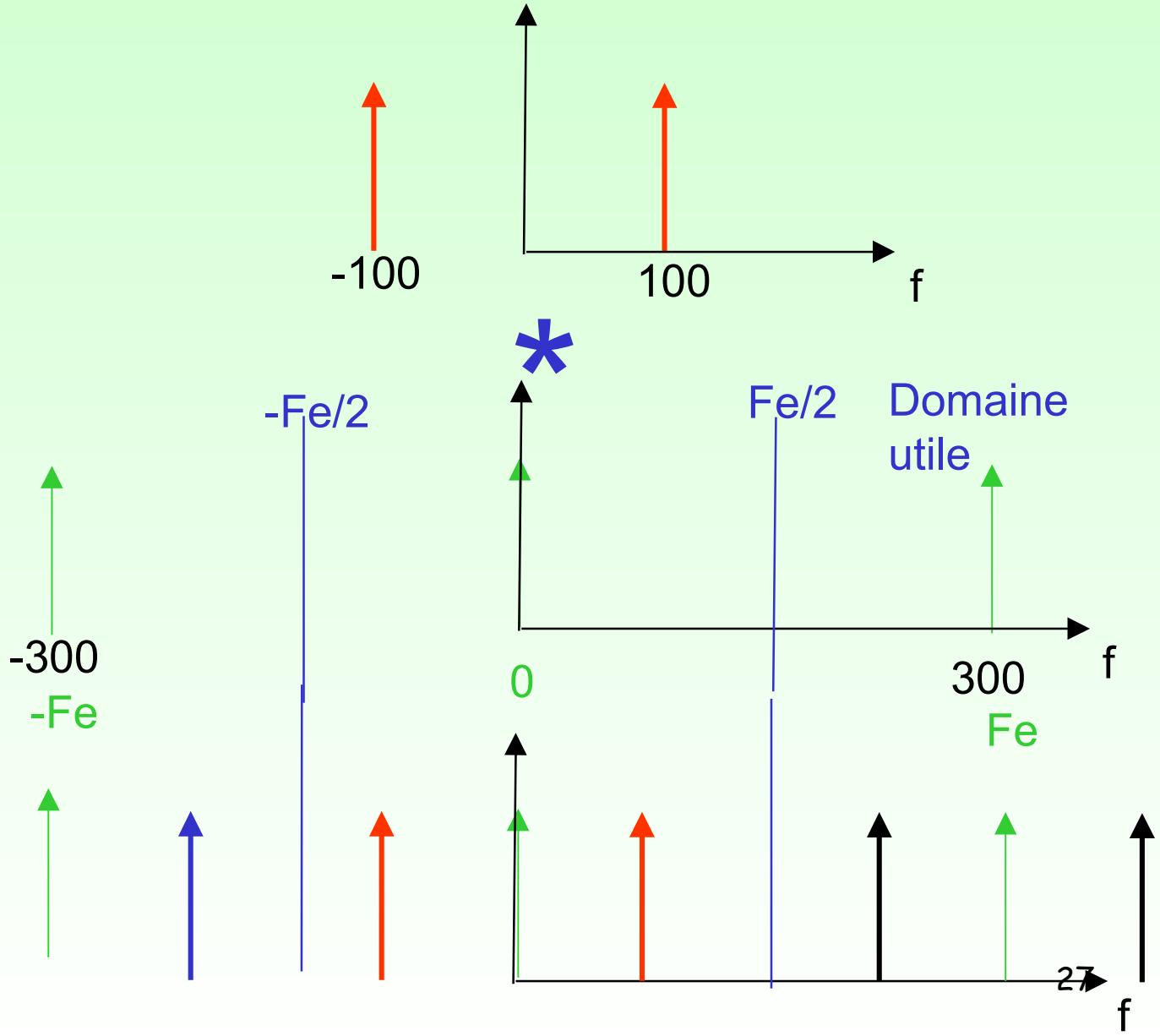
Autour de 0

Autour de Fe

Autour de -Fe

Supposons échantillonnage correct

Représenter l'opération d'échantillonnage dans le domaine fréquentiel telle que Fe= 300 Hz



Convolution :

Autour de 0

Autour de Fe

Autour de -Fe