Transformée de Fourier

à temps continu

(TFTC)

Signaux à temps continu non périodiques

Définitions

- Soit un signal continu s(t) non périodique, la ***TFTC*** de s(t) est définie pa

$$\mathbb{F}(s(t)) = S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\ e^{-j2\pi ft} dt$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, e^{-j2\pi\omega t} dt$$

- S(f) : fonction complexe même si le signal s(t) est réel.

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\ e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\cos(2\pi ft) dt + j\int_{-\infty}^{+\infty} -s(t)\sin(2\pi ft) dt$$

$$= \mathrm{Re}(S(f)) + j\ \mathrm{Im}(S(f))$$

- $|X(f)| = \sqrt{\mathrm{Re}(S(f))^2 + \mathrm{Im}(S(f))^2}$: spectre de fréquence en amplitude
- $\varphi_n = \mathrm{Arg}(S(f))$: spectre de fréquence en phase

- La ***TFITC*** est définie par :

$$s(t) = \mathbb{F}^{-1}(S(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\ e^{j2\pi ft} df$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\, e^{j2\pi\omega t} d\omega$$

Remarques et propriétés de la TFTC

Remarques

Si la Transformée de Fourier est devenue un outil privilégié pour l'analyse d'un signal, c'est en grande partie à ses propriétés mathématiques qu'elle le doit.

Propriétés

- ***Linéarité***

$$\mathbb{F}(ax(t)+by(t)) = a\,X(f)+b\,Y(f)$$

- ***Similitude ou facteur d'échelle***

$$\mathbb{F}(x(at)) = \frac{1}{|a|}\,X(\frac{f}{a})$$

(voir exemple fenêtre rectangulaire => transparent 12)

- ***Translation ou théorème du retard***

$$\mathbb{F}(x(t-a)) = e^{-j2\pi af}\,X(f)$$

Une translation temporelle ne modifie pas le spectre en amplitude mais seulement le spectre de phase

Propriétés de la TFTC

- ***Décalage fréquentiel ou théorème de modulation***

$$\mathbb{F}\left(e^{-j2\pi f_0 t}x(t)\right) = X(f - f_0)$$

- ***Dérivée*** $\mathbb{F}\left(\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right) = (j2\pi f)^n X(f)$

Convolution ou théorème de Plancherel

Le produit de convolution, noté x(t)*y(t)

est défini par : $\mathbb{F}(x(t) * y(t)) = X(f).Y(f)$

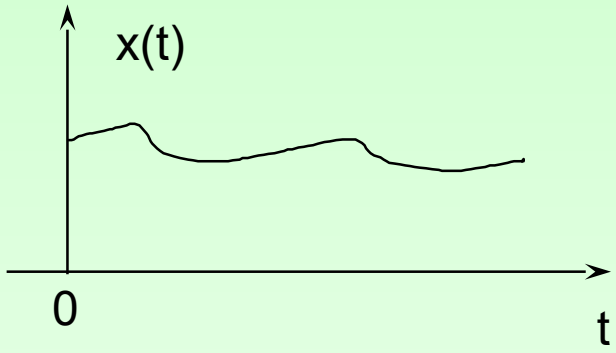
$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\, y(t)d\tau$$

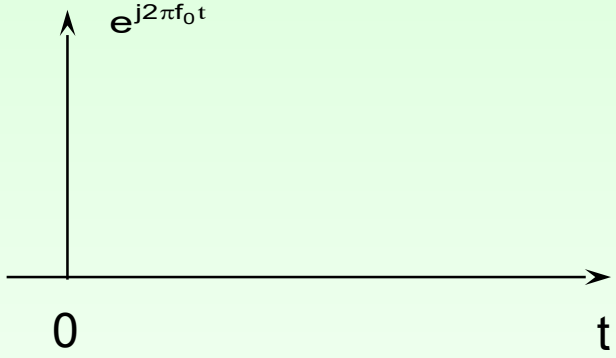
A un ***produit de convolution*** dans le domaine temporel correspond un ***produit simple*** dans le domaine fréquentiel.

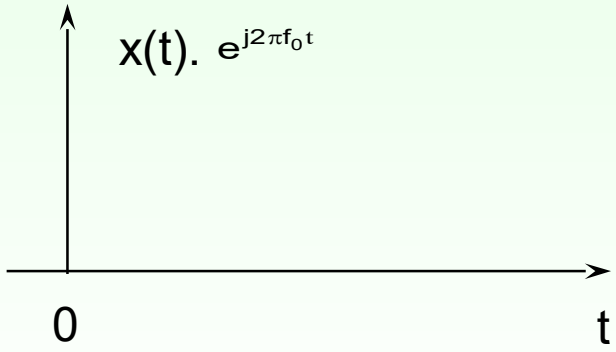
Du fait de la dualité temps-fréquence, à un produit de convolution dans le domaine fréquentiel correspond un produit simple dans le domaine temporel.

Illustration graphique de la modulation

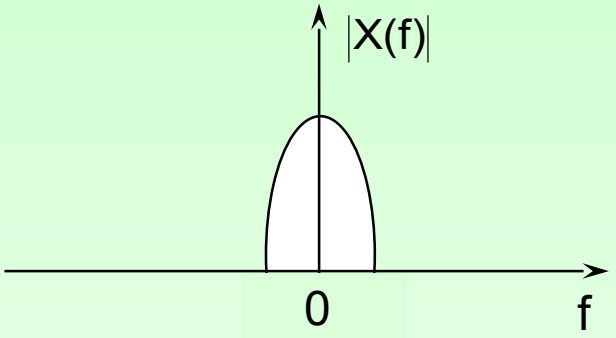
Domaine temporel

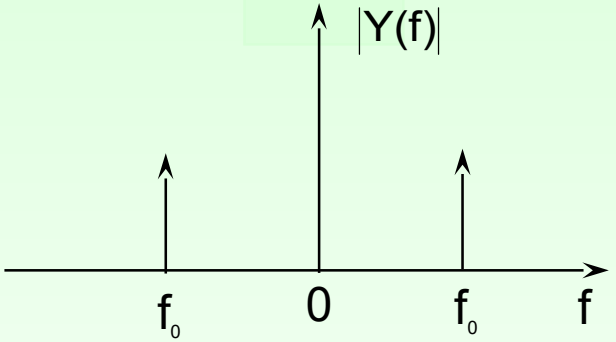






Domaine fréquentiel





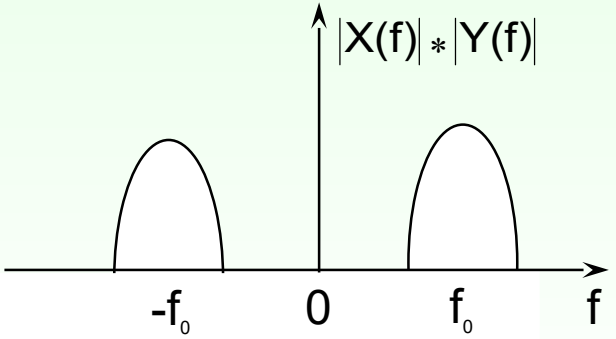
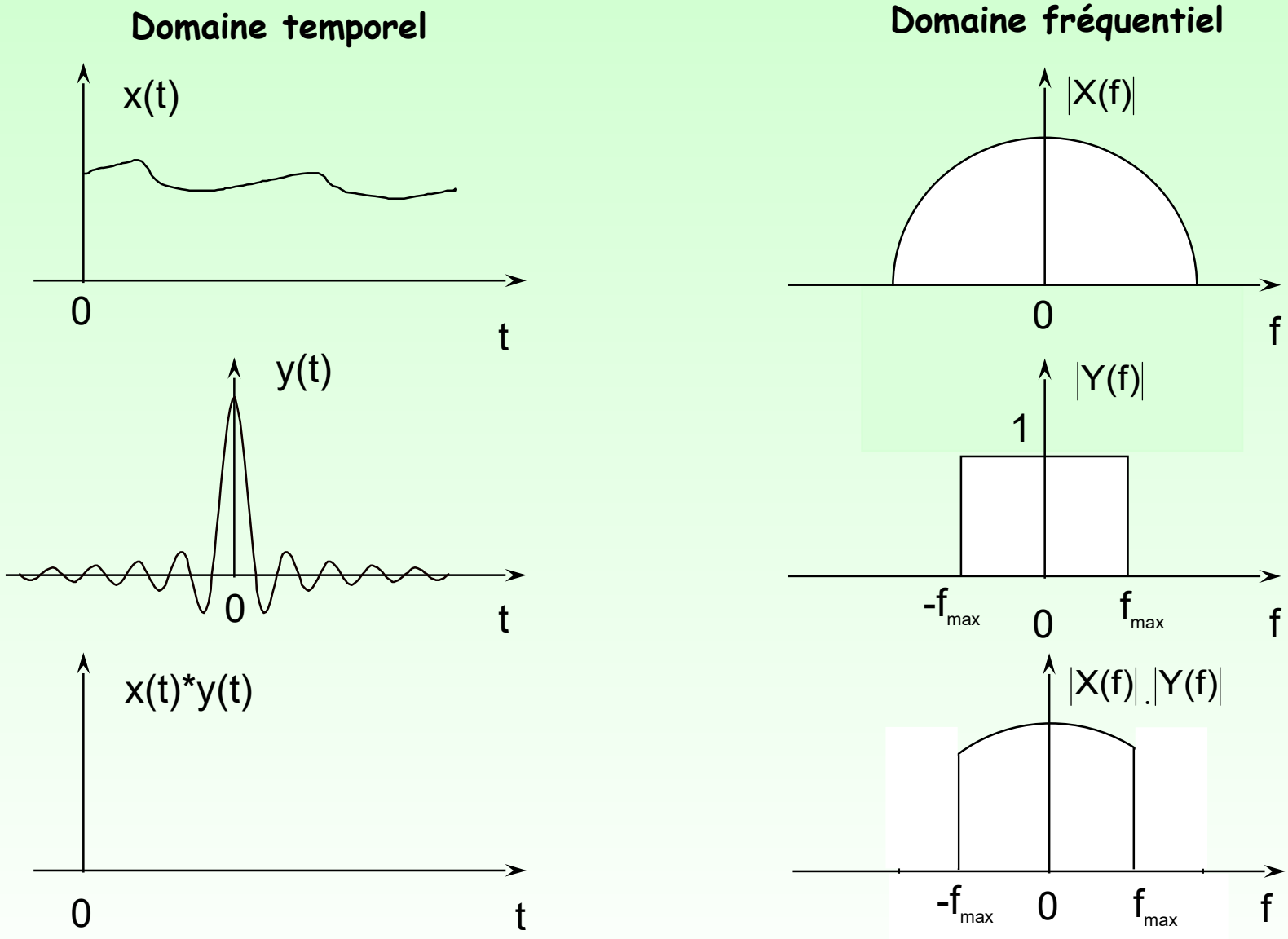


Illustration graphique de la TFTC du produit de convolution



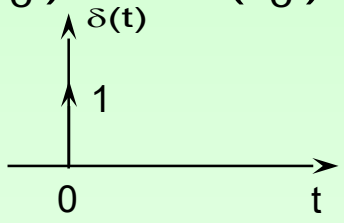
Transformée de Fourier de signaux-test

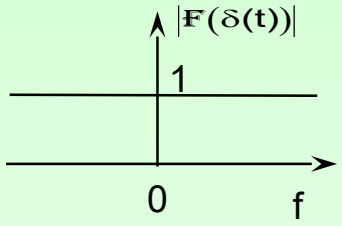
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt = 1$$

- ***Impulsion de Dirac*** $\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\delta(t - t_0)dt = s(t_0)$

$$\mathbb{F}(\delta(t)) = 1$$

$$\mathbb{F}(\delta(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt = e^{-j2\pi ft}\Big|_{t=0} = 1$$





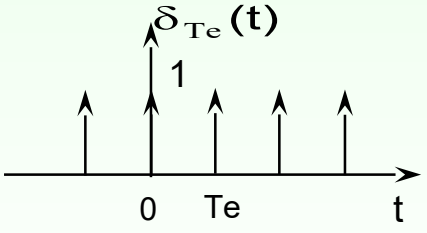
- ***Peigne de Dirac***

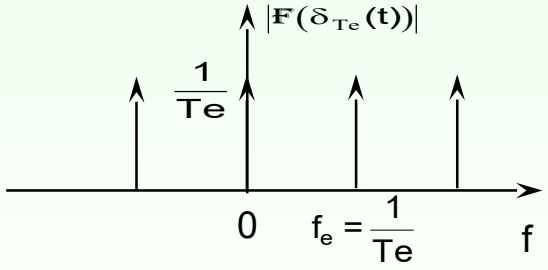
$$\mathbb{F}(\delta(t-\tau)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)\, e^{-j2\pi ft}\, dt = e^{-j2\pi ft}\Big|_{t=\tau} = e^{-j2\pi f\tau}$$

$$\delta_{Te}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nTe) = \cdots + \delta(t+Te) + \delta(t) + \delta(t-Te) + \delta(t-2Te) + \cdots$$

$$\mathbb{F}(\delta_{Te}(t)) = \frac{1}{Te}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{n}{Te}) = \frac{1}{Te}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_e)$$

$$f_e = \frac{1}{Te}$$





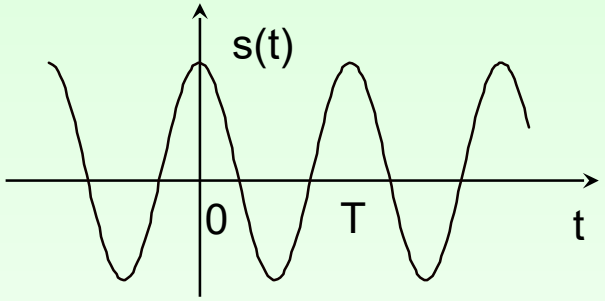
Transformée de Fourier de signaux-test

- ***Signal sinusoïdal***

$$s(t) = A\cos(2\pi f_p t) \quad \text{et} \quad \cos(2\pi f_p t) = \frac{e^{j2\pi f_p t} + e^{-j2\pi f_p t}}{2}$$

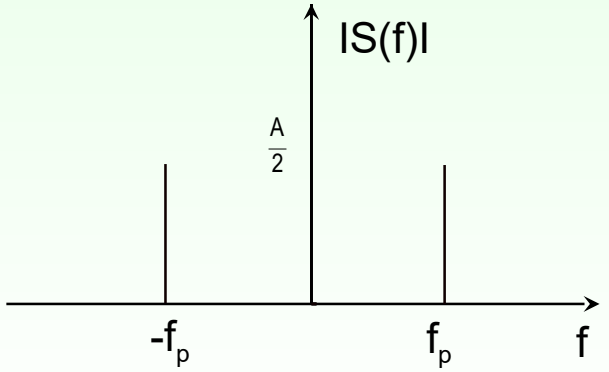
$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A\frac{e^{j2\pi f_p t} + e^{-j2\pi f_p t}}{2} e^{-j2\pi f t}\, dt = \frac{A}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi (f-f_p)t}\, dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi (f+f_p)t}\, dt\right]$$

$$S(f) = \frac{A}{2}\,\delta(f - f_p) + \frac{A}{2}\,\delta(f + f_p)$$



$$s(t) = A\sin(2\pi f_p t)$$

$$S(f) = \frac{A}{2j}\,\delta(f - f_p) + \frac{A}{2j}\,\delta(f + f_p)$$



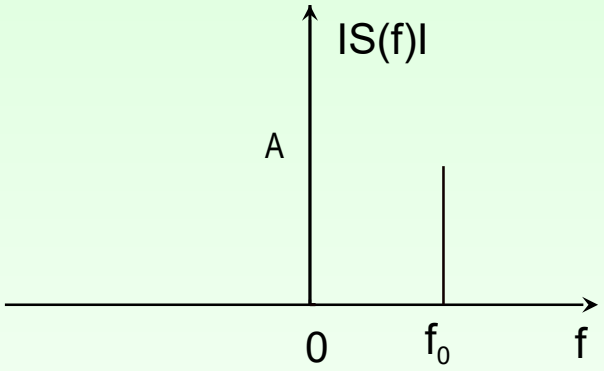
Transformée de Fourier de signaux-test

- ***Signal exponentiel complexe***

$$s(t) = A\, e^{j2\pi f_0 t}$$

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A\, e^{j2\pi f_0 t}\, e^{-j2\pi f t}\, dt = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi (f - f_0) t} dt$$

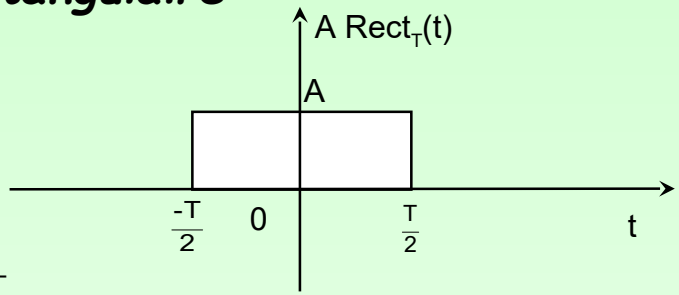
$$S(f) = A\ \delta(f - f_0)$$



Exemple

Transformée de Fourier d'une fenêtre rectangulaire

$$s(t) = A\ \mathrm{Rect}_T(t) = \begin{cases} A & \text{si } t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\ e^{-j2\pi ft}\ dt = A \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi ft}\ dt = A \left[\frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$= A \left[\frac{e^{-j2\pi\frac{T}{2}f} - e^{j2\pi\frac{T}{2}f}}{-j2\pi f}\right] = \frac{A}{\pi f}\left[\frac{e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}}{2j}\right]$$

$$S(f) = AT\left[\frac{\sin\pi fT}{\pi fT}\right]$$

$$\boxed{S(f) = AT\ \ \mathrm{sinc}(fT)} \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \qquad |S(f)| = |AT|\ \ |\mathrm{sinc}(fT)|$$

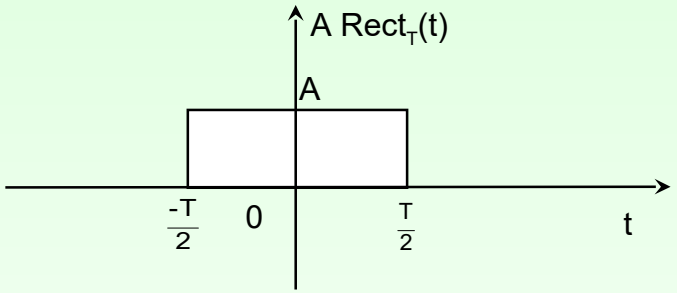
Etude du sinus cardinal :

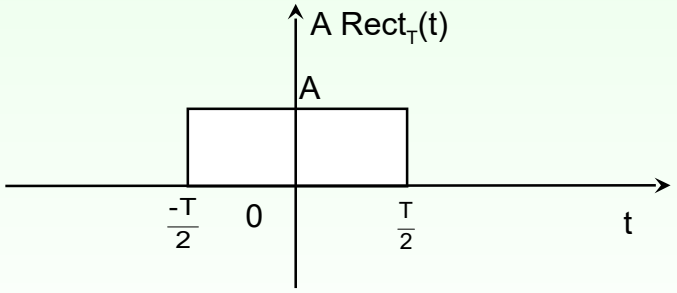
$S(0) = AT$ $\text{sinc}(0) = AT$ (par définition sinc(0) = 1)

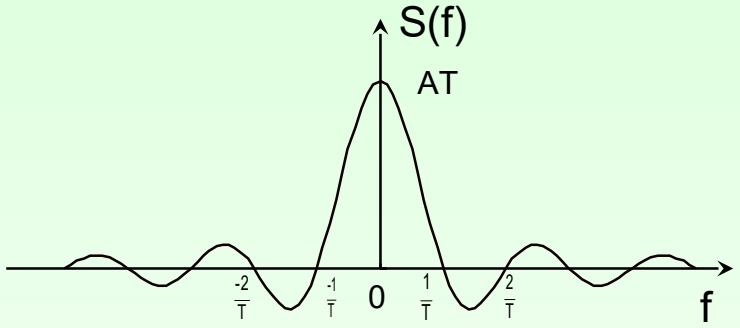
$\text{sinc}(fT) = 0 \Leftrightarrow \sin(\pi fT) = 0 \Leftrightarrow f = \frac{k}{T}$ $k \in Z^*$

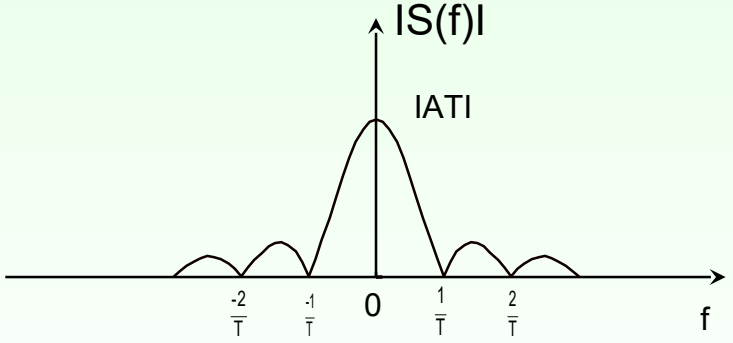
Largeur du lobe principal : $\frac{2}{T}$ (pour f = 0 S(0) = 1)

Largeur des lobes secondaires : $\frac{1}{T}$

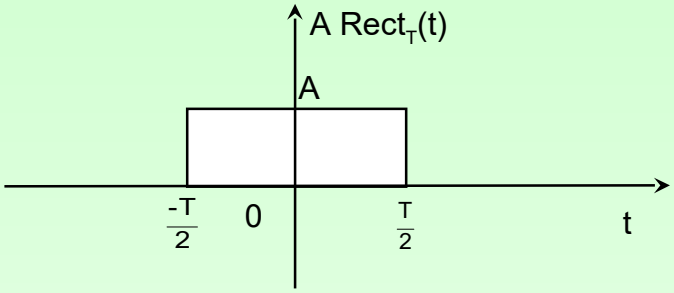


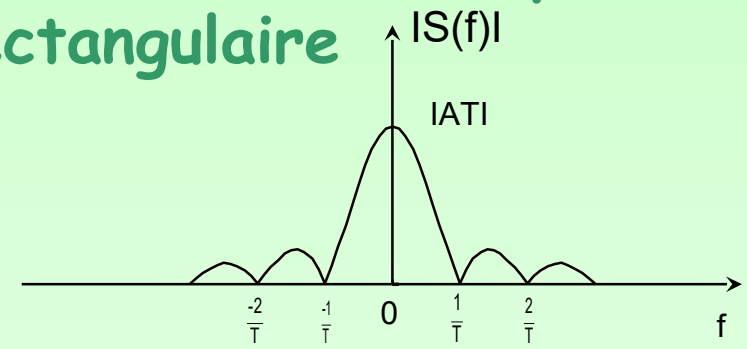


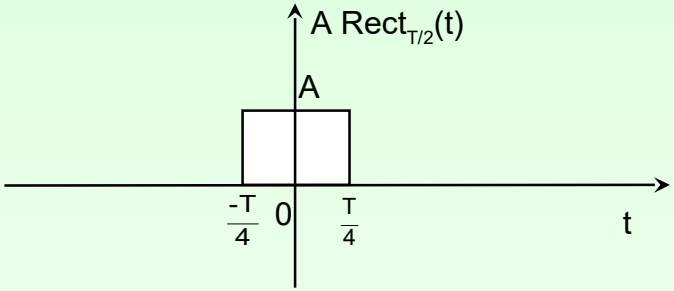


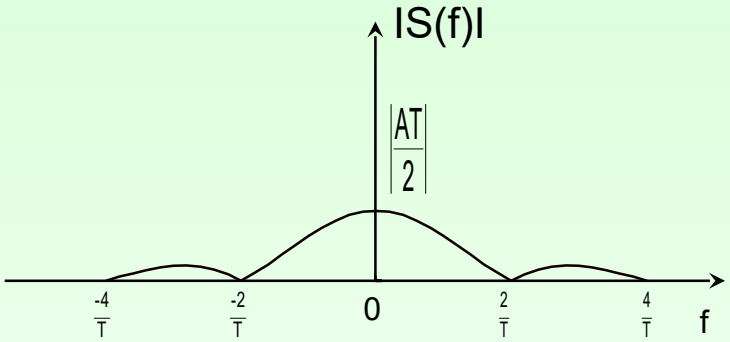


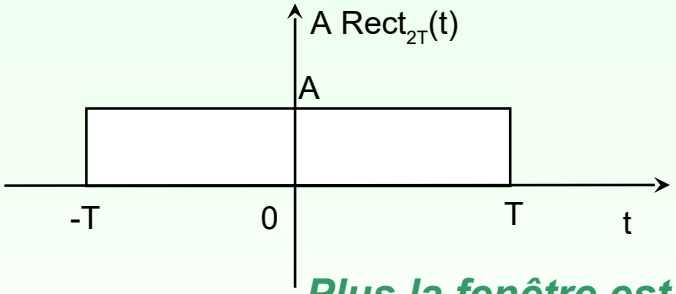
Influence de la largeur de la fenêtre sur le spectre d'une fenêtre rectangulaire

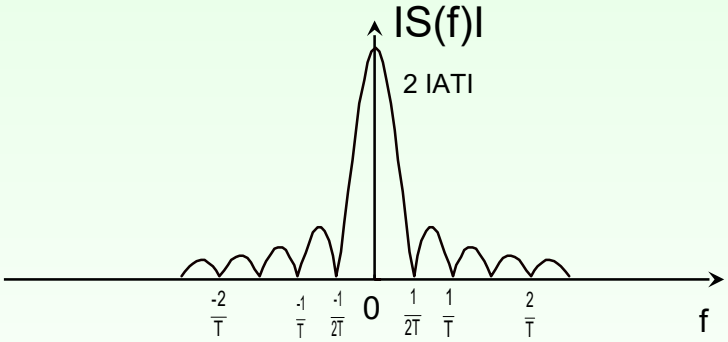










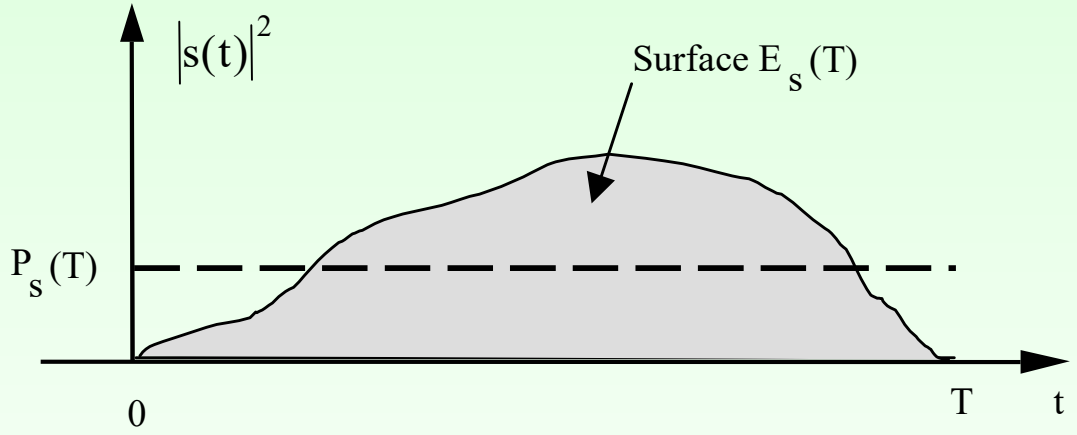


Plus la fenêtre est large, plus le spectre est étroit

Densité Spectrale d'Energie (DSE) (1/2)

- Energie d'un signal $$E_S = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 \, dt$$

- La fonction $|s(t)|^2$ caractérise la répartition de l'énergie dans le temps, c'est une densité temporelle d'énergie.



Densité Spectrale d'Energie (DSE) (2/2)

Par analogie avec la densité temporelle d'énergie, on définit la densité spectrale d'énergie (DSE) d'un signal à énergie finie par :

$$\Phi_S(f) = F\left(\varphi_{ss}(\tau)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{ss}(\tau) e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau$$

avec $\varphi_{ss}(\tau)$ la fonction d'autocorrélation du signal à énergie finie définie par :

$$\varphi_{ss}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(t)\, s(t+\tau)\, dt$$

$s^*(t)$ étant l'expression conjuguée de s(t).

La densité spectrale d'énergie d'un signal à énergie finie est donc par définition la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation du signal.

En vertu des propriétés de la fonction d'autocorrélation d'un signal, on montre que la densité spectrale d'énergie d'un signal à énergie finie est également égale à :

$$\Phi_S(f) = F\left(\varphi_{ss}(\tau)\right) = F\left(s^*(-\tau) * s(\tau)\right) = S^*(f)\, S(f)$$

$$\boxed{\Phi_S(f) = |S(f)|^2}$$

DSE d'un signal causal à décroissance exponentielle

III. Transformée de Fourier à temps continu de signaux à puissance moyenne finie

III.2 Définition

Les signaux à puissance moyenne finie ne satisfont pas les critères habituels de convergence de la transformée de Fourier. On peut néanmoins étendre la transformée de Fourier au cas des signaux à puissance moyenne finie à l'aide de la théorie des distributions. La définition de la transformée de Fourier de signaux à puissance moyenne finie est alors rigoureuse et fait appel à l'utilisation de la distribution ou impulsion de Dirac dont la transformée de Fourier est égale à 1.

$$\boxed{F(\delta(t)) = 1}$$

En effet, d'après la définition de l'impulsion de Dirac, on a :

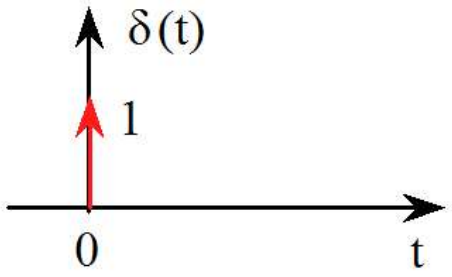
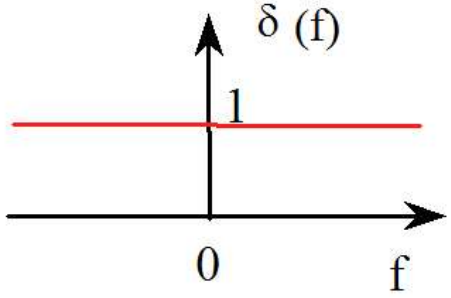
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, s(t - t_o)\, dt = s(t)\Big|_{t=t_o} = s(t_o)$$

On en déduit donc :

$$F(\delta(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt = e^{-j2\pi ft}\Big|_{t=t_o=0} = 1$$

Impulsion de Dirac et TFTC

$$F(\delta(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt = e^{-j2\pi ft}\Big|_{t=t_o=0} = 1$$

Domaine temporel	Domaine fréquentiel
	
Impulsion de Dirac	*Spectre d'une impulsion de Dirac*

Par application directe des propriétés de la transformée de Fourier, on a :

$$F(\delta(t - t_o)) = e^{-j2\pi ft_o}$$

De la dualité temps-fréquence, on en déduit :

$$F\left(e^{j2\pi f_o t}\right) = \delta(f - f_o)$$

Densité Spectrale de Puissance (DSP)

$$\Phi_S(f) = F\left(\varphi_{ss}(\tau)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{ss}(\tau) e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau$$

avec $\varphi_{ss}(\tau)$ la fonction d'autocorrélation du signal à puissance moyenne finie définie par :

$$\varphi_{ss}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^*(t)\, s(t+\tau)\, dt$$

C'est par définition la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation.

Au contraire de la densité spectrale d'énergie, la densité spectrale de puissance d'un signal n'est pas égale au carré du module de la transformée de Fourier du signal :

$$\Phi_S(f) \neq |S(f)|^2$$

Transformée de Fourier à temps continu de signaux périodiques

Soit un signal périodique s(t) de période To. Celui-ci peut être décomposé en série de Fourier et s'écrire sous la forme :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn2\pi f_o t} = \ldots + c_{-1} e^{-j2\pi f_o t} + c_0 + c_1 e^{j2\pi f_o t} + \ldots$$

où les coefficients c_n sont les coefficients de Fourier du signal périodique s(t) donnés par :

$$c_n = \frac{1}{T_o} \int_{t_0}^{t_0+T_o} s(t) e^{-jn2\pi f_o t} dt$$

En exploitant la relation établie précédemment :

$$F\left(e^{j2\pi f_o t}\right) = \delta(f - f_o)$$

La transformée de Fourier (au sens des distributions) du signal périodique est définie par :

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, \delta\left(f - \frac{n}{T_o}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, \delta(f - nf_o)$$

La transformée de Fourier à temps continu d'un signal périodique est donc une somme d'impulsions de Dirac régulièrement espacées de $f_o = \frac{1}{T_o}$ pondérées par les coefficients de Fourier du signal.

Spectres d'amplitude et de phase

IV.2 Spectres d'amplitude et de phase

Par convention et pour garder une parenté d'écriture avec celle utilisée dans le cas des signaux à énergie finie mais aussi pour retrouver des tracés homogènes avec ceux obtenus à partir de la décomposition en série de Fourier, le module et l'argument de la transformée de Fourier d'un signal périodique sont définis par :

$$|S(f)| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| \, \delta(f - nf_o)$$

$$\varphi(f) = \text{Arg } c_n \big|_{f=nf_o}$$

Les tracés de $|S(f)|$ et $\varphi(f)$ en fonction de la fréquence représentent respectivement le spectre d'amplitude et le spectre de phase du signal s(t) obtenus par transformée de Fourier.

Dans le cas d'un signal à valeurs réelles, le spectre d'amplitude est pair alors que le spectre de phase est impair.

Le tracé des spectres d'amplitude et de phase d'un signal périodique obtenu par transformée de Fourier à temps continu fait apparaître des impulsions de Dirac contrairement aux spectres tracés dans le cadre de la décomposition en série de Fourier du signal périodique qui font apparaître des raies. On parle néanmoins dans les deux cas de spectres de raies caractéristiques de signaux périodiques à temps continu.

TFTC d'un signal sinusoïdal

DSP (Densité Spectrale de Puissance) d'un signal périodique

Rappelons que la densité spectrale de puissance (DSP) d'un signal à puissance moyenne finie est définie comme la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation du signal ici périodique :

$$\Phi_S(f) = F\left(\varphi_{ss}(\tau)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{ss}(\tau) e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau$$

avec $\varphi_{ss}(\tau)$ la fonction d'autocorrélation du signal périodique définie par :

$$\varphi_{ss}(\tau) = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} s^*(t)\, s(t+\tau)\, dt$$

En utilisant le développement en série de Fourier du signal périodique, on montre que la fonction d'autocorrélation peut également s'écrire :

$$\varphi_{ss}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 e^{j2\pi n\tau f_o}$$

La densité spectrale de puissance (DSP) d'un signal périodique peut donc également s'écrire sous la forme :

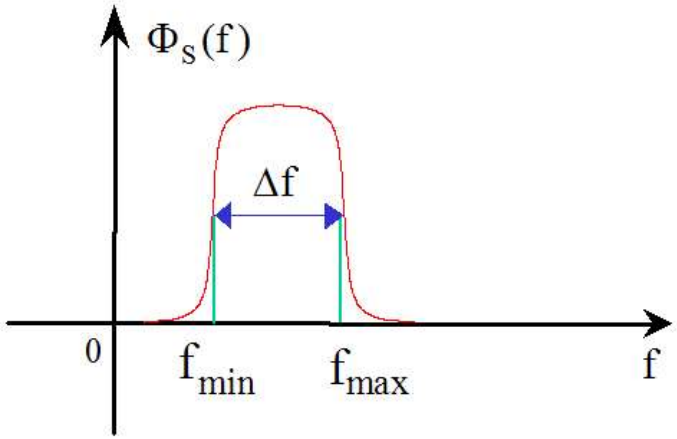
$$\boxed{\Phi_S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2\, \delta(f - nf_o)}$$

Largeur de bande d'un signal

Le domaine des fréquences Δf occupé par le spectre d'un signal est appelé largeur de bande du signal qui peut être définie par :

$$\Delta f = f_{max} - f_{min}$$

La largeur de bande d'un signal est exprimée en hertz (Hz).



Représentation spectrale et notion de largeur de bande d'un signal

Signaux à large bande et à bande étroite

En considérant la fréquence moyenne définie par :

$$f_{moy} = \frac{f_{max} + f_{min}}{2}$$

On peut distinguer deux types de signaux :

- Les signaux à bande étroite pour lesquels on a $\frac{\Delta f}{f_{moy}}$ petit soit $f_{max} \approx f_{min}$
- Les signaux à large bande pour lesquels on a $\frac{\Delta f}{f_{moy}}$ grand soit $f_{max} >> f_{min}$

Un signal dont le spectre est nul en dehors d'une bande de fréquence spécifiée telle que :

$$\Phi_S(f) = 0 \quad \forall |f| \notin \Delta f$$

est appelé ***signal à bande limitée*** ou encore ***de spectre à support borné***.

Les signaux à bande étroite peuvent être classés en fonction du domaine de variation de la fréquence moyenne définie précédemment :

Caractéristiques des ondes hertziennes

Bande de fréquences	Longueur d'onde	Désignation métrique	Désignation courante	Abréviation internationale
10kHz à 30 kHz	30km à 10km	Ondes myriamétriques	Très basses fréquences Very Low Frequencies	VLF
30kHz à 300 kHz	10km à 1km	Ondes kilométriques	Basses fréquences Low Frequencies	LF
300kHz à 3 MHz	1km à 100m	Ondes hectométriques	Fréquences moyennes Meduim Frequencies	MF
3 MHz à 30 MHz	100m à 10m	Ondes décamétriques	Hautes fréquences High Frequencies	HF
30 MHz à 300 MHz	10m à 1m	Ondes métriques	Très hautes fréquences Very High Frequencies	VHF
300 MHz à 3 GHz	1m à 10cm	Ondes décimétriques	Ultra hautes fréquences Ultra High Frequencies	UHF
3 GHz à 30 GHz	10cm à 1cm	Ondes centimétriques	Super hautes fréquences Super High Frequencies	SHF
30 GHz à 300 GHz	1cm à 1mm	Ondes millimétriques	Hyper fréquences Extremely High Frequencies	EHF

Bande passante d'un support de transmission



Lors de la transmission, le message, à travers le signal qui le représente, subit des dégradations dues aux imperfections du canal de transmission, aux interférences entre signaux provenant d'émetteurs différents et au bruit inhérent au milieu de propagation.

Un premier moyen de caractériser ces dégradations consiste à comparer le signal reçu s(t) par le récepteur au signal émis e(t). Cette comparaison se fait en général en calculant le rapport des puissances des deux signaux par le logarithme à base 10 de leur rapport. Ce rapport encore appelé gain est alors exprimé en « bel (B) » mais l'unité pratique est le décibel (dB) :

$$A_{db} = 10\log_{10}\left(\frac{P_s}{P_e}\right)$$

Si $A_{db}=0$ alors $P_s=P_e$

Si $A_{db}>0$ alors $P_s>P_e$, il y a amplification du signal émis.

Si $A_{db}<0$ alors $P_s<P_e$, il y a atténuation du signal émis.

La valeur du gain A_{db} est généralement fonction de la fréquence.

En effet, tout canal de transmission est imparfait et ne laissera passer que les fréquences contenues dans le signal comprises dans une zone caractéristique. Cette zone caractéristique correspond à un intervalle de fréquences appelé bande passante (BP).