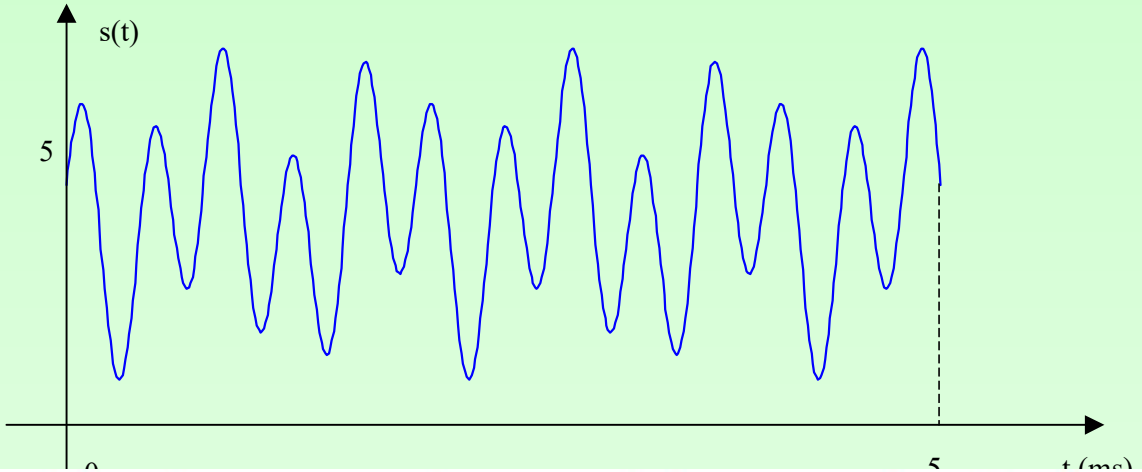
Décomposition en série de Fourier de signaux périodiques à temps continu

Pour le calcul des SPECTRES des signaux périodiques à temps continu

1. Introduction (1/3)



L'observation de l'évolution du signal au cours du temps permet en effet de déterminer approximativement les valeurs moyenne, maximale et minimale du signal à temps continu. Celle-ci permet également de visualiser le caractère périodique du signal.

L'expression mathématique du signal tracé ci-dessus est :

$$s(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t - \varphi_0) + A_1 \cos(2\pi f_1 t - \varphi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t - \varphi_2)$$

avec

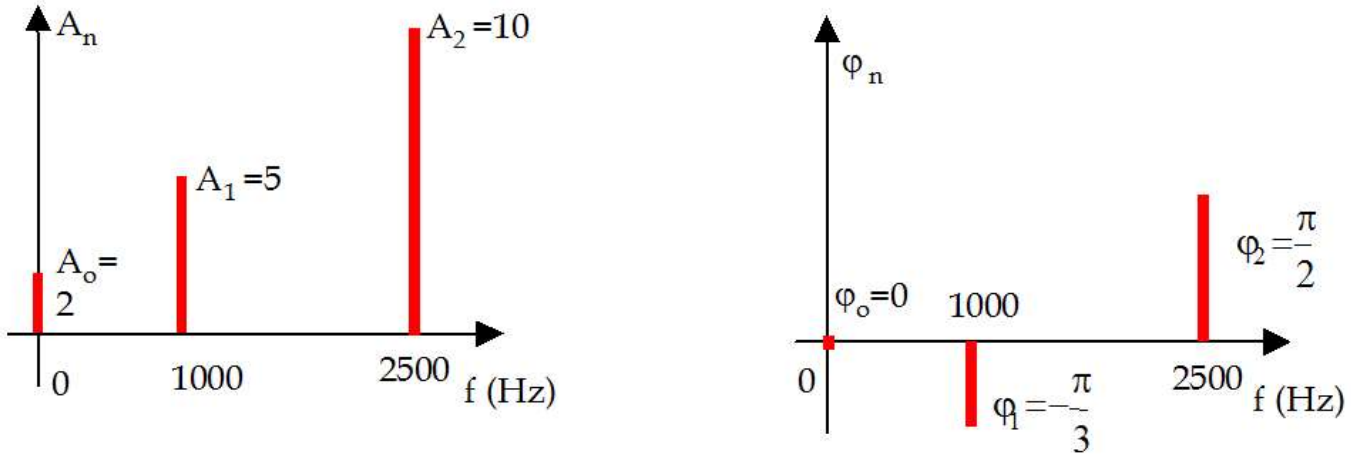
$$A_0 = 2 \quad f_0 = 0 \quad \varphi_0 = 0$$

$$A_1 = 5 \quad f_1 = 1000 \quad \varphi_1 = -\frac{\pi}{3}$$

$$A_2 = 10 \quad f_2 = 2500 \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

1. Introduction (2/3)

Cette nouvelle représentation devra faire directement apparaître certaines caractéristiques du signal (par exemple les amplitudes et les déphasages A_0, A_1, A_2, φ_0, φ_1, φ_2), non plus dans le domaine temporel mais dans le domaine fréquentiel, c'est à dire en fonction de la fréquence. La représentation fréquentielle (à travers les deux tracés des valeurs de A_n et φ_n en fonction de la fréquence) obtenue dans le cas de l'exemple considéré est celle présentée sur la figure ci-dessous :



Cette représentation fréquentielle permet ainsi de déduire directement l'expression mathématique du signal sachant que s(t) s'écrit sous la forme :

$$s(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t - \varphi_0) + A_1 \cos(2\pi f_1 t - \varphi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t - \varphi_2)$$

1. Introduction (3/3)

L'analyse dans le domaine fréquentiel permet également de faire apparaître les plages de fréquences utilisées par le signal.

Les outils mathématiques qui permettent de passer du domaine temporel au domaine fréquentiel ont été développés par Joseph Fourier (1768-1830), grand savant français, qui a profondément influencé les mathématiques et la physique des sciences de son siècle. L'étude de la propagation de la chaleur l'a amené à la découverte des séries trigonométriques portant son nom et qui sont présentées dans la suite de ce chapitre.



Joseph Fourier (1768-1830)

Théorème de Fourier

Sous certaines conditions de dérivation et de continuité, tout signal continu s(t) périodique de période T peut s'écrire sous la forme d'une somme de signaux sinusoïdaux.

Cette somme peut s'écrire de deux manières :

- **forme trigonométrique réelle**

- **forme exponentielle complexe**

2. Forme trigonométrique réelle

Tout signal continu s(t) périodique de période T peut s'écrire sous la forme :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega_p t) + b_n \sin(n\omega_p t)$$

avec : $\omega_p = \frac{2\pi}{T}$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\cos(n\omega_p t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\sin(n\omega_p t)dt$$

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega_p t - \varphi_n)$$

avec : $\omega_p = \frac{2\pi}{T}$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad A_n \geq 0 \quad \forall\, n$$

$$\varphi_n = \arctan\frac{b_n}{a_n}$$

Le terme général $u_n(t)=a_n\cos(n\omega_p t)+b_n\sin(n\omega_p t)$ est un signal sinusoïdal appelé

harmonique de rang n

Remarques et propriétés

Remarques

- a_0 : ***valeur moyenne*** du signal (composante continue)
- Harmonique d'ordre 1 : ***fondamental***
- Amplitudes A_n tendent vers 0 lorsque n tend vers l'infini
- Décomposition indépendante de l'intervalle $[t_0, t_0+T]$

Propriétés

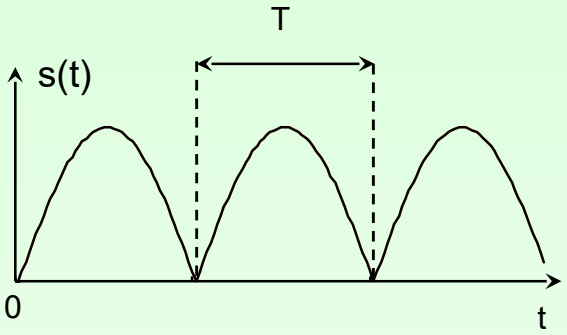
- Si s(t) pair $\Rightarrow$ $\boxed{b_n = 0 \qquad \forall\, n}$
- Si s(t) impair $\Rightarrow$ $\boxed{a_n = 0 \qquad \forall\, n}$

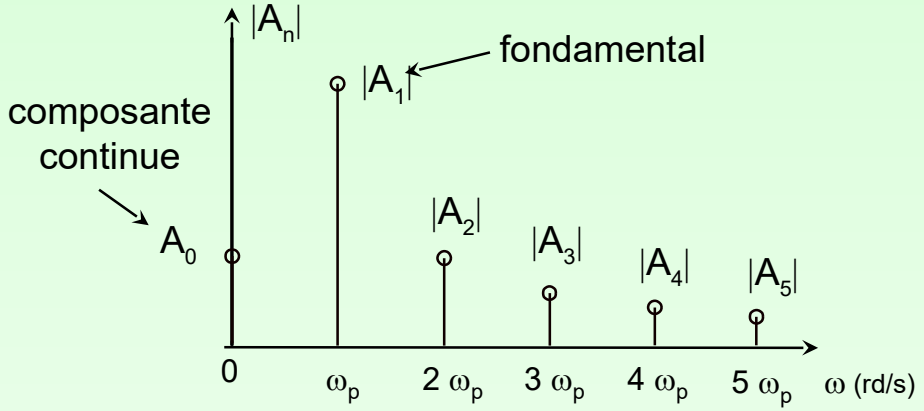
Spectre de fréquences unilatéral

Spectre en amplitude de s(t) : tracé de A_n en fonction des pulsations (on parle de représentation spectrale).

A_n n'existant que pour des multiples entiers de $\omega_p = \frac{2\pi}{T}$,

on parle de ***spectre de raies***.

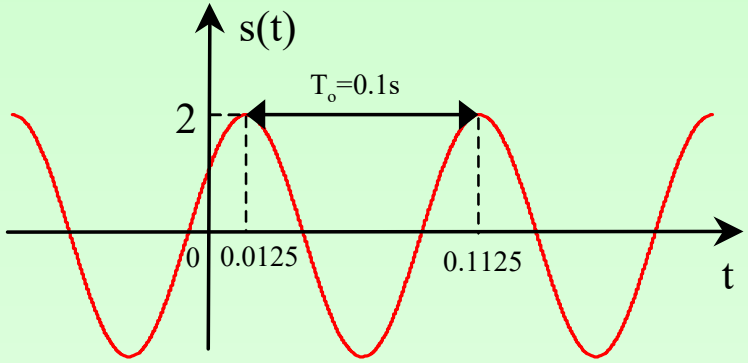




Spectre de raies unilatéral

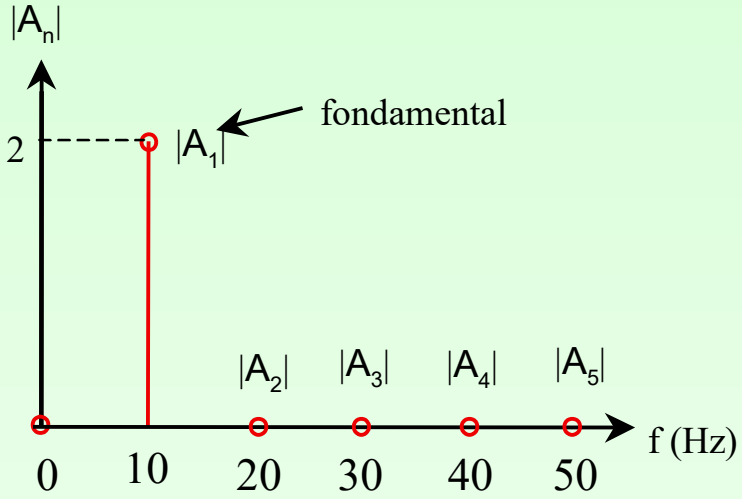
Exemple : cas de la sinusoïde

$$s(t) = 2\cos(2\pi 10\,t - \frac{\pi}{4})$$

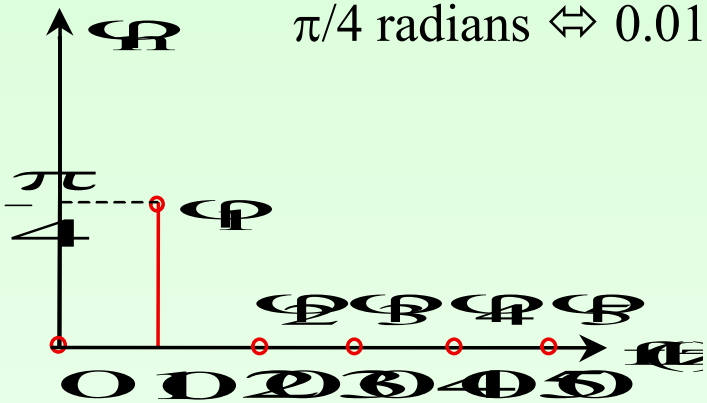


2π radians ⇔ 0.1 s.

$\pi/4$ radians ⇔ 0.0125 s.



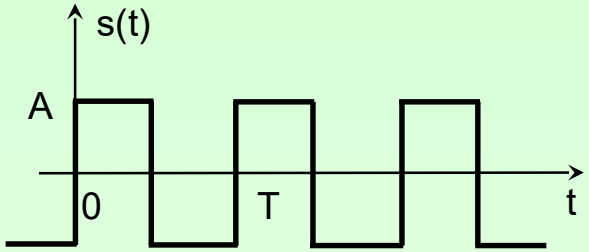
Spectre unilatéral d'amplitude



Spectre unilatéral de phase

Exemple: cas d'un créneau

Déterminer le développement en série de Fourier du signal représenté ci-dessous. Tracer le spectre unilatéral.

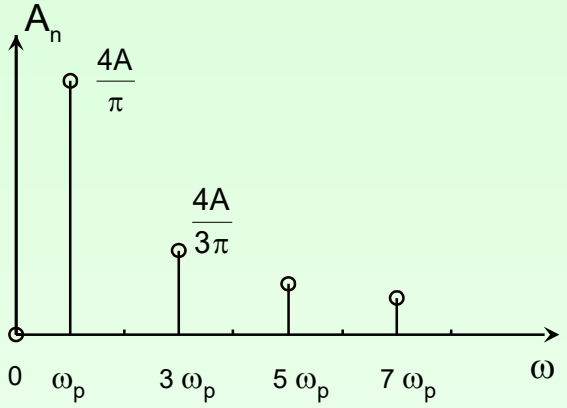


Solution :

Le signal carré peut s'écrire :

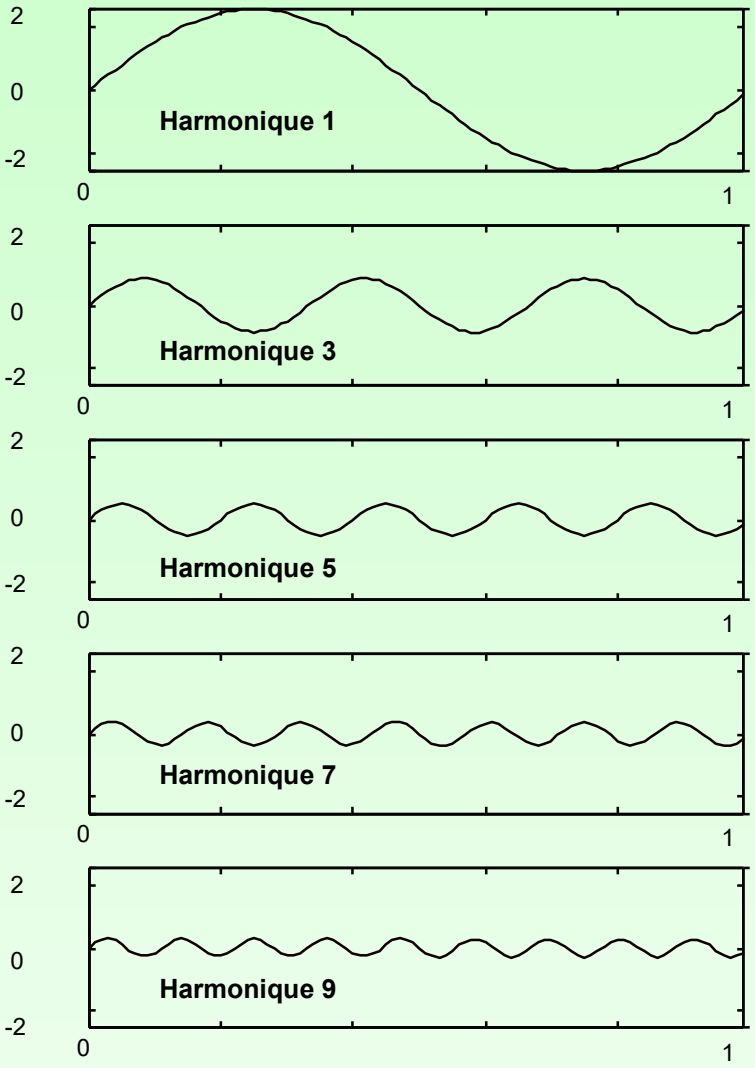
$$s(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{4A}{(2j+1)\pi} \sin\left((2j+1)\omega_p t\right) \qquad j = 0, 1, \ldots$$

$$s(t) = \frac{4A}{\pi}\sin\left(\omega_p t\right) + \frac{4A}{3\pi}\sin\left(3\omega_p t\right) + \frac{4A}{5\pi}\sin\left(5\omega_p t\right) + \ldots$$

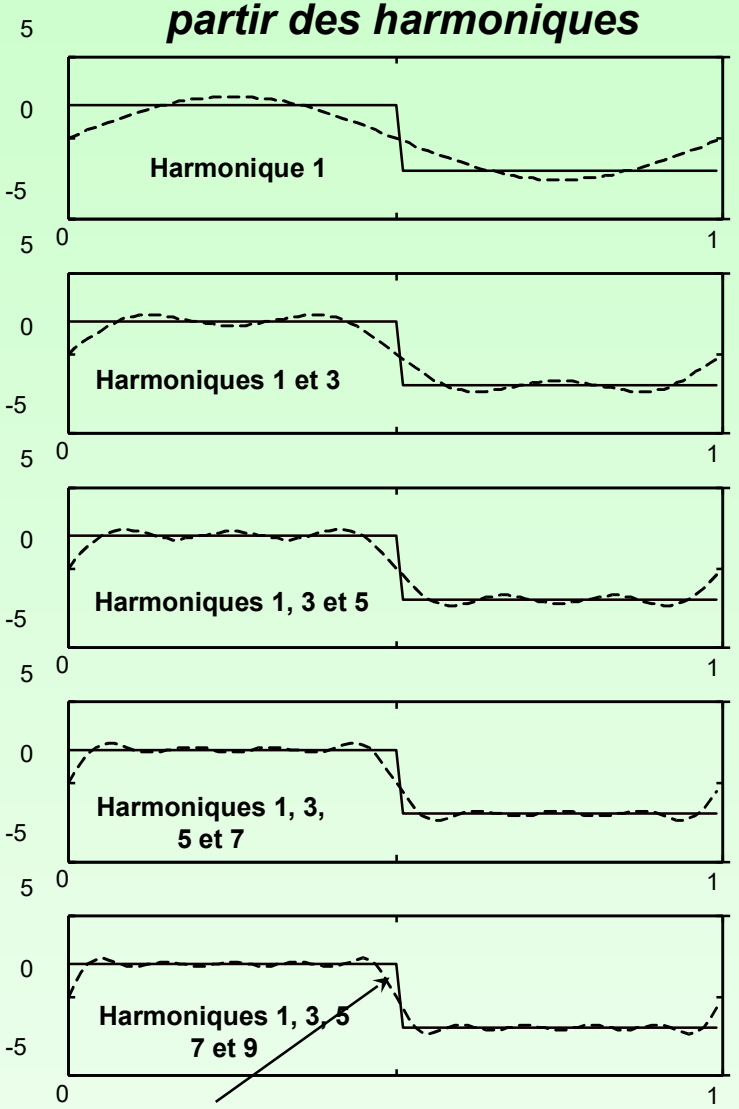


Spectre de raies unilatéral

Evolution temporelle des harmoniques



Reconstruction du signal à partir des harmoniques



Ondulations = phénomène de Gibs

3. Forme exponentielle complexe

Tout signal continu s(t) périodique de période T peut également s'écrire :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-jn\omega_p t}$$

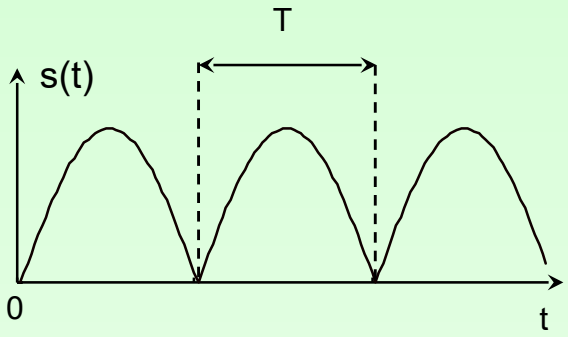
$$c_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t) e^{-jn\omega_p t} dt$$

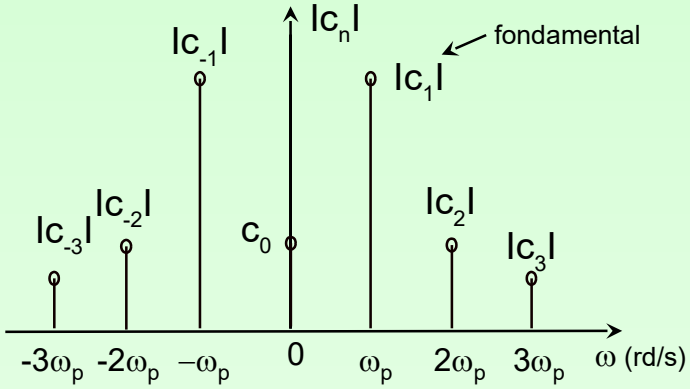
Remarques :

- Apparition d'harmoniques pour des fréquences <0
- c_n et c_{-n} : nombres complexes sans existence réelle
- $c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$ si $n > 0$, $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_{-n} + jb_{-n})$ si $n < 0$, $c_0 = a_0$
- $c_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\,dt = a_0$
- $2|c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = A_n \quad n \neq 0$: amplitude de l'harmonique n
- $\mathrm{Arg}(c_n) = -\arctan\frac{b_n}{a_n} = -\varphi_n \quad n \neq 0$: phase de l'harmonique n
- $\tan\varphi_n = -\frac{\mathrm{Im}(c_n)}{\mathrm{Re}(c_n)}$

Spectre de fréquences bilatéral (1/2)

Apparition dans l'expression de s(t) d'harmoniques pour les fréquences s'étendant de moins l'infini à plus l'infini, d'où le nom de ***spectre bilatéral***.





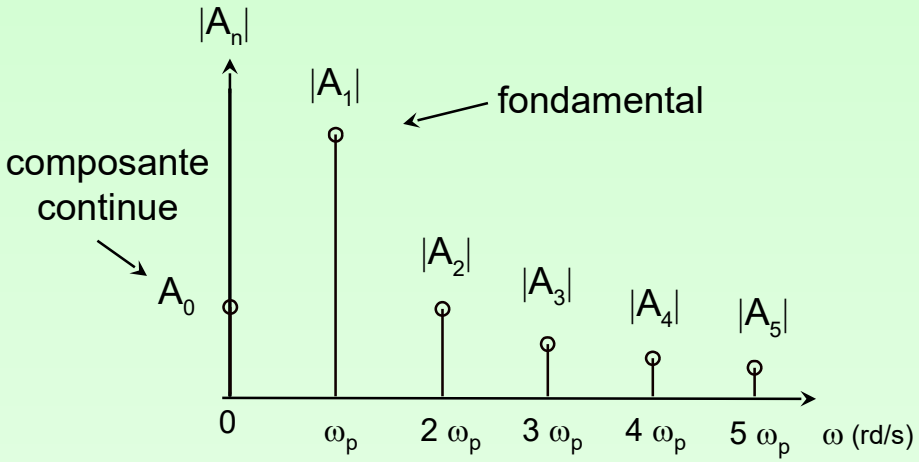
Spectre de raies bilatéral

Raies pour n<0 : aucune signification physique.

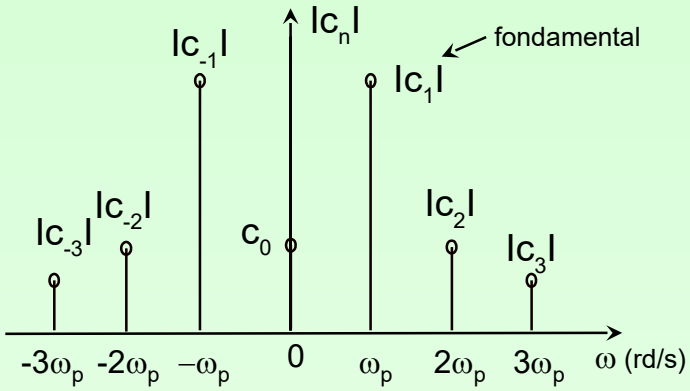
Partie droite du spectre suffit à la description du développement.

$|c_n| = \frac{A_n}{2}$ indique que le spectre bilatéral comporte une amplitude pour les harmoniques, 2 fois plus faible que celle rencontrée pour le spectre unilatéral.

Comparaison spectres unilatéral-bilatéral

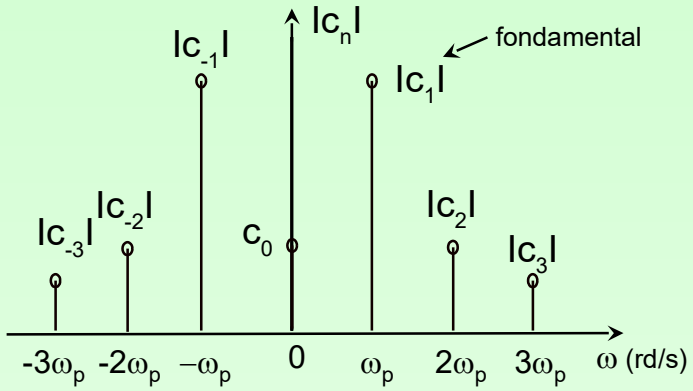


Spectre de raies unilatéral



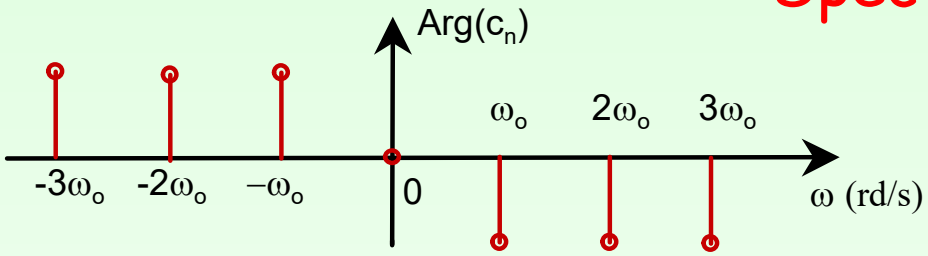
Spectre de raies bilatéral

Spectre de fréquences bilatéral (2/2)



Spectre de raies bilatéral

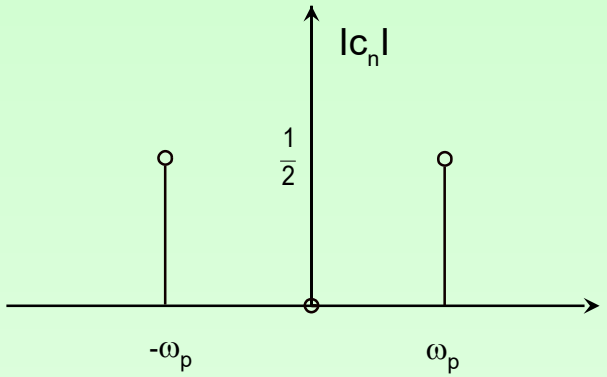
Spectre d'amplitude => pair



Spectre de phase => impair

Exemple 1 : cas d'un signal sinusoïdal

Soit $s(t) = \cos(\omega_p t + \phi)$



Spectre de raies bilatéral

On peut écrire :

$$s(t) = \frac{e^{j(\omega_p t+\phi)} + e^{-j(\omega_p t+\phi)}}{2}$$

$$s(t) = \frac{e^{j\omega_p t}e^{j\phi} + e^{-j\omega_p t}e^{-j\phi}}{2}$$

et si $n = 1$

$$u_1(t) = c_1 e^{j\omega_p t} + c_{-1} e^{-j\omega_p t}$$

d'où

$$s(t) = u_1(t)$$

avec

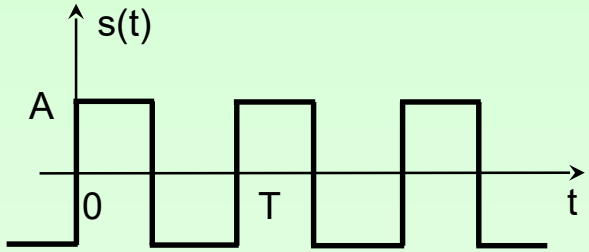
$$c_1 = \frac{e^{j\phi}}{2} \qquad |c_1| = \frac{1}{2}$$

$$c_{-1} = \frac{e^{-j\phi}}{2} \qquad |c_{-1}| = \frac{1}{2}$$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-jn\omega_p t}$$

Exemple 2 : cas d'un créneau

Déterminer la forme exponentielle complexe du développement en série de Fourier du signal représenté ci-dessous. Tracer le spectre bilatéral.

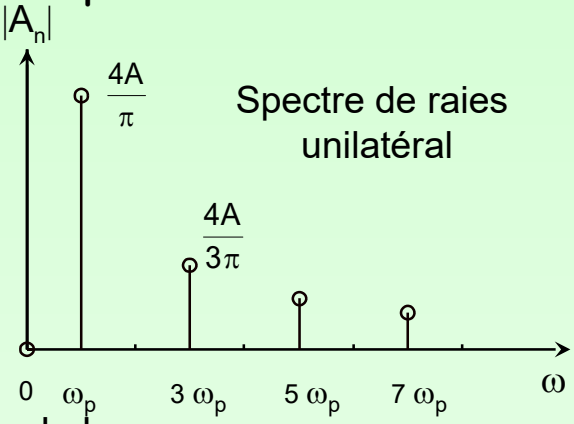


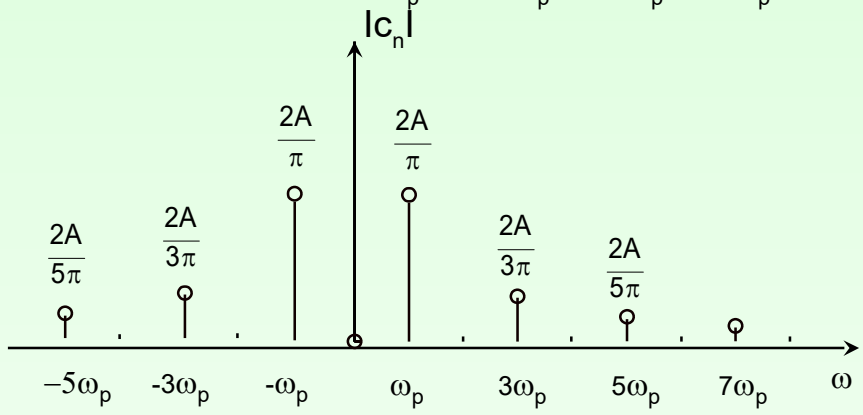
Solution :

$$c_n = \frac{A}{jn\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

si $n = 2k$ $\quad |c_{2k}| = 0$

si $n = 2k+1$ $\quad |c_{2k+1}| = \frac{2A}{(2k+1)\pi} = \frac{A_n}{2}$





Spectre de raies bilatéral

Identité de Parseval

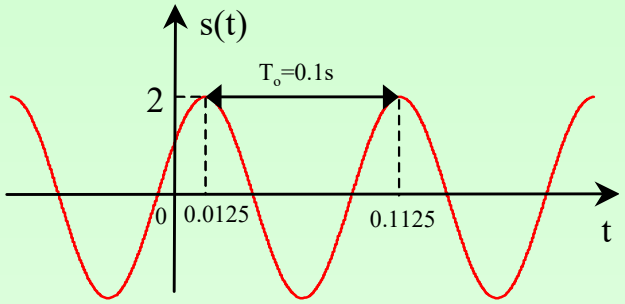
Les signaux périodiques sont des signaux à énergie infinie mais à puissance moyenne finie

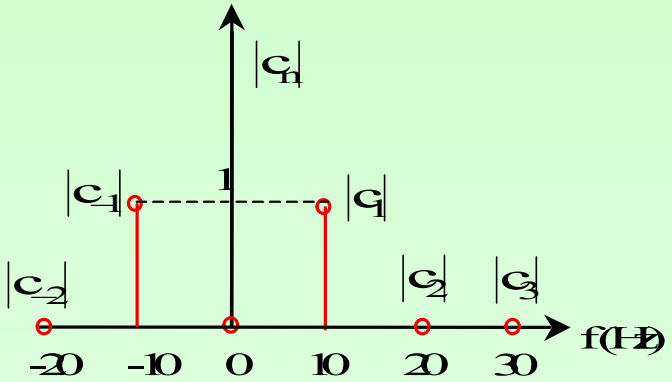
L'identité de Parseval permet alors d'exprimer la puissance moyenne d'un signal périodique de période To de deux manières différentes

$$P_S = \frac{1}{T_o}\int_0^{T_o} |s(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

L'identité de Parseval montre que la puissance du signal peut être calculée arbitrairement dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel.

Identité de Parseval : exemple





$$s(t) = 2\cos(2\pi 10\,t - \frac{\pi}{4})$$

Spectre bilatéral d'amplitude

La puissance moyenne calculée à partir de la définition dans le domaine temporel est :

$$P_S = \frac{1}{T_o}\int_0^{T_o} |s(t)|^2\,dt = 2$$

La puissance moyenne calculée à partir de la définition dans le domaine fréquentiel est :

$$P_S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = |c_{-1}| + |c_1| = 2$$

On vérifie ainsi sur un exemple simple l'égalité de Parseval.