Introduction au Traitement du Signal

Etude des signaux à temps continu

Aspects mathématiques

- Nombres complexes
- Trigonométrie
- Dérivées et primitives, calcul intégral (intégration par parties)

Définition du signal

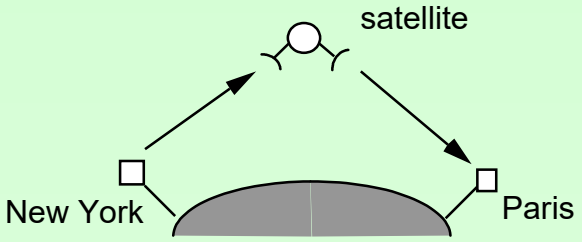
Un signal est la représentation physique de l'information qui est envoyée d'un système source vers un système récepteur.



Système de transmission

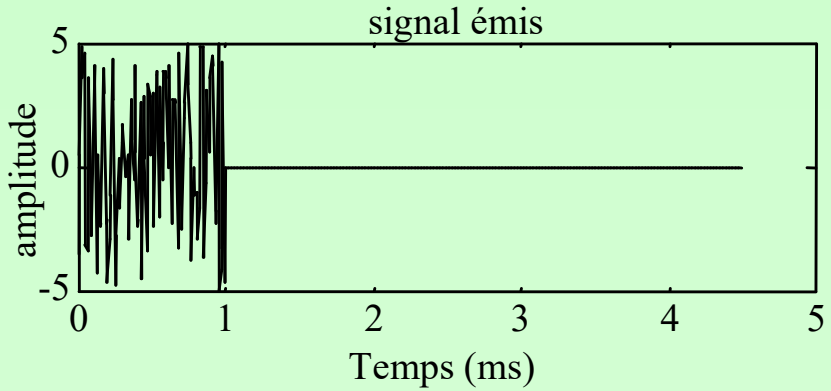
Exemples d'information véhiculée par un signal :

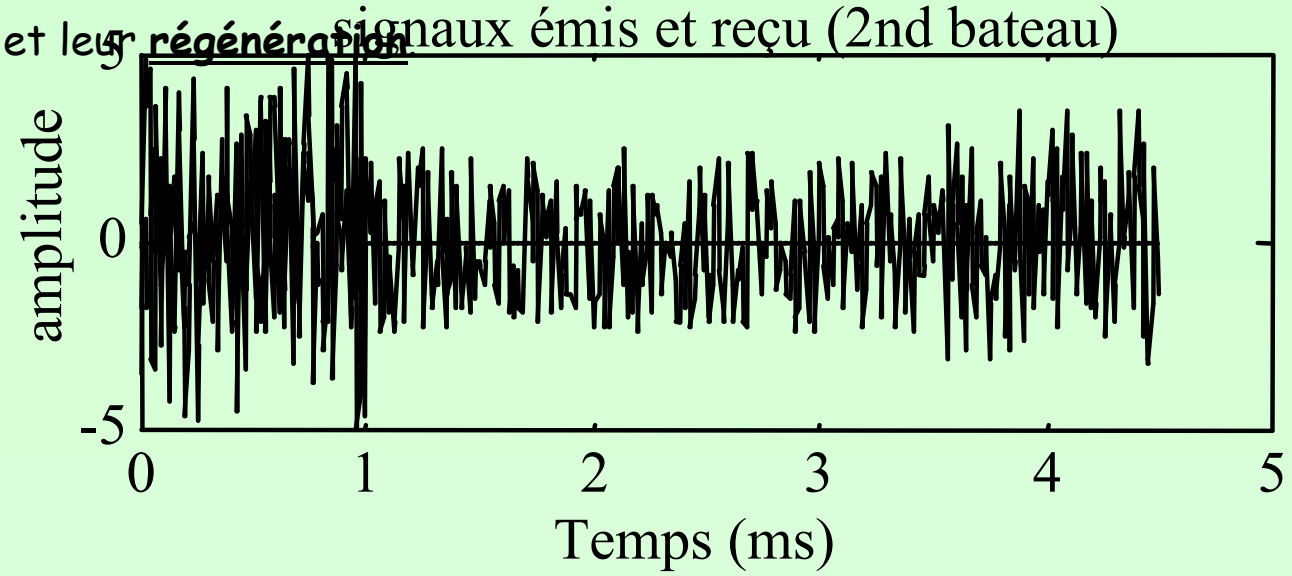
- ***Données informatiques sur un réseau***
- ***Parole et image en télécommunication***



Objectifs (1/2)

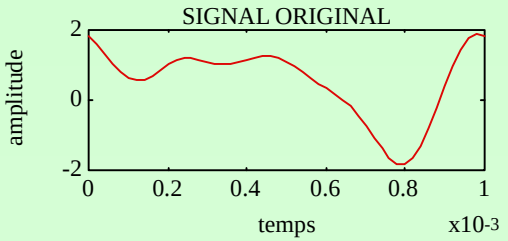
- **L'analyse** des signaux afin de quantifier dans quelle mesure ceux-ci ont pu être dégradés, notamment suite à une transmission (par câble, fibre optique, ou ondes électromagnétique (hertzien, paraboles…), et leur **régénération**.

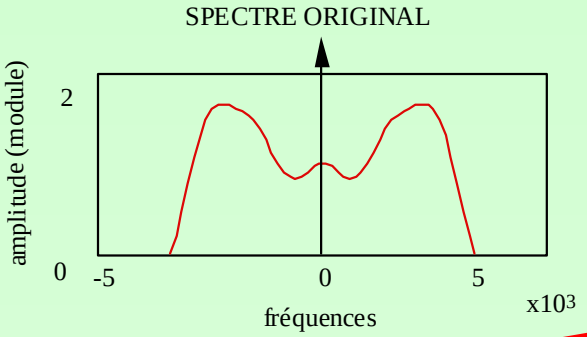




Objectifs (2/2)

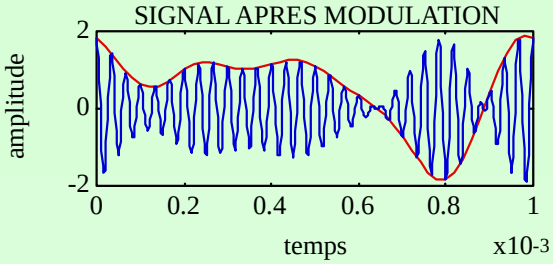
- Traitement volontaire des signaux afin de leur donner des caractéristiques intéressantes. Il s'agira essentiellement **d'adapter** le signal à son canal de transmission (câble coaxial ou paires, fibre optique, liaison hertzienne) ;
- A la réception, on devra pouvoir **restaurer** le signal original.

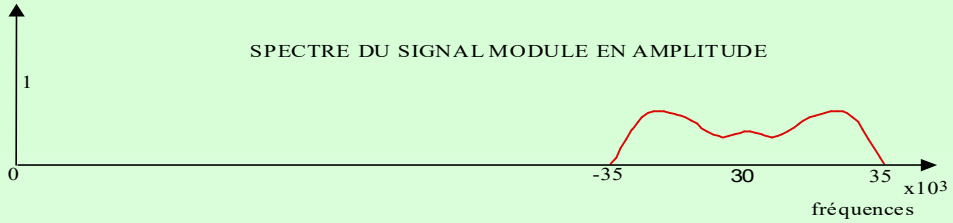




Signal original

Signal après modulation





Buts passage temporel ⇔ fréquentiel



Evolution de l'amplitude (niveau) en fonction du **temps** qui s'écoule



Fréquence minimale

Fréquence maximale

Evolution de l'amplitude (niveau) en fonction de la **fréquence** :

- Basses fréquences = sons graves
- Hautes fréquences = sons aigus

SPECTRE

Utilisation du serveur web "Traitement du signal"

Ce serveur est disponible à l'adresse suivante :

http://www.eaeeie.org/theiere/

http://www.eaeeie.org/pedagogical_resources.html

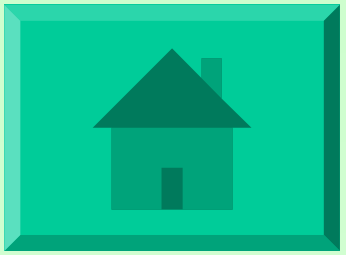
pour l'adresse principale à partir de laquelle vous avez accès à différentes parties qui peuvent vous intéresser (notamment la partie "computer").

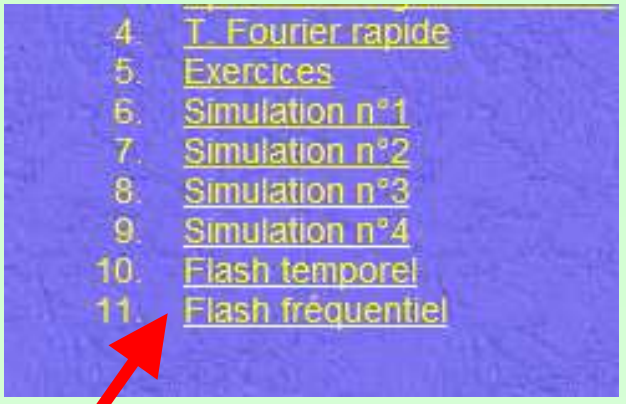
La partie sur le traitement du signal se trouve à l'adresse suivante :

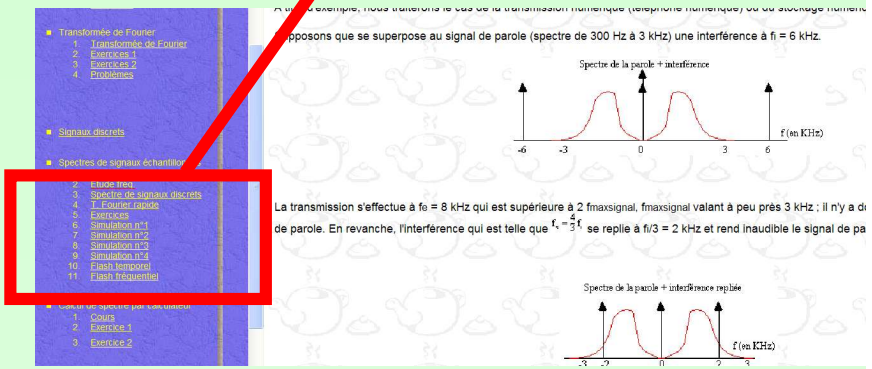
http://www.eaeeie.org/theiere_signal/

pour la partie française.

- Cours
- Exercices
- Simulations

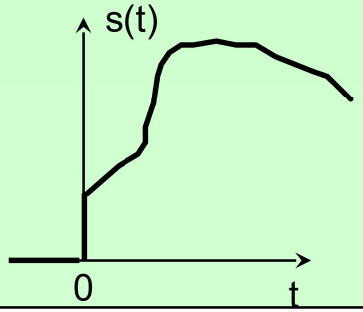






Signaux causaux, à temps continu, à temps discret

- **Signal causal**



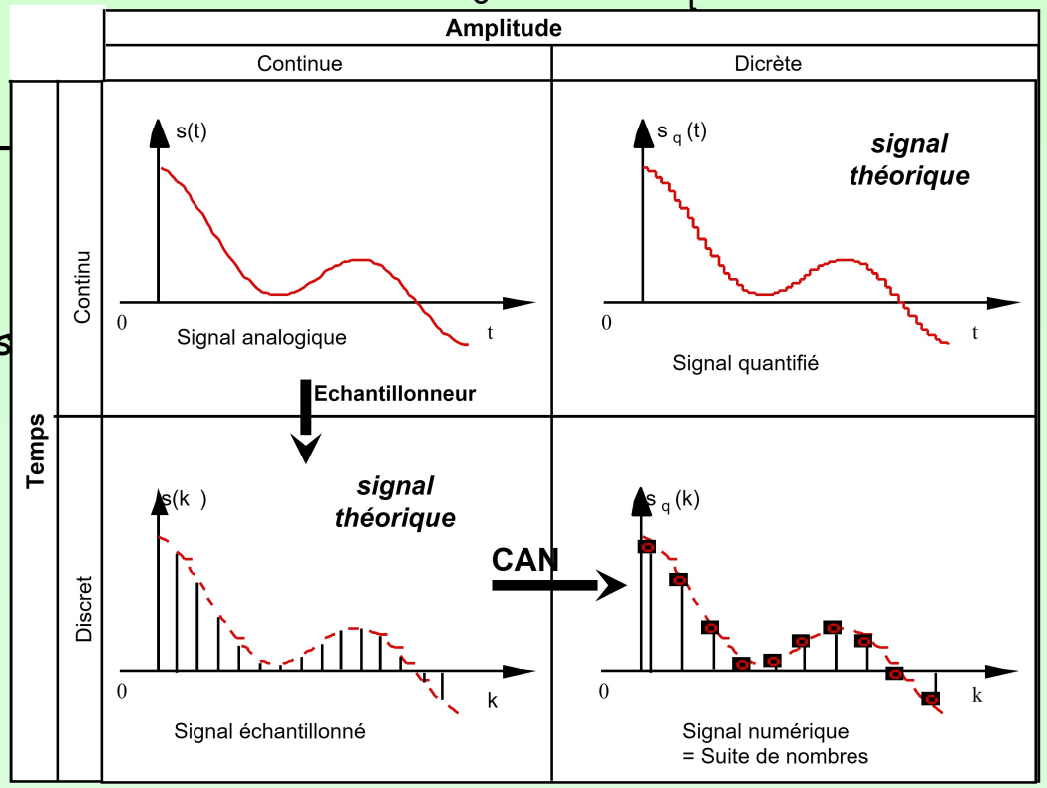
s(t)=0 pour t < 0

Signaux à temps continu discret

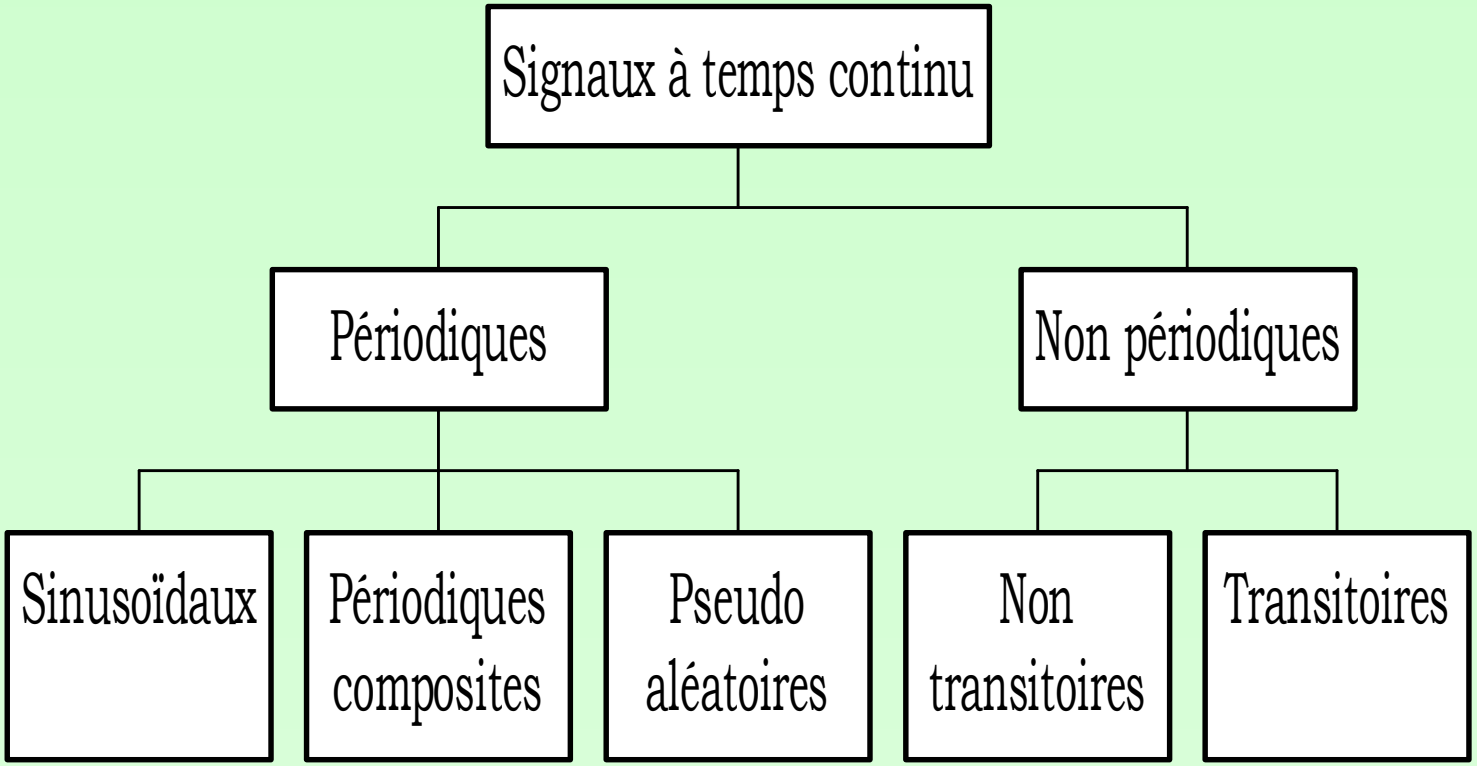
Un signal peut se présenter sous 4 formes différentes selon que :

- son ***amplitude*** est *continue ou discrète,*

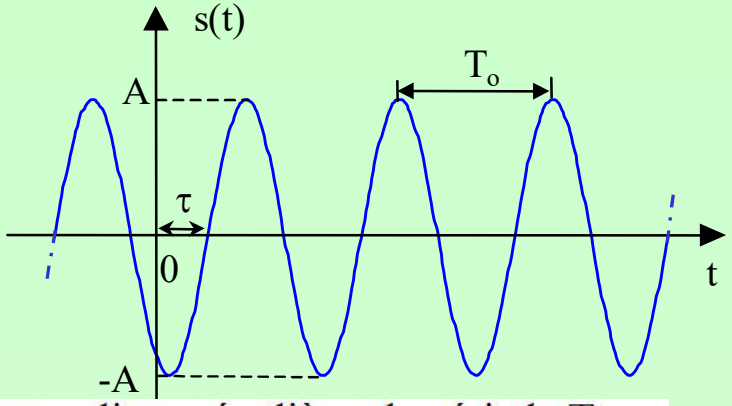
- le ***temps*** est *continu ou discret.*



Signaux à temps continu



Signaux périodiques (1/2)



- **<u>les signaux périodiques</u>** qui obéissent à une loi de répétition cyclique régulière, de période T_o :

$$s(t) = s(t + kT_o) \qquad k \in Z$$

On distingue dans cette classe :

- les *<u>signaux sinusoïdaux</u>* qui forment le groupe le plus familier des signaux périodiques. Sa loi d'évolution s'exprime à l'aide de la fonction sinus ou cosinus :

$$s(t) = A\sin(\omega_o t + \varphi) = A\sin(\omega_o (t + \tau)) = A\cos\left(\omega_o t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

avec A : l'amplitude du signal sinusoïdal

$\omega_o = \frac{2\pi}{T_o} = 2\pi f_o$: la pulsation du signal en rad/s

$f_o = \frac{1}{T_o}$: la fréquence du signal en Hz

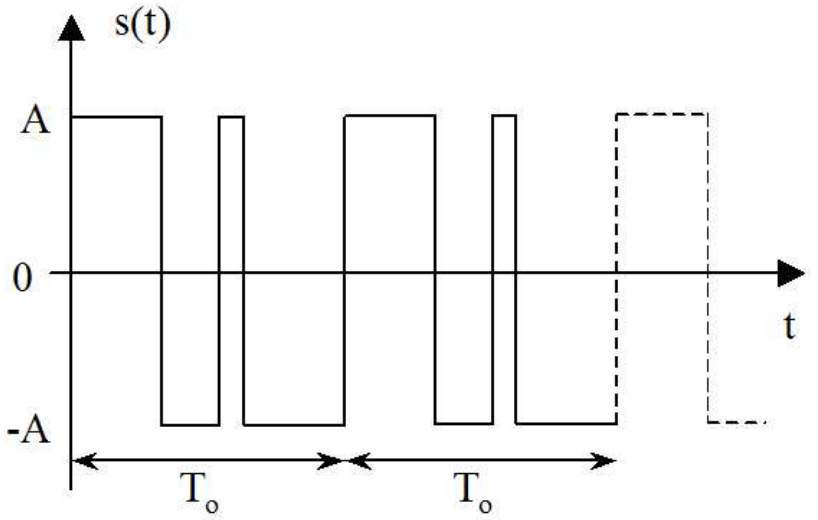
$\theta(t) = \omega_o t + \varphi$, la phase du signal en rad (appelée également phase instantanée)

$\varphi = \omega_o \tau$, la phase à l'origine($\varphi = \theta(0)$) (ou déphasage) du signal en rad

τ : le décalage du signal sinusoïdal par rapport à l'origine

Signaux périodiques (2/2)

- Les *signaux périodiques composites* qui sont constitués d'une somme de signaux sinusoïdaux.
- Les *signaux pseudo-aléatoires* qui forment une catégorie particulière de signaux périodiques dont le comportement rappelle celui d'un signal aléatoire, comme dans le cas par exemple d'une séquence binaire pseudo-aléatoire représentée ci-dessous.

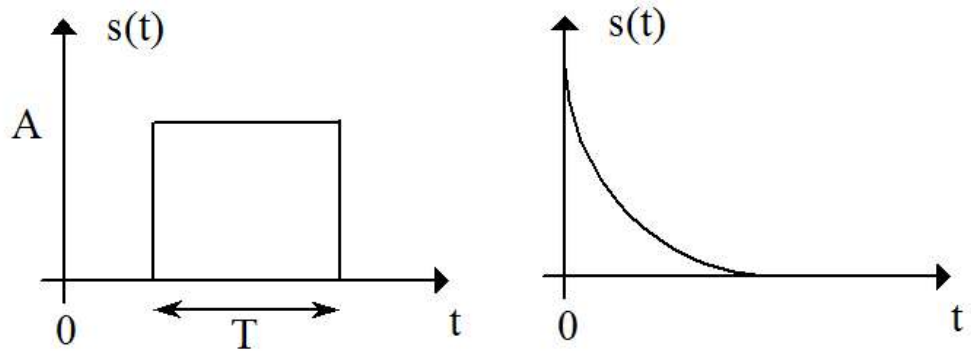


Séquence Binaire Pseudo-Aléatoire (SBPA)

Signaux non périodiques

- **les signaux non périodiques** qui ne présentent aucune périodicité.

On distingue dans cette classe les signaux non transitoires des signaux transitoires dont l'existence est éphémère.



Exemples de signaux transitoires

Valeurs caractéristiques de signaux à temps continu

- ***Valeur moyenne***

La valeur moyenne (moyenne temporelle) d'un signal s(t) est donnée par :

- ***Valeur efficace***

Le carré de la valeur efficace S_{eff} ou valeur RMS (Root Mean Squares) d'un signal s(t) est défini par :



T symbolise la « durée de vie totale » du signal

pour un signal **non périodique**

$$\bar{s} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)dt \qquad S_{eff}^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s^2(t)dt$$

$$\bar{s} = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} s(t)dt$$ pour un signal périodique de **période** T_o $$S_{eff}^2 = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} s^2(t)dt$$

Puissance et énergie des signaux à temps continu (1/3)

La puissance électrique instantanée fournie à une résistance R (ou conductance G=1/R) : produit des valeurs instantanées de la tension u(t) à ses bornes et du courant i(t) qui la traverse

$$P(t)=u(t)\,i(t) = R\,i^2(t)=G\,u^2(t)$$

L'énergie dissipée sur un intervalle $[t_1, t_2]$ avec $t_1 < t_2$ est l'intégrale de cette puissance instantanée et se mesure en Joules (J)

$$E(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} u(t)i(t)dt = R\int_{t_1}^{t_2} i^2(t)dt = G\int_{t_1}^{t_2} u^2(t)dt$$

La ***puissance moyenne*** calculée sur l'intervalle $[t_1, t_2]$, notée $P(t_1, t_2)$ mesurée en Watts (W) s'exprime par

$$P(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} E(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} u(t)i(t)dt$$

Puissance et énergie des signaux à temps continu (2/3)

Par extension et en considérant une résistance R égale à 1 Ω, l'***énergie*** calculée sur un intervalle $[t_1, t_2]$ d'un signal s(t) à valeur réelle ou complexe est définie par :

$$E_S(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 \, dt$$

La ***puissance moyenne*** calculée sur $[t_1, t_2]$ d'un signal s(t) est définie par :

$$P_S(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 \, dt$$

Puissance et énergie des signaux à temps continu (3/3)

En considérant un intervalle s'étendant sur tout l'axe réel, on définit ***l'énergie totale d'un signal*** s(t) par

$$E_S = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 \, dt$$

On peut noter que dans le cas d'un signal périodique, **<u>l'énergie totale est infinie</u>**.

La ***puissance moyenne totale*** d'un signal s(t) en distinguant le cas d'un signal périodique ou non s'exprime par

$$P_S = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 \, dt$$ pour un signal non périodique

$$P_S = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} |s(t)|^2 \, dt = S_{eff}^2$$ pour un signal périodique

Remarque : $P_S = S_{eff}^2$, c'est par définition le carré de sa valeur efficace

Classification « énergétique » des signaux

Les notions d'énergie et de puissance permettent de proposer une autre classification des signaux à temps continu en fonction de leur caractéristique énergétique. On distingue plus particulièrement deux catégories de signaux appelés:

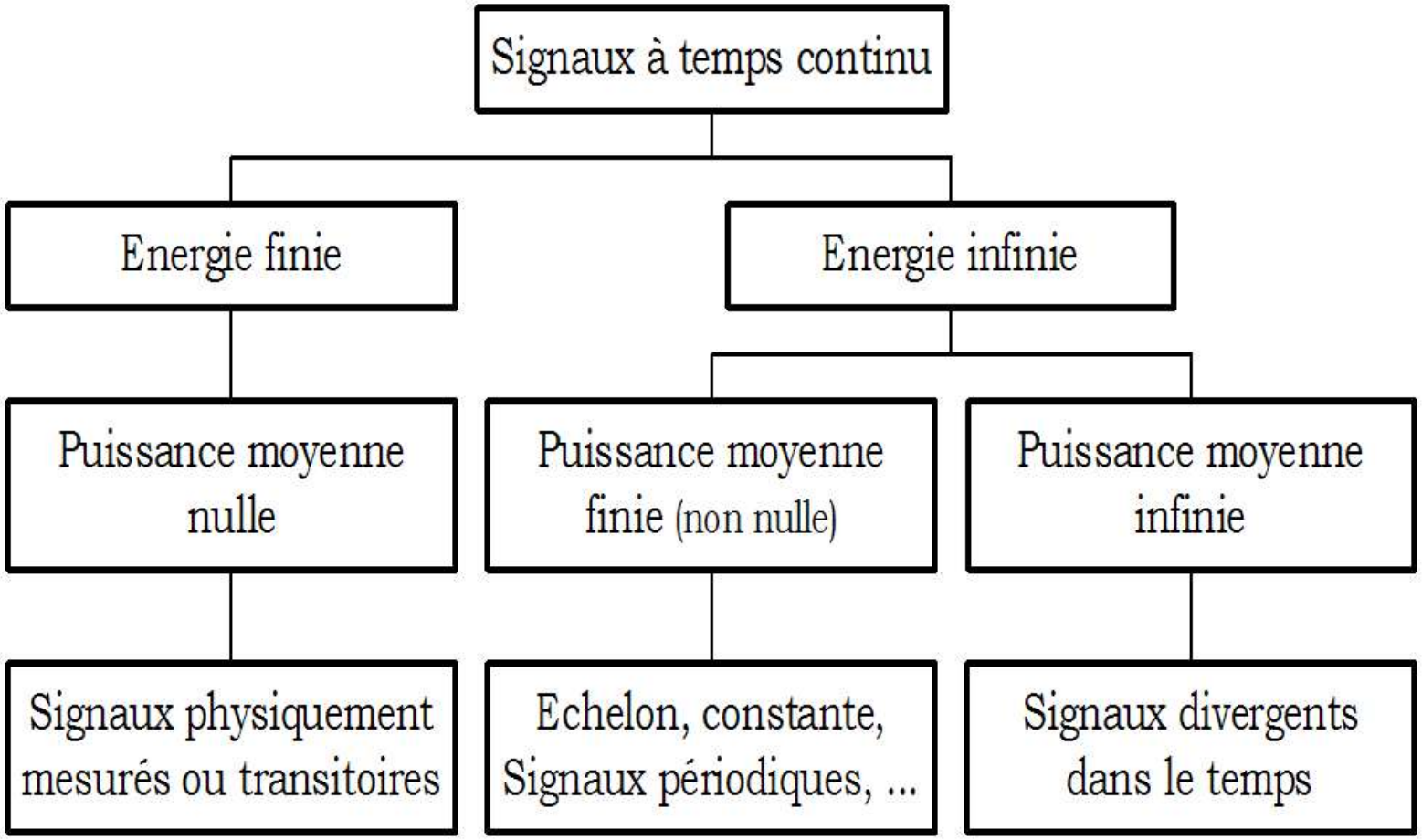
- ***signaux à énergie finie*** qui satisfont à : $\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 \, dt < \infty$

leur puissance moyenne est nulle.

- ***signaux à énergie infinie mais à puissance moyenne finie*** (non nulle) qui satisfont à :

$$0 < \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 \, dt < \infty$$

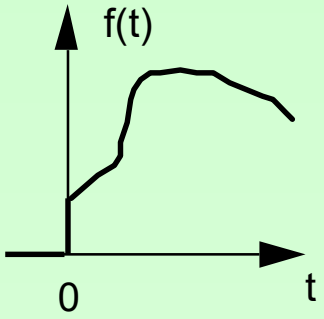
Classification « énergétique » des signaux

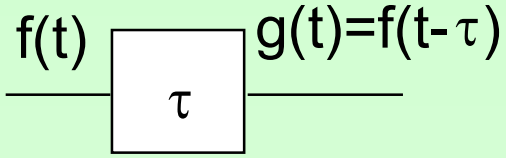


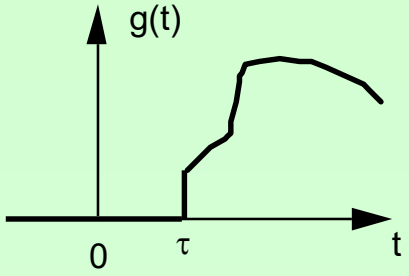
Classification des signaux en fonction de leur caractéristique énergétique

Signaux à temps continu particuliers (1/2)

- **Le signal causal retardé**







$$g(t) = f(t - \tau)$$

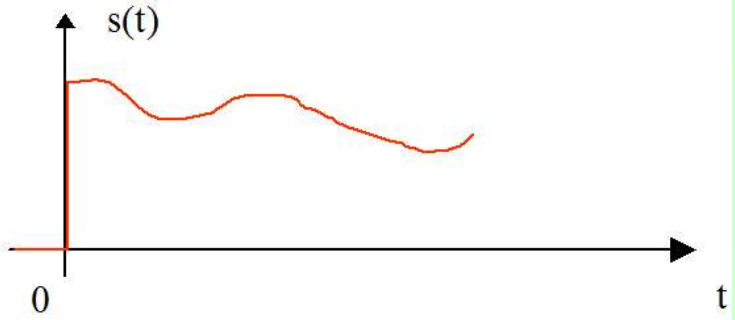
$$g(t) = 0 \text{ pour } t < \tau$$

Signaux à temps continu particuliers (2/2)

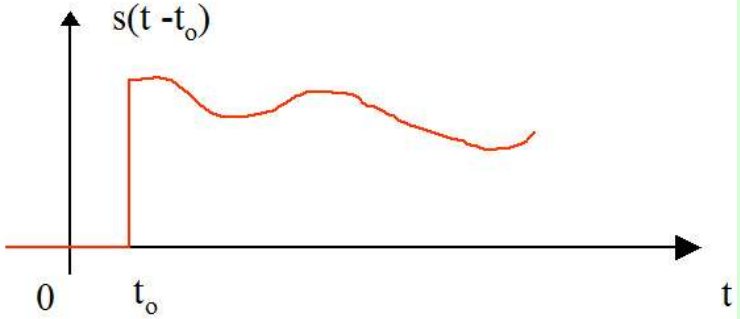
I.4 Signaux retardés et avancés

Soit le signal s(t) causal, représenté ci-contre,

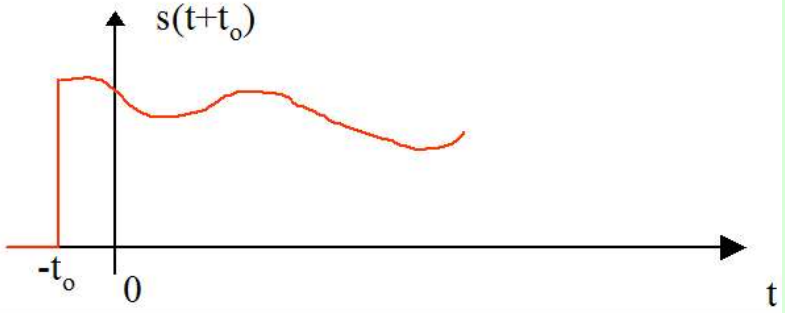
$s(t) = 0$ lorsque $t<0$



Le signal s(t) retardé de t_0, représenté ci-contre, est noté $s(t - t_0)$



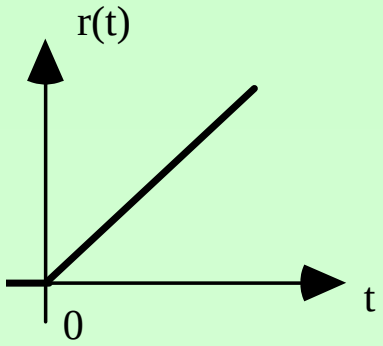
Le signal s(t) avancé de t_0, représenté ci-contre, est noté $s(t + t_0)$



Signaux à temps continu particuliers

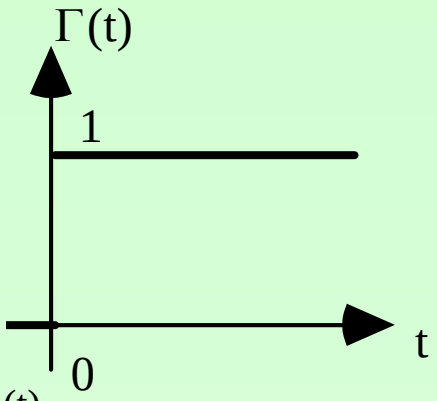
- **La rampe unitaire r(t)**

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ t & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$



- **L'échelon unitaire Γ(t)**

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$



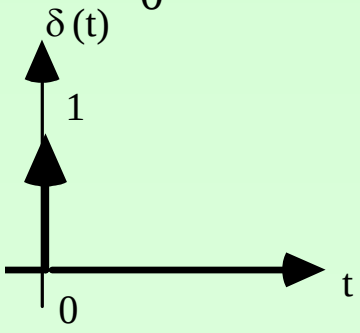
- **L'impulsion de Dirac δ(t)**

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \neq 0 \\ 1 & \text{pour } t = 0 \end{cases}$$

Propriétés

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\delta(t - t_0)dt = s(t_0)$$

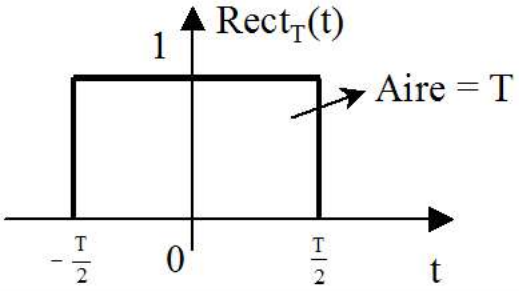




Signaux à temps continu particuliers

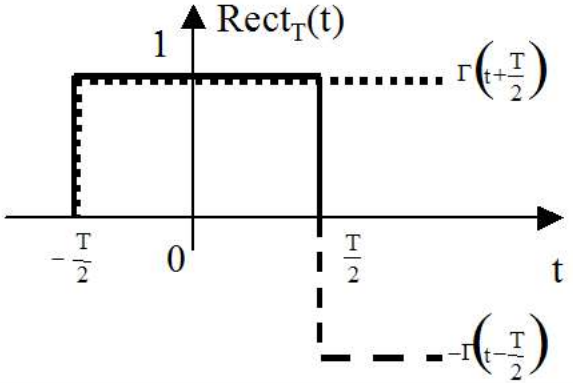
III.4 Fonction porte ou fenêtre rectangulaire

$$\text{rect}_T(t) = \begin{cases} 1 & \forall \quad |t| \le \dfrac{T}{2} \\ 0 & \forall \quad |t| > \dfrac{T}{2} \end{cases}$$



Ce signal est souvent utilisé pour exprimer qu'un signal x(t) est observé sur un horizon fini de durée T. On dira ainsi que l'on va appliquer un fenêtrage rectangulaire sur x(t) pour obtenir $x_T(t) = x(t)\,\text{rect}_T(t)$. La fenêtre rectangulaire peut être définie à partir de l'échelon unitaire :

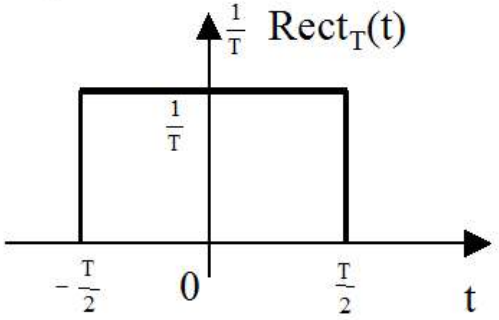
$$\text{rect}_T(t) = \Gamma\left(t + \frac{T}{2}\right) - \Gamma\left(t - \frac{T}{2}\right)$$



Retour sur l'Impulsion de Dirac

III.6 Impulsion de Dirac

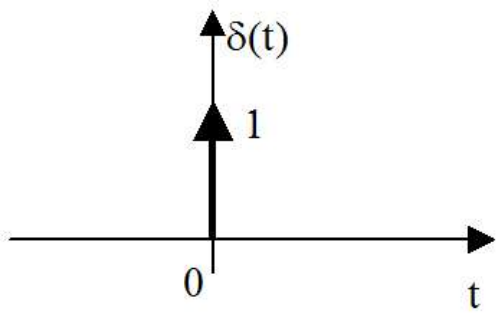
Considérons la fenêtre rectangulaire représentée ci-dessous. L'aire est égale à 1. Une manière pratique de définir l'impulsion de Dirac est de considérer la limite de cette fenêtre rectangulaire lorsque T tend vers 0.



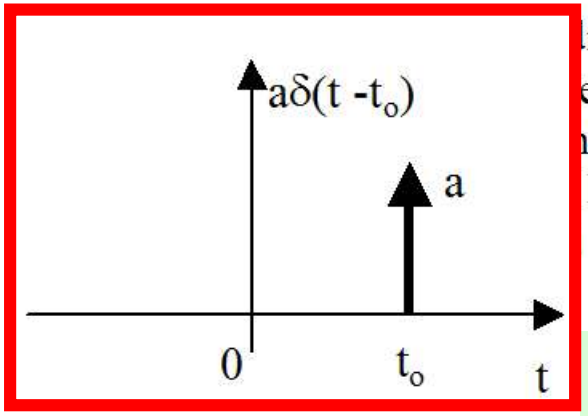
$$\lim_{T \to 0} \frac{1}{T} \mathrm{Rect}_T(t) = \delta(t)$$

et donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$



On peut noter que l'intégrale ne signifie plus rien au linaire (au sens de Riemann) puisque comme on le verra plus l est un « être » à valeur infinie en un point et à valeur nulle pa ntable. Cependant, de manière conventionnelle, la représentati Dirac retardée « $a\,\delta(t - t_o)$ » est une flèche verticale placée en t l'aire a.



Signaux à temps continu particuliers

- **<u>Le signal harmonique ou sinusoïdal</u>**
  - signal périodique par excellence
  - sinusoïde éternelle (non causale).

Sa loi d'évolution s'exprime à l'aide de la fonction sinus ou cosinus :

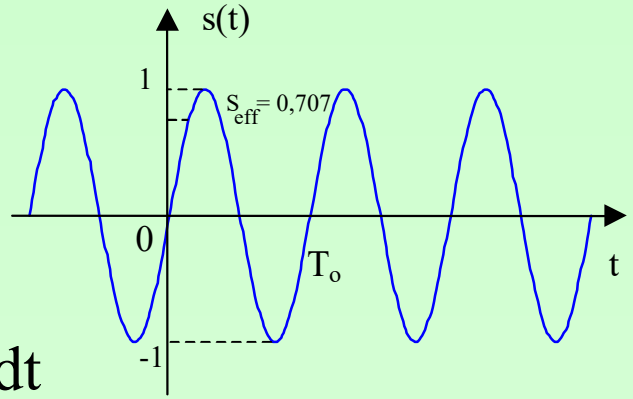
$$s(t) = A\sin(\omega t + \varphi) = A\cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$$

- A : amplitude du signal
- $\theta = \omega t + \varphi$: phase à l'instant t
- φ : phase en *rad* à l'instant t=0
- ω : pulsation en *rad/s*, vérifie : $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$
- T : période du signal en *s* et f : fréquence en *Hz*
- On emploie aussi le signal mathématique $e^{j\omega t}$ qui est plus facile à manipuler (Rappel : $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$)

Valeurs caractéristiques de signaux à temps continu

Exemple : Soit un signal sinusoïdal de période T_o tel que :

$$s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T_o}t\right)$$



$$S_{eff}^2 = \frac{1}{T_o}\int_0^{T_o} \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_o}t\right)dt$$

La valeur moyenne du signal est nulle $\bar{s} = 0$

La valeur efficace du signal est calculée à partir de :

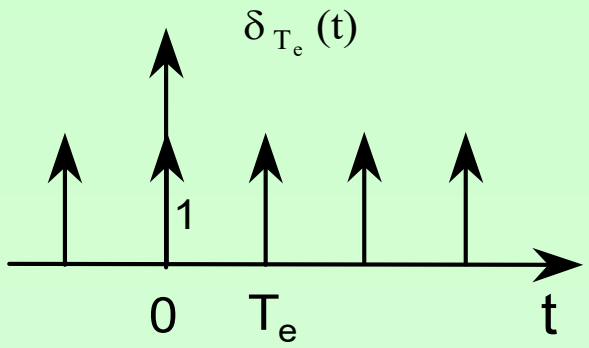
$$S_{eff}^2 = \frac{1}{T_o}\left[\frac{1}{2}\int_0^{T_o}\left(1-\cos\frac{4\pi}{T_o}t\right)dt\right] = \frac{1}{2T_o}\left[t - \frac{\sin\frac{4\pi}{T_o}t}{\frac{4\pi}{T_o}}\right]_0^{T_o} = \frac{1}{2}$$

d'où $$S_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707$$

Autres signaux (fonctions) à temps continu importantes

Un **peigne de Dirac** est une suite d'impulsions de Dirac se répétant sur l'axe des temps avec une période :

$$\delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) \quad k \in Z$$



La **Fonction exponentielle complexe** est définie par : $s(t) = Ae^{j\omega_o t}$

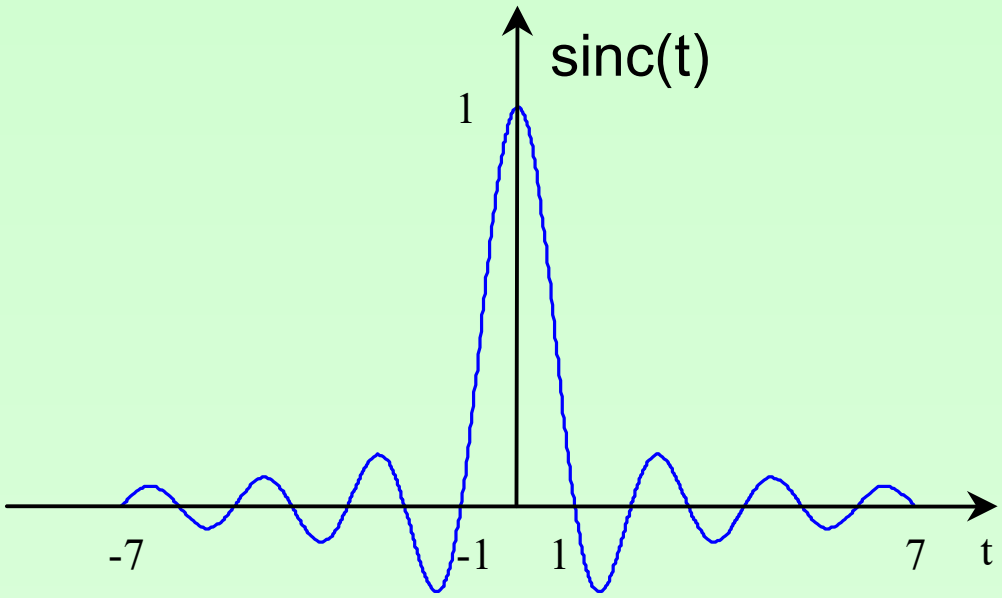
La **Fonction sinus cardinal** obtenue en effectuant le rapport d'une fonction sinusoïdale et de son argument joue un rôle très important en théorie du signal. Elle porte le nom de sinus cardinal et est définie par : $\mathrm{sinc}(t) = \dfrac{\sin \pi t}{\pi t}$

Par définition, $\mathrm{sinc}(0) = 1$

Elle est paire et s'annule pour les valeurs entières de t différentes de 0.

La fonction sinus cardinal est parfois définie comme : $\mathrm{sinc}(t) = \dfrac{\sin t}{t}$

Sinus cardinal



$$\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$

$$\sin c(0) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\sin \pi t}{\pi t} = 1$$

Produit de convolution

Le produit de convolution de deux signaux à temps continu à énergie finie x(t) et y(t) est défini par :

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$$

Ce produit est très utilisé en traitement du signal, notamment au travers des notions de filtrage, d'échantillonnage et est fondamental pour les différentes techniques de modulation en télécommunications.

IV.2 Calcul graphique de la convolution de deux signaux

Le calcul graphique de la convolution peut être effectué en plusieurs étapes :

- Symétriser y(t) par rapport à l'axe des ordonnées puis décaler le résultat de t pour réaliser $y(t-\tau)$
- Faire le produit $x(\tau)y(t-\tau)$
- Intégrer la valeur de ce produit (variable τ). La valeur de cette intégrale est la valeur de x(t)*y(t) à l'instant t.
- Pour avoir l'ensemble de la fonction x(t)*y(t) on doit recommencer ces opérations pour t allant de $-\infty \rightarrow +\infty$.

Le calcul graphique du produit de convolution entre un signal x(t) et une fenêtre rectangulaire y(t) est illustré sur la figure ci-dessous pour :

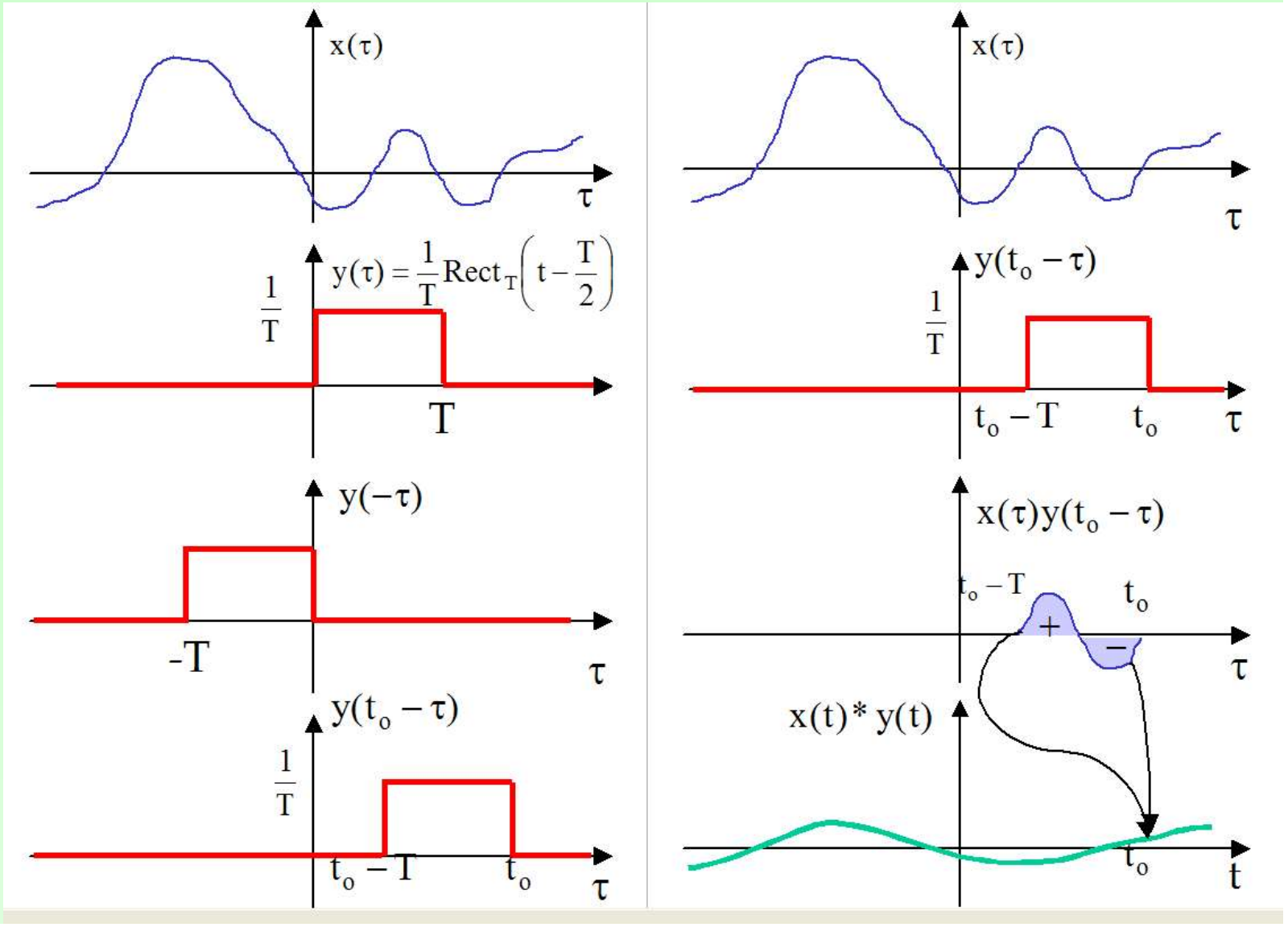
$$y(t) = \frac{1}{T} \mathrm{Rect}_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

Le signal résultant correspond alors à la moyenne du signal x(t) calculée sur une fenêtre glissante de largeur T.

$$x(t) * \frac{1}{T} \mathrm{Rect}_T\left(t - \frac{T}{2}\right) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^{T} x(\tau) d\tau$$

Produit de convolution

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$$



Propriétés du produit de convolution

Commutativité

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Distributivité

$$x(t) * \big(y(t) + z(t)\big) = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$$

Associativité

$$x(t) * \big(y(t) * z(t)\big) = \big(x(t) * y(t)\big) * z(t) = x(t) * y(t) * z(t)$$

Elément neutre : $\delta(t)$ (Impulsion de Dirac)

$$x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = x(t)$$

Convolution par une impulsion de Dirac

Convolution d'un signal par une impulsion de Dirac

On peut montrer que :

$$s(t) * \delta(t - t_o) = s(t - t_o)$$

en t_o revient donc à décaler le

On peut déduire du résultat précédent :

$$s(t) * \delta_{T_e}(t) = s(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t) * \delta(t - kT_e) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t - kT_e)$$

Convoluer un signal s(t) par un peigne de Dirac revient à périodiser le signal s(t) à la période T_e.

