Université Henri Poincaré - Nancy 1
IUT de Nancy-Brabois
Département GENIE des TELECOMMUNICATIONS et RESEAUX



2ème Année

TRAITEMENT du SIGNAL :

Filtrage numérique

Programme pour 2002-2003

Intervenants : Jean-Marc THIRIET, Hugues GARNIER

Notions de mathématiques et d'électronique à revoir

De manière à ne pas perdre trop de temps avec des notions qui doivent être connues, vous trouverez ci-dessous les pré-requis indispensables pour pouvoir suivre le module de Traitement du Signal de 2ème Année. N'hésitez pas à travailler ceux qui peuvent vous poser problème.

1. Aspect mathématique

- Suites, séries (plus particulièrement la somme de la série géométrique : $\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{1 - a^{N+1}}{1 - a}$).
- Résolution d'équations différentielles du premier et du second ordre.
- Maniement des nombres complexes (module, argument, partie réelle, partie imaginaire).
- Notions de variable aléatoire (écart-type, moyenne, variance, autocorrélation, intercorrélation).
- Maniement de la trigonométrie et des exponentielles complexes.
- Utilisation des logarithmes.

2. Aspect électronique

- Notion de signal déterministe (période, fréquence, pulsation, valeur moyenne, valeur efficace, puissance).
- Diagramme de Bode et phase pour un système du premier ordre (utilisation des échelles logarithmiques).
- Développement d'un signal périodique en séries de Fourier.
- Transformée de Fourier d'un signal analogique, d'un signal discret, TFD et FFT.
- Notion de filtrage analogique (passe-bas, passe-haut, passe-bande, réjecteur de bande).

3. Transformation de Laplace

Cet outil sera fréquemment utilisé.

Tables de trigonométrie

$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$, $tgx = \frac{\sin x}{\cos x} = j\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{e^{jx} + e^{-jx}}$

cos(a+b) = cosa.cosb - sina.sinb, cos(a-b) = cosa.cosb + sina.sinb, $tg(a+b) = \frac{tga + tgb}{1 - tga.tgb}, a, b, a + b \neq \frac{\pi}{2} (\mathrm{mod}.\pi)$

sin(a+b) = sina.cosb + sinb.cosa, sin(a-b) = sina.cosb - cosa.sinb,

cosa.cosb = [cos(a+b) + cos(a-b)], sina.sinb = [cos(a-b) - cos(a+b)], sina.cosb = [sin(a+b) + sin(a-b)]

$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$, $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$,

$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$, $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$, sin2a = 2sina.cosa, $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$,

$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$

Pour tout entier rationnel n, $(\cos a + j\sin a)^n = \cos na + j\sin na$, $(\cos a - j\sin a)^n = \cos na - j\sin na$

Formules d'Euler : $\cos x = \frac{e^{j.x} + e^{-j.x}}{2}$; $\sin x = \frac{e^{j.x} - e^{-j.x}}{2.j}$; $e^{j.x} = \cos x + j.\sin x$

Autres formes des formules d'Euler : $2.\cos x = \left(1 + e^{-j.2.x}\right).e^{j.x}$; $2.j.\sin x = \left(1 - e^{-2j.x}\right)e^{j.x}$

UTILISATION DU SERVEUR WEB "TRAITEMENT DU SIGNAL"

Ce serveur est disponible à l'adresse suivante : http://www.eaeeie.org/theiere/

ou http://www.eaeeie.org/theiere/pedagogical_resources.html

pour l'adresse principale à partir de laquelle vous avez accès à différentes parties qui peuvent vous intéresser (notamment la partie "computer").

La partie sur le traitement du signal se trouve à l'adresse suivante :

http://www.eaeeie.org/theiere_signal/ pour la partie française.

Dans différentes partie du poly, il vous est proposé de vous connecter sur ce serveur mis en place dans le cadre d'un projet européen, dont certaines parties ont été développées ou écrites par des étudiants dans le cadre de projets tutorés. Ce serveur contient des morceaux de cours, dans certains cas complémentaires du poly, ainsi que des simulations (sous forme d'applets java) permettant d'aider à la compréhension de certains phénomènes de traitement du signal.

Une version française, un peu différente, est également proposée à l'adresse suivante :

http://www.eaeeie.org/theiere/tds.html

Chapitre 0 : Signaux discrets (rappels)

1. Introduction

Les signaux physiques existant dans la nature sont en général des signaux de type analogique (on dit aussi continu, au sens où le signal est une fonction continue du temps) et il sera nécessaire, lorsque nous voudrons les faire transiter sur un réseau, de les échantillonner. Nous allons voir l'influence de l'échantillonnage (discrétisation) d'un signal sur son spectre (analyse fréquentielle). Ceci nous permettra de mettre en évidence certaines limitations. Nous verrons également comment s'effectue en pratique l'opération d'échantillonnage et quel compromis il est nécessaire de faire entre la théorie et la pratique.

Les avantages des techniques numériques sont :
- la répétabilité parfaite,
- la précision,
- la possibilité de faire transiter de manière transparente sur les mêmes supports des données de types divers (voix et sons, images, données de type informatique...),
- par rapport aux techniques analogiques : pas de vieillissement, pas de dérive...

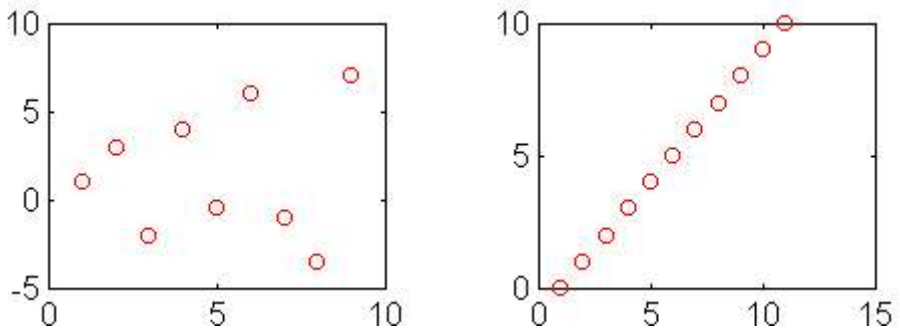
Les signaux numériques ou discrets ou encore échantillonnés sont le plus souvent issus de signaux analogiques dont on prélève les valeurs à des instants régulièrement espacés : c'est l'opération d'échantillonnage qui transforme un signal continu en une suite numérique. Lorsqu'on veut échantillonner un signal s(t), deux problèmes se posent :
- dans le domaine temporel, quelle est la perte éventuelle d'information et existe-t-il une fonction d'interpolation qui permet de reconstituer le signal continu original de manière univoque à partir de la suite numérique ? Le théorème d'échantillonnage répond à cette question.
- dans le domaine des amplitudes du signal, se pose le problème de la taille numérique des nombres de la série. En effet, du fait de leur manipulation sur un calculateur, les quantités numériques sont forcément codées sur un nombre fini d'éléments binaires. Il s'agit de l'opération de quantification.

2. Le signal échantillonné

Echantillonner un signal consiste donc à prendre des échantillons de celui-ci à des instants *régulièrement* espacés.
Au niveau écriture, il est habituel de représenter les signaux de la façon suivante.
Soit un signal continu **s(t)**, on prélève un échantillon de celui-ci à chaque période d'échantillonnage T_e (aussi appelée Δ dans la littérature). Les échantillons en fonction du temps peuvent donc s'écrire **s(k**T_e**)**. Pour simplifier l'écriture et aussi se rapprocher de la représentation mathématique des suites

numériques, on écrit : $\mathbf{s_k}$, ce qui signifie le k^{ème} échantillon du signal s(t) pour $t=kT_e$.

Exemples de signaux discrets :



Aux équations différentielles linéaires à coefficients constants du domaine analogique correspondent, dans le cas discret, des équations récurrentes à coefficients constants.

Ex : Considérons l'équation différentielle : $\dot{x} - ax = 0$ avec x(0) = c.

Sa solution est $x(t) = ce^{at},\ \forall\ t \geq 0$.

Considérons parallèlement l'équation récurrente $x_{k+1} - ax_k = 0$ avec x_0 = c.

Sa solution est $x_k = ca^k,\ \forall\ k \geq 0.$

N.B. : pour simplifier l'étude mathématique et puisque cela correspond à une réalité physique, nous ne traiterons ici que de signaux causals, qui sont nuls pour k < 0.

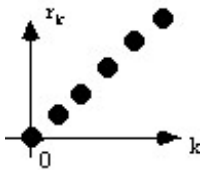
Comme pour les signaux analogiques, des signaux-tests sont utilisés dans le domaine numérique qui sont la rampe r_k, l'échelon Γ_k, l'impulsion de Dirac δ_k et un signal particulier, le peigne de Dirac Ш_k (lettre cyrillique tcha).

2.1 La suite rampe discrète unitaire {r(kTe)}={r_k}

$\{r_k\} = \begin{cases} 0 & \text{pour } k < 0 \\ kT_e & \text{pour } k \geq 0 \end{cases}$ (causalité)

La pente exprime la vitesse de variation de la grandeur considérée.

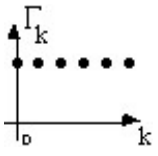
$\theta = ar_k$; a = 0.2 degré par seconde exprime par exemple la croissance linéaire de la température d'un four.



N.B. : la rampe discrète unitaire r_k est le signal issu de l'échantillonnage de la rampe unitaire continue r(t).

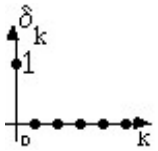
2.2 La suite échelon unitaire discret de Heaviside {Γ_k} ou fonction existence

$\{\Gamma(kT_e)\} = \{\Gamma_k\} = \begin{cases} 0 \text{ pour } k < 0 \\ 1 \text{ pour } k \geq 0 \end{cases}$ (causalité)



2.3 La suite impulsion de Dirac discrète {δ_k}

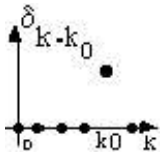
La définition de l'impulsion de Dirac discrète est la suivante :



$$\{\delta(kT_e)\} = \delta_k = \begin{cases} 0 \text{ pour } k \neq 0 \\ 1 \text{ pour } k = 0 \end{cases}$$

ATTENTION : La définition de l'impulsion de Dirac discrète est sensiblement différente de celle de l'impulsion de Dirac analogique. En effet, ici il n'est pas question de surface unitaire : la suite $\{\delta_k\}$ est une suite d'échantillons valant tous 0 sauf l'échantillon pour k=0 qui vaut 1.

2.4 L'impulsion de Dirac discrète décalée δ{k-k0}



La définition de l'impulsion de Dirac discrète décalée est la suivante :

$$\{\delta((k-k_0)T_e)\} = \delta_{k-k0} = \begin{cases} 0 \text{ pour } k \neq k_0 \\ 1 \text{ pour } k = k_0 \end{cases}$$

2.5 Le peigne de Dirac unitaire centré |_|_| (tcha)

C'est une distribution singulière périodique. On note $|_|_|_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$.

La sommation s'étend sur l'infini (dans le cas idéal) d'une suite de "fonctions de Dirac" retardées $\delta(t - kT_e)$.

La multiplication de $|_|_|_k$ par une fonction s_k est une opération licite qui conduit à une pondération des poids des impulsions du peigne par les valeurs de la fonction aux instants kT_e. Cette opération correspond par ailleurs à une opération d'échantillonnage.

$$s_k.|_|_|_k = \sum_k s_k.\delta(t - k.T_e)$$

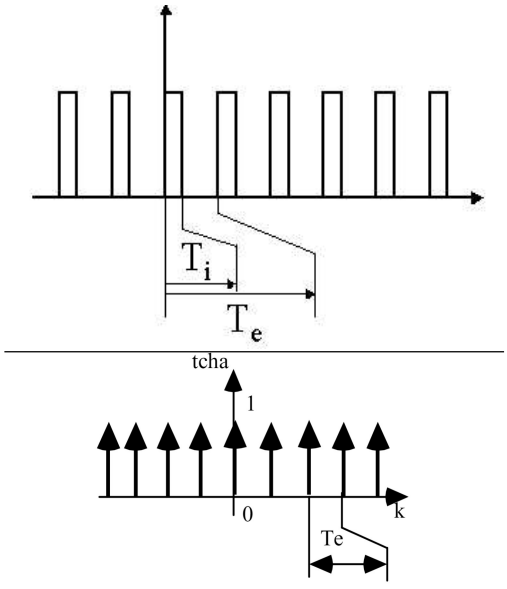
Le spectre, obtenu par décomposition en série de Fourier, est le suivant :

$$F(|_|_|_k) = F\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k.T_e)\right) = \frac{1}{T_e}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_e}\right) = |_|_|;\wedge$$

Le résultat obtenu est un peigne de Dirac dans le domaine fréquentiel, autrement dit le spectre d'un peigne de Dirac est un peigne de Dirac, et inversement. On dit aussi que le peigne de Dirac possède la propriété fondamentale d'être invariant dans la transformation de Fourier :

Démonstration :

Décomposition en série de Fourier du peigne de Dirac qui est un signal périodique :



Ci-contre peigne non unitaire (en haut) et peigne de Dirac (en bas).

$s(t) = \delta(t) = \lim_{T_i \longrightarrow +\infty} \frac{1}{T_i}$ pendant la durée T_i

$$c_n = \frac{1}{T}.\int_{\alpha}^{\alpha+T} s(t).e^{-j.n.\omega.t}.dt = \frac{1}{T_e}.\int_0^{T_e} \delta(t).e^{-j.n.\omega.t}.dt$$

$$= \frac{1}{T_e}.\lim_{T_i \longrightarrow 0}\left(\int_0^{T_i} \frac{1}{T_i}.e^{-j.n.\omega.t}.dt + \int_{T_i}^{T_e} 0.e^{-j.n.\omega.t}.dt\right)$$

$$= \frac{1}{T_e}.\lim_{T_i \longrightarrow 0}\left[\frac{e^{-j.n.\omega.t}}{T_i.(-j.n.\omega)}\right]_0^{T_i} = \frac{1}{T_e}.\lim_{T_i \to 0}\left[\frac{e^{-j.n.\omega.T_i}-1}{T_i.(-j.n.\omega)}\right]$$

$$= \frac{1}{T_e}.\lim_{T_i \longrightarrow 0}\left[\frac{\left(1+\frac{-j.n.\omega.T_i}{1!}\right)-1}{T_i.(-j.n.\omega)}\right] = \frac{1}{T_e}.$$

Le calcul ci-dessus est vrai à condition que n ≠ 0. Il faut refaire le calcul pour n = 0 :

$$c_0 = \frac{1}{T}.\int_{\alpha}^{\alpha+T} s(t).dt = \frac{1}{T_e}.\int_0^{T_e} \delta(t).dt = \frac{1}{T_e}\lim_{T_i \to 0}.\int_0^{T_i} \frac{1}{T_i}.dt = \frac{1}{T_e}\lim_{T_i \to 0}.\left[\frac{T_i}{T_i}\right] = \frac{1}{T_e}$$

En représentation bilatérale, on obtient donc des raies d'amplitude $1/T_e$ tous les $1/T_e$.

2.6 Le signal harmonique ou sinusoïdal discret

De même que lorsqu'on étudie un filtre analogique, on fera l'étude de la réponse fréquentielle d'un système numérique et pour cela on considérera un signal sinusoïdal échantillonné pour lequel on fera varier la fréquence entre 0 et une limite maximale que l'on verra plus tard.

2.7 Utilisation du serveur web

Dans le paragraphe 4 du serveur, vous trouverez :

- Une simulation de l'effet du choix de la fréquence d'échantillonnage sur un signal,
  Ci-dessous se trouve un extrait de devoir donné en 97-98 en utilisant cette applet

  Données numériques :

- Fréquence d'échantillonnage : 1000 Hz,
- Fréquences du signal : 50 Hz ; 500 Hz ; 950 Hz ; 1000 Hz ; 1050 Hz

  La courbe de gauche (noire) de l'applet représente une sinusoïde analogique sur laquelle sont schématisés les échantillons extraits du signal sous forme de petites croix. Il est possible de paramétrer la fréquence de la sinusoïde ainsi que la durée d'affichage.
  La courbe de droite représente le signal reconstitué sous forme d'une sinusoïde passant au mieux par les échantillons extraits de la courbe de gauche. La fréquence d'échantillonnage est paramétrable.

  Préparation :

  Il est demandé d'observer le signal pendant 10 périodes.

- Donner la valeur de la "durée d'affichage en secondes" pour chacun des signaux définis ci-dessus.
- Donner le nombre d'échantillons par période (à calculer) et donner la manière de faire le calcul pour le premier signal.
- La condition d'échantillonnage de Shannon-Nyquist est-elle respectée pour chacun des cinq cas ? Expliquez.

  En utilisant l'applet :

  Tester chacun des cinq signaux à l'aide des paramètres calculés précédemment. Pour chacun, représenter succinctement les courbes obtenues, de gauche et de droite, constater les résultats obtenus (nombre de périodes visibles à l'écran, nombre d'échantillons sur chaque courbe, nombre d'échantillons par période), et commenter ces résultats.

Vous trouverez également dans cette partie du serveur :

- Un questionnaire d'auto-évaluation sur le signal échantillonné,
- Un questionnaire d'auto-évaluation sur la numérisation.

3. Problèmes d'apodisation (fenêtrage)

Les fenêtres ci-dessous ont été calculées par MATLAB à partir d'une fenêtre de 64 points et d'un calcul de FFT sur 4096 points :

```
plot(boxcar(64))
%Calcul du spectre linéaire
spectre=abs(fft(boxcar(64),4096));
spectre=spectre/64;%maximum normalisé à 1
plot(spectre(1:400))%zoom sur les 400 premiers points du spectre
%Calcul du spectre semi-logarithmique (comme sur les modules FFT des
oscilloscopes)
spectrelog=20*log(spectre)/log(10);
plot(spectrelog(1:400))
```

Dans le tableau ci-dessous, la colonne de gauche représente la fenêtre, la colonne centrale le spectre linéaire et la colonne de droite le spectre logarithmique (zoom sur les 400 premiers points dans ces deux derniers cas)

3.1 Fenêtre rectangulaire

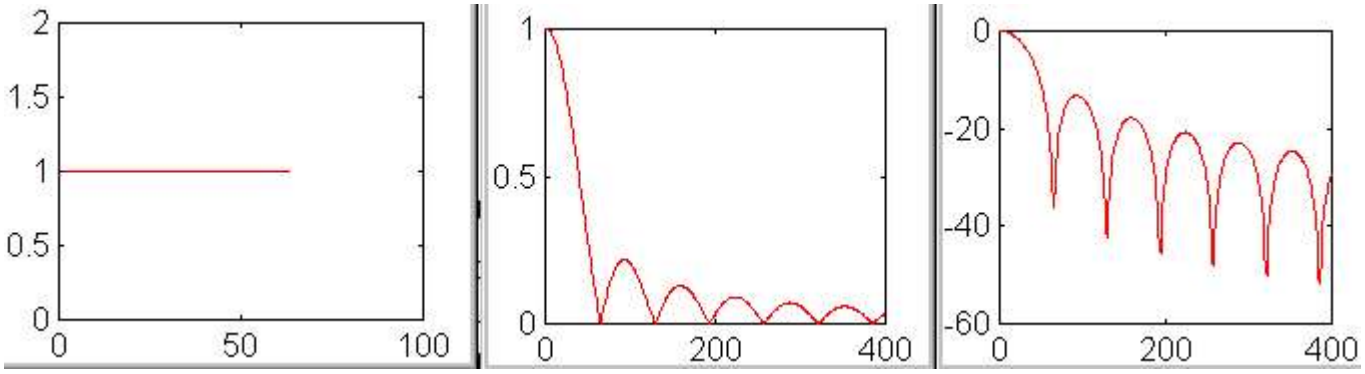
Cette fenêtre est définie par :

$$\begin{cases} f_n = 1 \quad pour \quad 0 \le n \le N-1 \\ f_n = 0 \quad ailleurs \end{cases}$$

On peut également considérer cette fenêtre comme étant le cas particulier de la fenêtre de Hamming généralisée pour $\alpha = 1$ (cf. fenêtre de Hamming).

Son expression fréquentielle est :

$$W_R(e^{j.2.\pi.f}) = e^{-j.\pi(N-1).f}.\frac{\sin(\pi.N.f)}{\sin(\pi.f)}$$



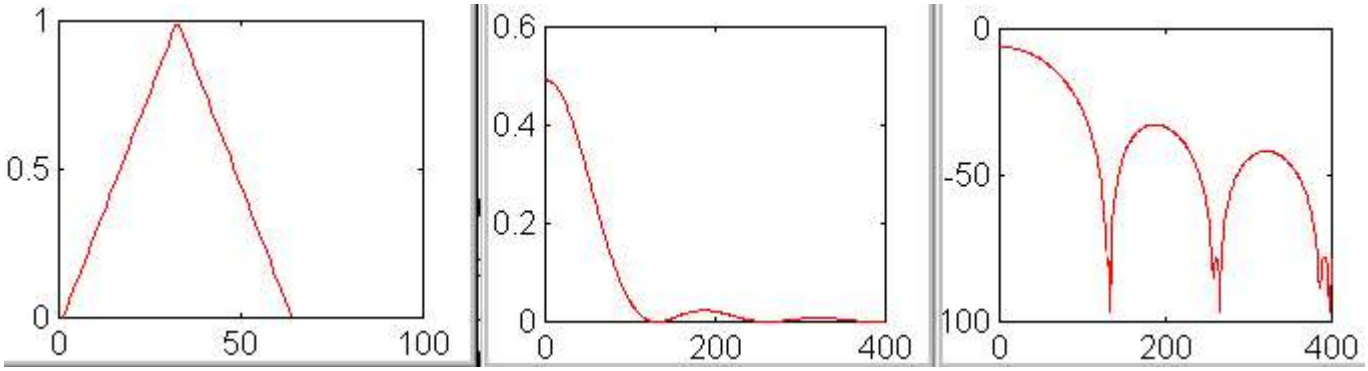
3.2 Fenêtre triangulaire ou de Bartlett

Cette fenêtre est définie par :

$$\begin{cases} f_n = \frac{n}{N/2} \quad pour \quad 0 \le n \le N/2 \\ f_{N-n} \quad pour \quad N/2 \le n \le N-1 \end{cases}$$

Son expression fréquentielle est :

$$W_T(e^{j.2.\pi.f}) = e^{-j.2.\pi(N/2-1).f}.\left(\frac{\sin(\pi.\frac{N}{2}.f)}{\sin(\pi.f)}\right)^2$$



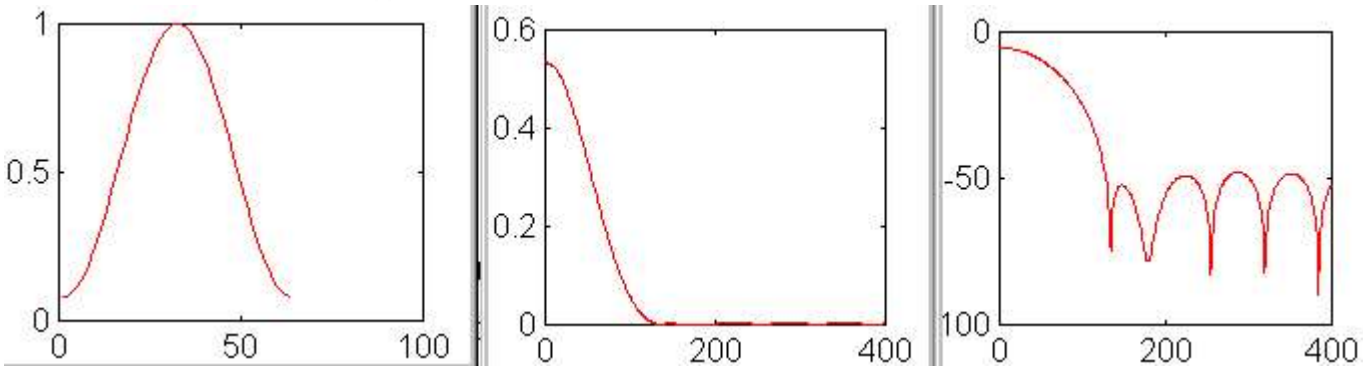
3.3 Fenêtre de Hamming

La fenêtre de Hamming généralisée a pour équation :

$$\begin{cases} f_n = \alpha + (1-\alpha).\cos\left(\frac{2.\pi.n}{N}\right) \ pour \ \ 0 \le n \le N-1 \\ f_n = 0 \ \ ailleurs \end{cases}$$

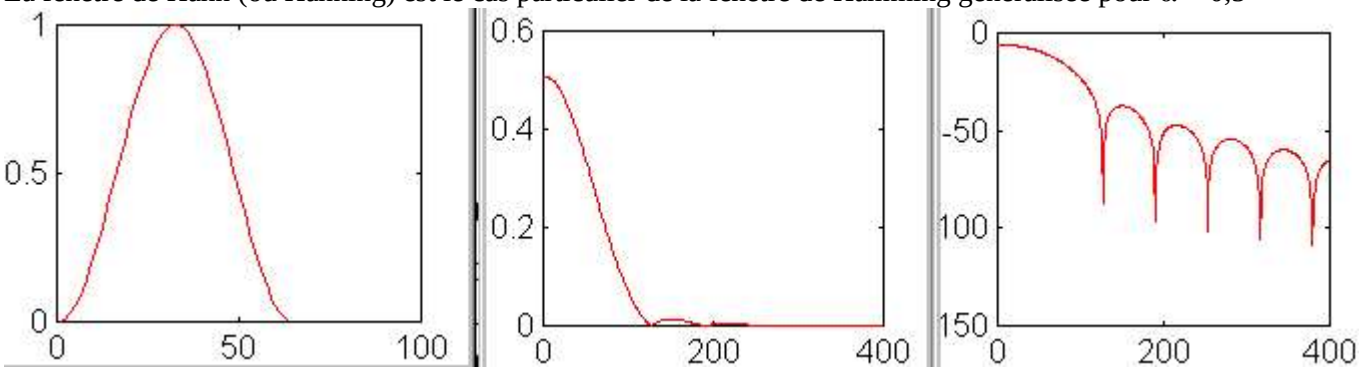
La fenêtre de Hamming proprement dite est le cas particulier de la fenêtre généralisée pour α = 0,54. Les fenêtres de la famille Hamming se caractérisent par un pic central de largeur double de la fenêtre rectangulaire mais une atténuation des oscillations sensiblement plus importante. La représentation fréquentielle de la fenêtre de Hamming généralisée a pour équation :

$$W_{Hg}(e^{j.2.\pi.f}) = \alpha.W_R + \frac{1-\alpha}{2}.\left[W_R(e^{j.2.\pi.(f-1/N)}) + W_R(e^{j.2.\pi.(f+1/N)})\right]$$



3.4 Fenêtre de Hann

La fenêtre de Hann (ou Hanning) est le cas particulier de la fenêtre de Hamming généralisée pour α = 0,5



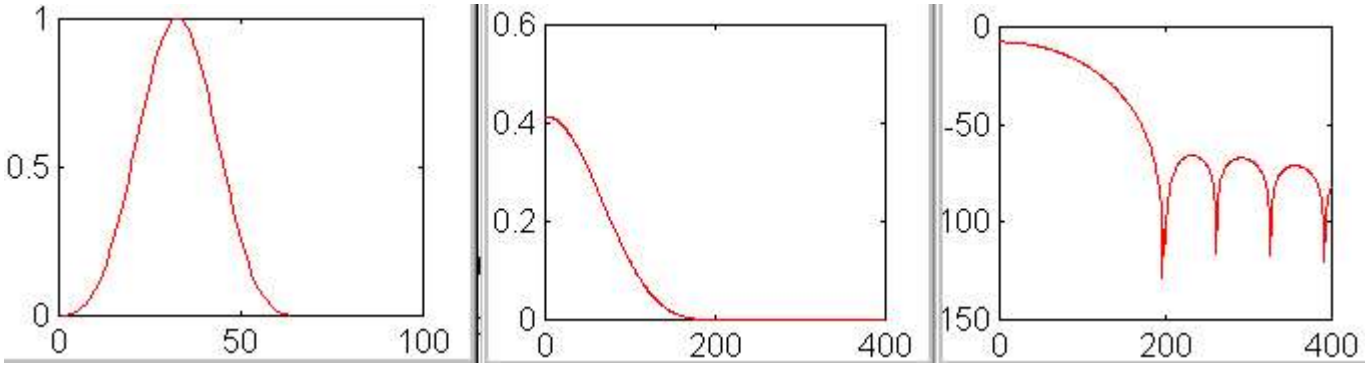
3.5 Fenêtre de Blackman

Cette fenêtre est une extension de l'idée de Hamming. Le premier lobe est plus large mais l'atténuation est encore plus élevée. Elle est définie par :

$$\begin{cases} f_n = \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m . \alpha_m . \cos\left(\frac{2.\pi.n.m}{N}\right) & pour \;\; 0 \le n \le N-1 \\ f_n = 0 \;\; ailleurs \end{cases}$$

avec la contrainte : $\sum_{m=0}^{M-1} \alpha_m = 1$. Son expression fréquentielle est :

$$W_B(e^{j.2.\pi.f}) = \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m . \frac{\alpha_m}{2} . \left[W_R(e^{j.2.\pi.(f-m/N)}) + W_R(e^{j.2.\pi.(f+m/N)}) \right]$$

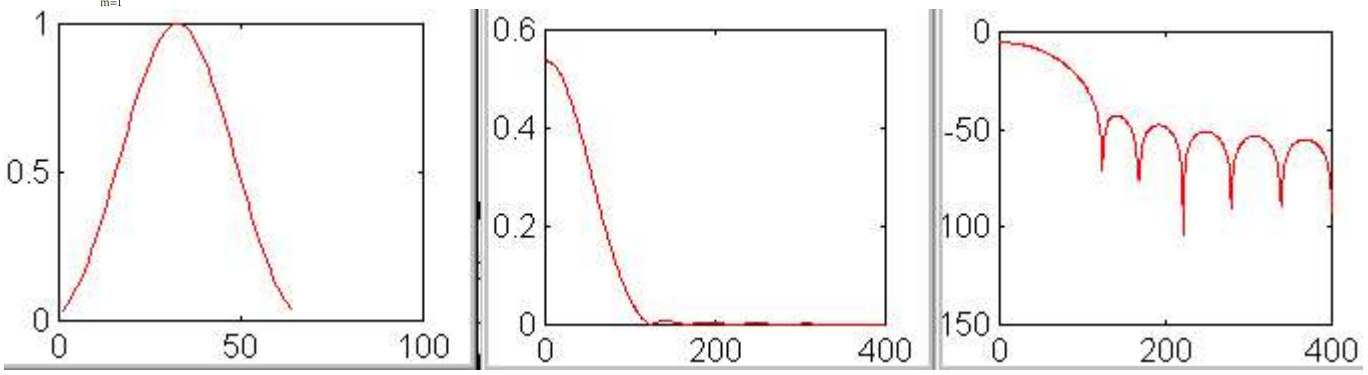


3.6 Fenêtre de Kaiser (avec β = 5)

La fenêtre de Kaiser permet de préciser le compromis largeur du pic central/amplitude des oscillations. Elle est définie par :

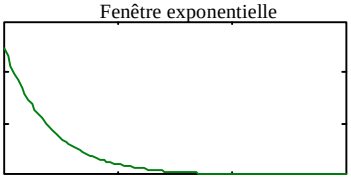
$$\begin{cases} f_n = \dfrac{I_0\left[\beta.\sqrt{N^2 - 4.n^2}\right]}{I_0(\beta N)} & \text{pour } 0 \le n \le N-1 \\ f_n = 0 \;\; \text{ailleurs} \end{cases}$$

où I_0 est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0 : $I_0(x) = 1 + \sum_{m=1}^{M} \left(\frac{(x/2)^m}{m!} \right)^2$. En général, 4≤β≤9 et M = 14.



En prenant β de l'ordre de 4,5, l'atténuation est voisine de celle de Hamming mais le pic central est moins large. Pour β de l'ordre de 9, le pic est plus large mais l'atténuation plus importante.

3.7 Fenêtre exponentielle



La fenêtre à réponse exponentielle est utile pour la mesure des signaux transitoires (de type impulsion).

Le début du signal n'est pas perturbé, mais la fin de l'enregistrement temporel est forcée à zéro. **La fenêtre exponentielle ne convient que pour la mesure des signaux transitoires.** Cette fenêtre est définie par :

$$\begin{cases} f_n = B.e^{-a.t} \;\; pour \;\; t \ge 0 \\ f_n = 0 \;\; ailleurs \end{cases}$$

Son expression fréquentielle est :

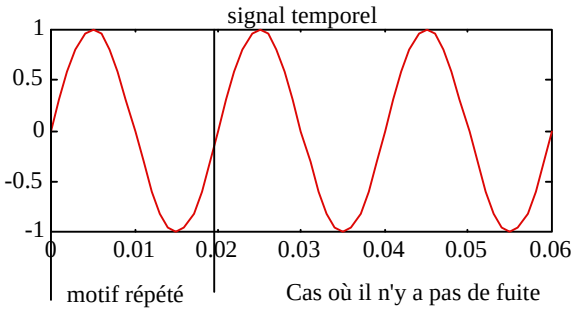
$$W_E(e^{j.2.\pi.f}) = \frac{1}{j.2.\pi.f + a}$$

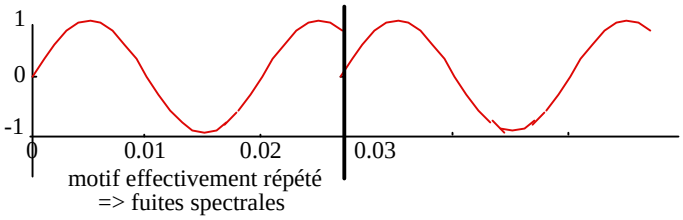
3.8 Problème des fuites spectrales

Ce problème intervient lorsque la transformée de Fourier discrète n'est pas calculé sur un nombre entier de

périodes. Le motif répété pour créer le signal périodique n'est dans ce cas pas celui attendu. En effet, dans ce cas, le spectre obtenu par FFT n'est pas une bonne approximation du spectre réel. Etant donné que l'utilisateur n'a souvent aucun contrôle sur la localisation du signal dans l'enregistrement temporel, il faut généralement envisager l'existence possible d'une discontinuité. Cet effet, connu sous le nom de fuites (leakage), est manifeste dans le domaine fréquentiel. Cette discontinuité provoque, par effet de transitoire, un élargissement de la raie spectrale (qui devrait apparaître très fine). L'utilisation d'une fenêtre type Hanning ou Blackman aura pour effet, en filtrant fortement les extrémités du motif dans le domaine temporel, d'atténuer l'effet des fuites. Il pourra également être le cas échéant judicieux d'essayer, lorsque cela est possible, de synchroniser l'analyseur de spectre (module FFT) sur un nombre entier de périodes d'échantillonnage du signal périodique à analyser. D'autre part, la résolution de l'analyseur (plus petite fréquence entre deux raies) est égale à $1/T_e$.

Considérons, par exemple, le cas d'un signal sinusoïdal de f = 50 Hz et d'amplitude 1 échantillonné à f_e = 1000 Hz.





ANNEXE : Spectres de signaux discrets

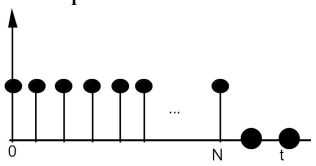
Le problème posé consiste en la détermination du spectre d'un signal discret. Le spectre d'un signal échantillonné est un spectre "périodique" dans le domaine fréquentiel. Les outils mathématiques à mettre en œuvre sont basés sur la somme de nombres discrets Σ au lieu des calculs d'intégrales.

1. Transformée de Fourier d'un signal à temps discret

$$S(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k \, e^{-j2\pi fkT_e} \quad ; \quad S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k \, e^{-j\omega kT_e}$$

Cette expression est une fonction continue de la variable f (c'est-à-dire qu'elle est déterminée pour toute valeur de f) et périodique. Cette expression mathématique rappelle l'expression du développement en série de Fourier, mais à "l'envers", c'est-à-dire que l'on retrouve ici pour les fréquences les propriétés que l'on avait rencontré dans le premier chapitre pour les temps, et vice-versa. Ces constatations sont une conséquence de la propriété de la **dualité temps-fréquence**.

Exemple : transformée de Fourier de la fenêtre rectangulaire discrète :



$$S(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k \, e^{-j2\pi fkT_e} = \sum_{k=0}^{N} A e^{-j2\pi fkT_e}$$

2. Transformée de Fourier inverse d'un signal à temps discret

$$s(kT_e) = s_k = \int_{-F_e/2}^{+F_e/2} S(f).e^{j2\pi fkT_e}.df = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_e/2}^{+\omega_e/2} S(\omega).e^{j\omega kT_e}.d\omega$$

Cette expression ressemble beaucoup à la définition du coefficient c_n du développement en série de Fourier (encore une conséquence de la dualité temps-fréquence).

TABLE DE TRANSFORMÉES DE FOURIER D'UN SIGNAL DISCRET

Les transformées de Fourier d'un signal discret se déduisent des transformées en Z en posant $z = e^{pT_e}$ et $p = j2\pi f$ à condition que la transformée de Fourier existe (condition sur la convergence)

(T_e est la période d'échantillonnage)

Passage de Laplace à $z \Rightarrow z = e^{pT_e}$	$s(kT_e) = s_k$	$S(f) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} s_k . e^{-j2\pi fkT_e}$

Propriétés ou théorèmes	Domaine temporel	domaine fréquentiel f
Linéarité	$\{x_k + y_k\}$	X(f) + Y(f)
	$\{A.s_k\}$	A.S(f)
	$\{0\}$	0
Théorème du retard	$\{s_{k-k_0}\} = \{s((k-k_0)T_e)\} = s(t-k_0T_e)$	$e^{-j2\pi fk_0T_e}.S(f)$
	$\{s_k e^{j.2.\pi.f_0k.T_e}\}$	$S(f-f_0)$
Produit de convolution	$\{x_k * y_k\} = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k y_{n-k}$	X(f) . Y(f)
	$\{x_k . y_k\}$	X(f) * Y(f)

3. Utilisation du serveur web

Dans le paragraphe 4 du serveur, vous trouverez :

- Un questionnaire d'auto-évaluation sur le signal échantillonné,
- Un questionnaire d'auto-évaluation sur la numérisation.

ANNEXE : Calcul de spectres par calculateur

Transformée de Fourier Discrète (TFD) & Transformée de Fourier Rapide (TFR)

Lorsque l'on désire **calculer la transformée de Fourier par ordinateur** ou via **un module de calcul FFT**, il faut trouver une expression de la transformée de Fourier qui donne non pas une expression continue de la variable f (impossible à faire sur un ordinateur) mais une suite d'échantillons de cette transformée de Fourier : c'est la **TFD/DFT (Transformée de Fourier Discrète / Discrete Fourier Transform)** ou la **TFR/FFT (transformée de Fourier Rapide / Fast Fourier Transform)**. La TFR/FFT est en fait un algorithme optimisé plus efficace pour le calcul de la TFD/DFT.

1. Transformée de Fourier Discrète (TFD)

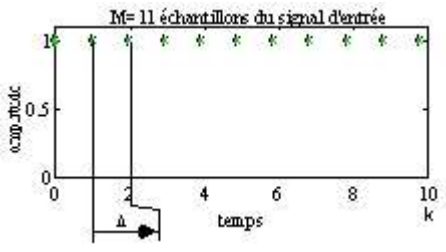
Le principe de la TFD consiste, à partir de M échantillons du signal s_0, s_1, ..., s_k, ..., s_{M-1} de déterminer M échantillons de la TFD : S_0, S_1, ..., S_n, ..., S_{M-1}. Les M échantillons de la transformée représentent **une** période de cette tranformée, soit prise entre $\frac{-F_e}{2}$ et $\frac{F_e}{2}$ (c'est-à-dire entre $-\frac{1}{2.T_e}$ et $\frac{1}{2.T_e}$), soit entre 0 et F_e.

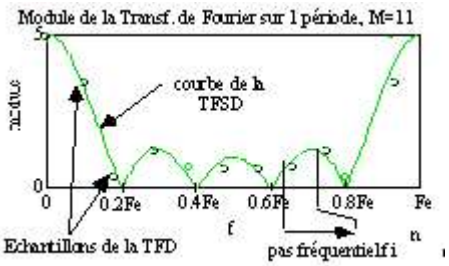
L'expression mathématique de la TFD est la suivante :

$$S(n.f_i) = \sum_{k=0}^{M-1} s(kT_e) e^{-j2\pi kT_e nf_i} \quad \text{ou} \quad S(\frac{n}{M}) = \sum_{k=0}^{M-1} s(kT_e) e^{-j2\pi k\frac{n}{M}}$$

où $s(kT_e)=s_k$ représente le $k^{ème}$ échantillon du signal temporel,
$S(nf_i)=S(n/M)=S_n$ le $n^{ème}$ échantillon de la TFD,
k est l'indice temporel,
n est l'indice fréquentiel,
M est le nombre total d'échantillons du signal ainsi que celui de la TFD (typiquement 1024),
f_i est appelé le pas fréquentiel et représente la distance entre deux échantillons du spectre, cette valeur est donc telle que $f_i = \frac{F_e}{M}$.

Ex : pour M=11





Exercice :

Soit le signal échantillonné $\{s_k\}$: s_k= 1 pour k = 0 et k = 1.
s_k = 0 ailleurs.

Calculer la TFD d'ordre 4 de $\{s_k\}$ et représenter le module du spectre.

Solution :

1) Calcul de la TFD sur 4 échantillons (4 échantillons de la TFD à partir de 4 échantillons du signal)

$$S(n) = \sum_{k=0}^{M-1} s_k .e^{-j.2.\pi.k.n/M} \quad \text{pour n=0, 1 , ... , M-1 et M=4}$$

$$\begin{cases} n=0, \quad S(0)=\sum_{k=0}^{3} s(k)e^{0} = s(0)+s(1)+s(2)+s(3) = 2 \\ n=1, \quad S(1)=\sum_{k=0}^{3} s(k)e^{-j2\pi k/4} = s(0)+s(1)e^{-j2\pi/4}+s(2)e^{-j2\pi 2/4}+s(3)e^{-j2\pi 3/4} = 1+e^{-j\pi/2} = 2\cos(\pi/4)e^{-j\pi/4} \\ n=2, \quad S(2)=\sum_{k=0}^{3} s(k)e^{-j2\pi 2k/4} = 1+e^{-j\pi} = 2\cos(\pi/2)e^{-j\pi/2} \\ n=3, \quad S(3)=\sum_{k=0}^{3} s(k)e^{-j2\pi 3k/4} = 1+e^{-j\pi 3/2} = 2\cos(3\pi/4)e^{-j3\pi/4} \end{cases}$$

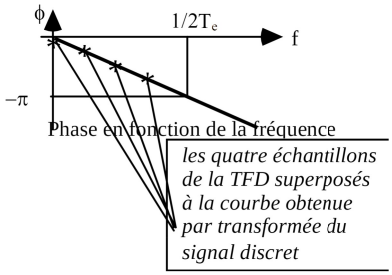
Modules de ces 4 échantillons :

$$\begin{cases} |S(0)| = |2| = 2 \\ |S(1)| = \left|2\cos(\pi/4)e^{-j\pi/4}\right| = 2\left|\cos(\pi/4)\right| = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \\ |S(2)| = \left|2\cos(\pi/2)e^{-j\pi/2}\right| = 2\left|\cos(\pi/2)\right| = 2.0 = 0 \\ |S(3)| = \left|2\cos(3\pi/4)e^{-j3\pi/4}\right| = 2\left|\cos(3.\pi/4)\right| = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \end{cases}$$

Arguments de ces 4 échantillons :

$$\begin{cases} \arg(S(0)) = \arg(2) = 0 \\ \arg(S(1)) = \arg(2)+\arg(\cos(\pi/4))+\arg\left(e^{-j\pi/4}\right) = 0+0-\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} \\ \arg(S(2)) = \arg(2)+\arg(\cos(\pi/2))+\arg\left(e^{-j\pi/2}\right) = 0+0-\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \\ \arg(S(3)) = \arg(2)+\arg(\cos(3\pi/4))+\arg\left(e^{-j3\pi/4}\right) = 0+0-\frac{3\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} \end{cases}$$





Phase en fonction de la fréquence

les quatre échantillons de la TFD superposés à la courbe obtenue par transformée du signal discret

2. Transformée de Fourier discrète inverse

$$s_k = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} S_n e^{j2\pi k T_e n f_i} = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} S_n e^{j2\pi k \frac{n}{M}}$$

3. Utilisation du serveur web

Dans le paragraphe 4 du serveur, vous trouverez :

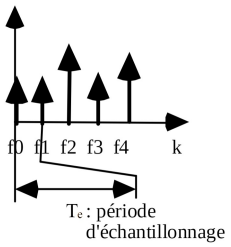
- Une partie de cours en Anglais sur la transformée de Fourier rapide proposée par l'Université de Ulm,
- Une simulation (applet Java) permettant le calcul du spectre de signaux en utilisant la FFT.

Chapitre 1 : La transformée en Z

La **transformée en Z** est une adaptation de la transformée de Laplace pour l'étude des réponses transitoires des systèmes numériques ou discrets. La transformée en Z est donc relative aux suites numériques. Elle permet de ce fait un traitement des signaux et systèmes échantillonnés, analogue à celui que permet la transformée de Laplace pour les signaux et systèmes analogiques. En pratique, on utilisera le plus souvent possible la table des transformées en Z pour travailler.

1. Définition

La transformée en Z peut s'obtenir à partir de la transformée de Laplace en effectuant le raisonnement suivant :
Soit $F^*(p)$ la transformée de Laplace du signal échantillonné $f^*(t)$ représenté ci-contre.



$$f^*(t) = f_0\delta(t) + f_1\delta(t - T_e) + \ldots$$

La transformée de Laplace s'écrit :

$$F^*(p) = f_0 + f_1 e^{-pT_e} + f_2 e^{-2pT_e} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k e^{-kpT_e}$$

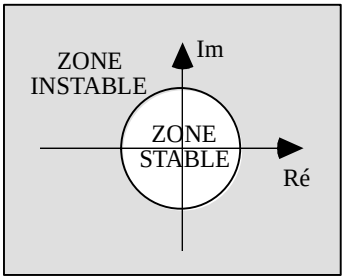
On peut constater que la transformée de Laplace d'un signal échantillonné s'exprime comme une somme de terme en e^{pT_e}. Pour exprimer la transformée en Z, on effectuera simplement le changement de variable $z = e^{pT_e}$, où p est la variable de Laplace, cette variable étant en général considérée comme **complexe** (écrite quelques fois p = α + jβ)·
La transformée en Z est par conséquent définie par :

$$Z(f(t)) = F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k z^{-k}$$

Dans la transformée en Z, la sommation s'effectue à partir de 0 ce qui suppose que le signal discret est causal, c'est-à-dire que son évolution est la conséquence d'une cause dont l'instant d'apparition est choisi comme origine des indices k.

2. Stabilité en Z

Un système continu a sa fonction de transfert exprimée en p (ou en s) à l'aide de la variable de Laplace. La condition pour qu'un système continu soit stable est que les pôles de sa fonction de transfert en Laplace soient à partie réelle négative.
D'autre part, étant donné que le lien entre les variables p et z s'exprime par la relation $z = e^{pT_e}$ et que la variable p s'écrit dans le cas général : p = α + jβ, alors $z = e^{\alpha T_e} e^{j\beta T_e}$.



Le fait que α soit négatif (condition de stabilité en p) implique que $e^{\alpha Te}$ soit inférieur à 1. Par conséquent, un système discret dont la fonction de transfert est exprimée en fonction de z est stable si tous les pôles ont un module inférieur à 1. On peut représenter ceci par un cercle unité(représentation polaire). Il faut donc que les pôles de la fonction de transfert se situent à l'intérieur du cercle unité.

3. Propriétés

3.1 Linéarité

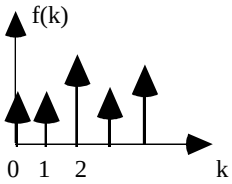
$$Z(af+bg) = aZ(f) + bZ(g)$$

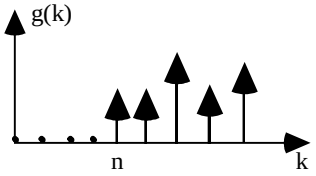
3.2 Théorème du retard temporel

Soient deux signaux discrets f(k) et g(k) tels que :

f(k) = 0 pour k<0 (signal causal)

g(k) = f(k-n), g(k) = 0 pour k<n (n > 0)





Calculons G(z) la transformée en z de g(k) :

$G(z) = \sum_{i=0}^{+\infty} g(i)z^{-i} = \sum_{i=n}^{+\infty} f(i-n)z^{-i}$ puisque g(i)=0 sur les premiers échantillons.

En posant j = i - n, il vient :

$$G(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} f(j)z^{-j-n} = z^{-n}\sum_{j=0}^{+\infty} f(j)z^{-j} = z^{-n}F(z)$$

d'où $Z(f_{k-n}) = z^{-n}F(z)$

Par conséquent retarder un signal causal de n échantillons revient à multiplier sa transformée en Z par z^{-n}.

3.3 Produit de convolution

Le produit des transformées en Z de deux signaux numériques est égal à la transformée en Z du produit de convolution des deux signaux.

$$Z(f*g) = Z(f)\,Z(g)$$

Démonstration : en supposant que f et g sont causals :

$f(k)*g(k) = \sum_{i=0}^{+\infty} f(i)\,g(k-i)$, cherchons la transformée en Z du produit de convolution :

$$Z(f*g)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty}f(i)g(k-i)\right)z^{-k}=\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}f(i)g(k-i)z^{-k}=\sum_{i=0}^{+\infty}f(i)\sum_{k=0}^{+\infty}g(k-i)z^{-k}$$

On reconnaît dans la seconde sommation la transformée en Z du signal g retardé de i échantillons (car nul pour k<i) , il vient donc :

$$Z(f*g)=\sum_{i=0}^{+\infty}f(i)z^{-i}\;G(z)=G(z)\sum_{i=0}^{+\infty}f(i)z^{-i}=G(z)F(z)$$ pour f et g causals.

3.4 Multiplication par e^{-at}

$$Z(e^{-akT_e}f(k))=F(ze^{aT_e})$$

Démonstration :

$$Z(e^{-akT_e}f(k))=\sum_{k=0}^{+\infty}f_k e^{-akT_e}z^{-k}=\sum_{k=0}^{+\infty}f_k\left(ze^{-aT_e}\right)^{-k}=F\left(ze^{aT_e}\right)$$

3.5 Multiplication par α^t

$$Z(\alpha^t f(t))=F(\frac{z}{\alpha^{T_e}})$$

Démonstration : évident à partir de la forme 3.4 en posant $\alpha=e^{-a}$ et en remplaçant t par kT_e si besoin.

3.6 Multiplication par t^n

$$Z(t^n f(t))=-T_e z\frac{d}{dz}\;Z(t^{n-1}f(t))$$

Démonstration : raisonnons pour n=1 :

$$Z(tf(t))=\sum_{k=0}^{+\infty}kT_e f(k)z^{-k}=T_e z\sum_{k=0}^{+\infty}kf(k)z^{-k-1}=-T_e z\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{d}{dz}\left(f(k)z^{-k}\right)$$
$$=-T_e z\frac{d}{dz}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left(f(k)z^{-k}\right)\right)=-T_e z\frac{d}{dz}Z(f(t))$$

Pour n quelconque, on utilise n fois la relation :

$$Z(t^n f(t))=-T_e z\frac{d}{dz}Z(t^{n-1}f(t)).$$

4. Transformée en Z des signaux-test

4.1 Dirac

$$Z(\delta(t))=1$$

4.2 Echelon

$$Z(\Gamma(t))=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}$$

5. Théorème de la valeur finale et de la valeur initiale

5.1 Théorème de la valeur initiale

$$f(0) = \lim_{z \to +\infty} F(z)$$

Démonstration :

Puisque $F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k) z^{-k} = f(0) z^{0} + f(1) z^{-1} + f(2) z^{-2} + \ldots + f(n) z^{-n} + \ldots$ alors lorsque $z \to \infty$ $F(z) \to f(0)$.

5.2 Théorème de la valeur finale

$$\lim_{k \to +\infty} f_k = \lim_{z \to 1} \left((z-1) F(z) \right)$$

Démonstration :

Formons

$$Z\left(f(t+T_e) - f(t)\right) = zF(z) - zf(0) - F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(f(k+1) -$$

.

Si l'on fait tendre z vers 1, l'égalité devient :

$$\lim_{z \longrightarrow 1} \left((z-1)F(z)\right) - f(0) = \lim_{k \longrightarrow +\infty} f(k) - f(0).$$

6. Recherche de l'original $Z^{-1}[X(z)] = x(k)$

Pour la recherche de l'original, il suffit d'utiliser la table de transformée. Toutefois, les formes sont souvent trop compliquées et n'apparaissent par conséquent pas directement dans la table. Il est par conséquent nécessaire d'utiliser une "astuce" telle que la dérivée ou l'intégrale ou, le plus souvent, de décomposer la forme obtenue en formes plus simples à l'aide de la décomposition en éléments simples.

Exemple de résolution de la transformée inverse en Z par décomposition en éléments simples :

La décomposition en éléments simples a pour objectif d'obtenir des formes simples qui soient présentes dans la table de transformée en Z.

$$Y(z) = \frac{z^3}{(z-a)(z-b)(z-c)} = \frac{Az}{z-a} + \frac{Bz}{z-b} + \frac{Cz}{z-c}$$

Lorsque A, B et C seront déterminés, les formes de la partie droite de l'équation ci-dessus sont bien des éléments simples présents dans la table de transformée en Z.

7. TABLE DE TRANSFORMEES EN Z (T_e est la période d'échantillonnage)

N.B. : En fonction des nécessités (notamment pour la décomposition en éléments simples), il est possible de passer de formes en z en formes en z-1

Passage de Laplace à z => $z = e^{pTe}$	$x(kT_e) = x_k$	$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x_n . z^{-n}$

Propriétés ou théorèmes	domaine temporel	domaine symbolique z
Linéarité	$x_k + y_k$ $A.x(k)$ 0	$X(z) + Y(z)$ $A.X(z)$ 0
Théorème du retard	$x_{k-n} = x((k-n)T_e) = x(t - nT_e)$	$z^{-n}X(z)$

Multiplication par e^{-at}	$e^{-at}x(t) = e^{-akTe}x_k$	$X(z.e^{aTe})$
Multiplication par k	$k.x_k$	-z.
	$k.\Gamma_k$	
	$at.\Gamma_k = akT_e.\Gamma_k$	$\frac{A.T_e z}{(z-1)^2}$
	$k^2.\Gamma_k$	
	$k^3.\Gamma_k$	
Multiplication par a^k	$a^k x_k$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$
	$a^k.\Gamma_k$	
	$ka^k.\Gamma_k$	
	$k^2a^k.\Gamma_k$	+
Produit de convolution	$x_k * y_k = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k y_{n-k}$	X(z) . Y(z)
	$x_k \cdot y_k$	X(z) * Y(z)

Théorème de la valeur initiale $x(0) = \lim_{z \to +\infty} X(z)$	Théorème de la valeur finale : $\lim_{k \to +\infty} x(k) = \lim_{z \to 1} (z-1)X(z)$	Théorème de la somme : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n = \lim_{z \to 1} X(z)$

domaine temporel	domaine symbolique
δ_k	1 ou z^0
Γ_k (=1 pour $k \geq 0$)	
$t^k.f(t)$	$-T_e z..Z(t^{k-1}f(t))$
t.f(t)	$-T_e z..Z(f(t))$
$\frac{a^k}{k!}$	$e^{a/z}$
$k^n T_e{}^n e^{akT_e}$	$\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left[\frac{1}{1-e^{-aT_e}.z^{-1}}\right]$
e^{akT_e}	$\frac{1}{1-e^{-aT_e}.z^{-1}}$

domaine temporel	domaine symbolique
$te^{-t/T} = kT_e e^{-k\frac{T_e}{T}}$	$\frac{T_e z.e^{-T_e/T}}{(z-e^{-T_e/T})^2}$
$\begin{cases} e^{-t/T}\sin(\omega t+\phi) \\ e^{-k\frac{T_e}{T}}\sin(\omega kT_e+ \end{cases}$	$\frac{z\left(z.\sin(\phi)+e^{-T_e/T}\sin(\omega T_e-\phi)\right)}{z^2-2z.e^{-T_e/T}\cos\omega T_e+e^{-2T_e/T}}$
	$-<\phi<$
x^*k	$X^*(z^*)$
sin ωt = sin ωkT$_e$	$\frac{z.\sin(\omega T_e)}{z^2-2z\cos(\omega T_e)+1}$
cos ωt = cos ωkT$_e$	$\frac{z.(z-\cos(\omega T_e))}{z^2-2z\cos(\omega T_e)+1}$

8. Utilisation du serveur web

Dans le paragraphe 4 du serveur, vous trouverez :

- Un questionnaire d'auto-évaluation sur la transformée en Z.

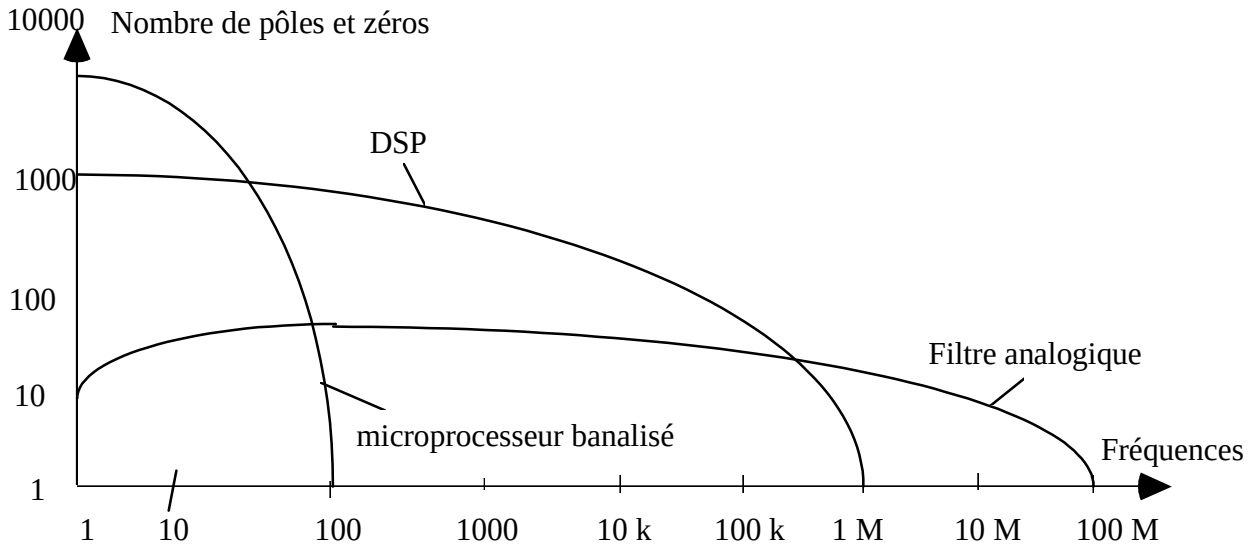
Chapitre 2 : Le filtrage numérique

L'appellation de filtrage fait penser aux opérations qui sont effectuées dans le domaine analogique. Si l'on compare les filtres analogiques et numériques, on peut observer des analogies et des différences :

- Analogie de **comportement :** c'est par analogie avec les filtres analogiques que l'on conçoit les filtres numériques et c'est à leurs réponses en amplitude et en phase que l'on compare celles des filtres numériques, tout au moins dans un premier temps.
- Différence fondamentale de **structure** : les filtres numériques sont implantés sur des processeurs standards ou dédiés (processeurs de traitement du signal) ; à cet égard il est bon de rappeler que l'utilisation d'un micro-ordinateur n'a de sens que si les phénomènes mis en jeu ne sont pas trop rapides. Si la rapidité est trop importante, il faut utiliser des cartes spécialisées avec processeur de traitement du signal. On peut noter que la notion de structure doit être comprise dans le sens **d'algorithme** et pas seulement dans le sens de structure de réalisation matérielle.

1. Définition d'un filtre numérique

Un filtre numérique est constitué d'un groupement de circuits logiques astreints à un processus de calcul (ou algorithme) qui confère à ce filtre une fonction déterminée (passe-bas, passe-haut, passe-bande, réjecteur de bande, intégrateur, différentiateur, ...). Le calcul porte sur une séquence (ou suite) de nombres introduites à son entrée et fournit une séquence numérique modifiée, c'est-à-dire "filtrée" ou traitée, à sa sortie. La plupart des modèles de filtres analogiques peuvent ainsi être reproduits sous forme numérique. Les éléments physiques (résistance, capacité, inductance, amplificateurs opérationnels) sont en quelque sorte transposés en éléments logiques.
L'avantage majeur des processeurs de traitement du signal réside dans la rapidité des traitements (multiplication hard) ce qui permet de les utiliser pour des applications industrielles temps réel.



La courbe ci-dessus donne les performances comparées de filtres numériques conçus à partir de techniques différentes et du filtre analogique.

Comme on peut le constater, le filtrage analogique couvre une gamme de fréquences beaucoup plus large, mais se trouve limité en nombre de singularités (c'est la richesse en pôles et en zéros qui détermine la "raideur" d'un filtre).

2. Constitution des filtres numériques

Un filtre numérique est généralement constitué des éléments suivants :

- un ou plusieurs organes de retard (ce sont des registres à décalage jouant le rôle de mémoires retardées), pilotés par une horloge de période,
- des opérateurs arithmétiques (additionneurs et multiplieurs),
- des registres fournissant les coefficients de pondération du filtre.

La réalisation concrète d'un filtre numérique consistera en fait à matérialiser l'algorithme de calcul pour la structure retenue. On aura la possibilité de travailler :

- soit en logique câblée (assemblage d'organes logiques, tels que portes, mémoires, etc ...),
- soit en logique programmée (organisation autour d'un processeur de traitement du signal (DSP) ou, même, utilisation d'un microprocesseur(micro-ordinateur) standard).

3. Champ d'applications

Le champ d'applications du filtrage numérique est très vaste puisqu'il va des télécommunications au traitement de la parole, en passant par les systèmes d'asservissement, les radars et sonars, la prospection sismique, la "HiFi", etc... C'est surtout, à l'origine, dans les télécommunications que leur usage s'est très vite répandu car à la fois leur capacité de mémoire et la vitesse de traitement se trouvaient adaptées à la plupart des fonctions remplies sous forme numérique :

- codage-décodage (MPEG, JPEG), compression d'images et du son (informatique, télévision numérique),
- modulation FSK ("Phase Shift Keying"),
- corrections normalisées,

- séparateurs de canaux,
- modems (RTC, réseaux câblés, RNIS),
- Hi Fi, instruments de musique,
- contrôleurs de disques durs,
- accélérateurs graphiques 3D, animation en réalité virtuelle,
- reconnaissance d'images,
- cartes sons,
- suspensions actives automobiles,
- servo-moteurs à commande numérique,
- télécopies,
- radars.

Dans de nombreuses applications sont utilisés des DSP dédiés, c'est-à-dire qu'ils sont directement "programmés" avec un logiciel particulier à la conception (soit en ROM, soit câblé).

4. Propriétés des filtres numériques

Les avantages du filtrage numérique par rapport au filtrage analogique sont importants :

- reproductibilité : les caractéristiques de tous les filtres numériques établis sur une même configuration sont rigoureusement identiques,
- souplesse : la réponse en fréquence peut être très aisément modifiée en changeant les coefficients arithmétiques ; le domaine des fréquences de travail est facilement déplacé par modification de la fréquence d'échantillonnage,
- précision : les différentes manipulations étant effectuées sur des nombres, la précision ne dépend, en grande partie, que de celle du CAN et de celle du CNA,
- association des filtres : la mise en série de filtres numériques ne pose aucun problème d'interaction, tel que celui que l'on rencontre pour l'adaptation des impédances des filtres analogiques,
- stabilité des caractéristiques : il n'y a pas de vieillissement des composants dû à l'influence de la température sur les caractéristiques du filtre.

Les principaux inconvénients sont liés au problème de l'échantillonnage (spectre du signal toujours limité) nécessitant l'utilisation de processeurs ayant une bonne rapidité d'exécution pour pouvoir traiter des signaux ayant une forte "dynamique" (fréquences élevées) en **temps réel**.

Chapitre 3 : Analyse des filtres non récursifs ou RIF

1. L'équation de récurrence

Un filtre à Réponse Impulsionnelle Finie ou filtre RIF possède une fonction de transfert polynomiale. Il **ne peut pas être obtenu** par transposition d'un filtre continu. Par rapport aux filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII) ils présentent l'inconvénient de nécessiter un grand nombre de coefficients pour obtenir les mêmes caractéristiques fréquentielles. Ceci est dû au fait que leur fonction de transfert ne possède pas de pôle. Cette absence de pôles permet cependant d'obtenir des filtres inconditionnellement *stables.* Les filtres non récursifs ou RIF sont des systèmes pour lesquels une valeur s_k de sortie est obtenue par une somme pondérée d'un ensemble fini de valeurs d'entrée représentant les échantillons du signal à filtrer. L'équation de récurrence s'écrit donc :

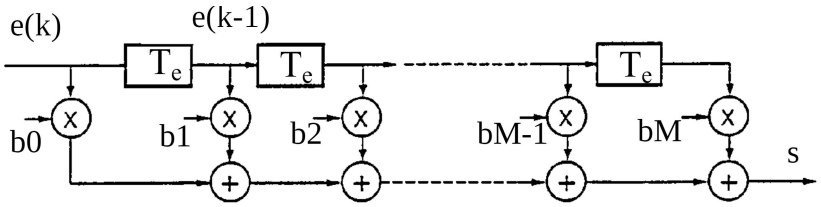
$$s_k = b_0 e_k + b_1 e_{k-1} + \ldots + b_M e_{k-M} = \sum_{i=0}^{M} b_i e_{k-i}$$

M est **l'ordre** du filtre.
On peut remarquer qu'un filtre RIF d'ordre M possède **N=M+1** coefficients b_i.

2. Structure de réalisation

2.1 Structure directe

La mise en œuvre nécessite pour chaque valeur de sortie M multiplications et M additions. Il faut de plus M+1 mémoires pour les coefficients et M+1 mémoires de données. L'expression de la sortie s_k amène naturellement à la structure dite directe représentée ci-dessus.

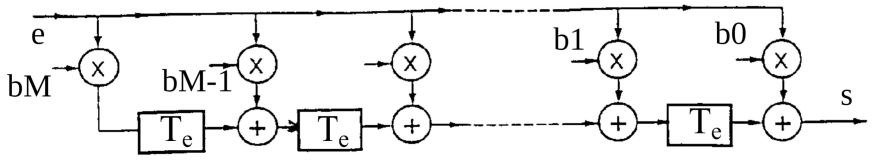


Le fonctionnement de l'ensemble est cadencé dans le temps au rythme de la période d'échantillonnage T_e. La cellule T_e représente un opérateur de retard temporel T_e. La valeur présente sur son entrée au temps kT_e se retrouve sur sa sortie au temps $(k-1)T_e$. Au temps kT_e, on réalise donc l'opération :

$$s_k = b_0 e_k + b_1 e_{k-1} + \ldots + b_M e_{k-M} \text{ ou}$$
$$s(kT_e) = b_0 e(kT_e) + b_1 e((k-1)T_e) + \ldots + b_M e((k-M)T_e)$$

2.2 Structure transposée

On peut aussi imaginer une structure dite transposée. Dans cette structure, les cellules à retard ne mémorisent pas les entrées mais des sommes partielles.



Au temps kT_e, on trouve des cellules à retard successives $b_M e_{k-1}$, $b_M e_{k-2} + b_{M-1} e_{k-1}$, ..., $b_M e_{k-M} + \ldots + b_1 e_{k-1}$. On réalise donc en sortie du filtre le calcul de s_k. Quelle que soit la structure choisie, il n'y a pas de boucle de réaction. On n'utilise pas les valeurs des sorties

précédentes pour calculer la sortie actuelle. Pour cette raison, le filtre est fréquemment désigné par filtre non-récursif.

2.3 Autres structures

PHOTOCOPIES SCHEMAS STRUCTURES
LIVRE DSP p. 265

3.1 La réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle est la réponse à la séquence causale $\delta_k = (1,0,0,...)$. On obtient :

$$h_k = b_0\delta_k + b_1\delta_{k-1} + ... + b_M\delta_{k-M}$$

c'est-à-dire : $h_i = 0$ si $i < 0$(causalité),

$$h_0 = b_0.1 + b_1.0 + ... + b_M.0 = b_0,$$

$$h_1 = b_0.0 + b_1.1 + ... + b_M.0 = b_1,$$

..., $h_i = b_i$,

$h_M = b_0 . 0 + b_1 . 0 + ... + b_M . 1 = b_M$,

$h_j = 0$ si $j > M$.

Ainsi, les coefficients de pondération ne sont rien d'autre que les valeurs de la réponse impulsionnelle du filtre. Puisque ces coefficients sont en nombre limité, la réponse impulsionnelle du filtre s'annule au bout de M+1 valeurs. On dit qu'elle est finie et le filtre est lui-même appelé filtre à réponse impulsionnelle finie ou filtre RIF (Finite Impulse Response : FIR pour les Anglo-saxons).

L'équation de récurrence de définition du filtre peut s'écrire en remplaçant les coefficients b_i par les valeurs h_i de la réponse impulsionnelle :

$s_k = h_0 e_k + h_1 e_{k-1} + \ldots + h_M e_{k-M}$, ou, de manière plus condensée : $s_k = \sum_{i=0}^{M} h_i e_{k-i}$.

4. La réponse indicielle

C'est le signal $\{d_k\}$ réponse au signal causal $\Gamma_k = (1,1,1,.....1)$. La séquence représentative de $\{d_k\}$ vérifie :

$$d_k = b_0 \Gamma_k + b_1 \Gamma_{k-1} + \ldots + b_M \Gamma_{k-M}$$

c'est-à-dire : $d_i = 0$ si $i < 0$(causalité),

$d_0 = b_0 . 1 + b_1 . 0 + ... + b_M . 0 = b_0$,

$d_1 = b_0.1 + b_1.1 + ... + b_M.0 = b_0 + b_1$,

..., $d_i = b_0 + b_1 + ... + b_i$,

$d_M = b_0 . 1 + b_1 . 1 + ... + b_M . 1 = b_0 + b_1 + ... + b_M$,

$d_j = d_M$ si $j > M$.

Ainsi la valeur finale de la réponse indicielle est égale à la somme des coefficients du filtre RIF. Cette valeur est atteinte au bout de M+1 sorties.

5. La réponse fréquentielle

5.1 Fonction de transfert en z

La fonction de transfert en z s'écrit :

$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}$ ou, de manière plus condensée, $H(z) = \sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}$.

Elle ne présente pas de pôle mais seulement des zéros, le filtre RIF sera par conséquent toujours **stable**.

5.2 Réponse en fréquence

Il suffit de remplacer z par $e^{j2\Pi fT_e}$,d'où :

$$H(jf) = H(f) = b_0 + b_1 e^{-j2\Pi fT_e} + \ldots + b_M e^{-j2\Pi MfT_e} \text{ soit } H(jf) = \sum_{i=0}^{M} b_i e^{-j2\Pi ifT_e}$$

Cette réponse est bien sûr périodique de période fréquentielle $F_e = \frac{1}{T_e}$. Les coefficients de pondération du filtre RIF constituent les coefficients du développement en série de Fourier de la fonction de transfert H(jf).

Chapitre 4 : Synthèse des filtres non récursifs ou RIF

La synthèse consiste à déterminer la structure d'un filtre en fonction de la réponse fréquentielle que l'on veut obtenir. La réponse fréquentielle d'un filtre numérique est périodique de "période fréquentielle" f_e, par conséquent **la fonction de transfert utile** sera déterminée pour l'intervalle $\left[-\frac{f_e}{2};\frac{f_e}{2}\right]$.

Principe

Il s'agit de définir le cahier des charges du filtre à réaliser. Il faudra préciser dans le cas général :

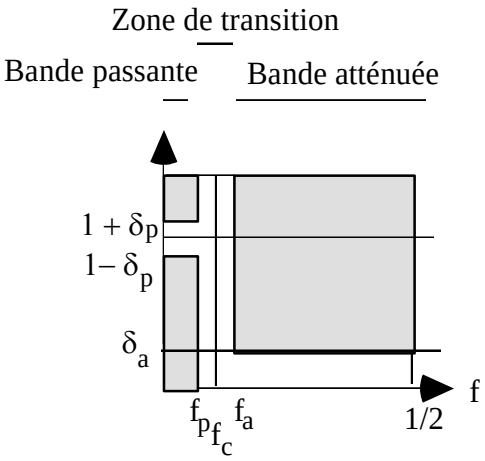
- les valeurs limites de la bande passante (ou atténuée),
- les valeurs permises des ondulations en bande passante et en bande atténuée,
- la largeur de la zone de transition permise,
- éventuellement l'ordre maximal permis,
- la fréquence d'échantillonnage.

Exemple de synthèse dans le cas d'un passe-bas de fréquence de coupure f_c

On a $f_c = 0.5(f_p + f_a)$; *p* signifie zone passante, *a* zone atténuée.

La réponse fréquentielle est définie par:

$$H(jf) = \begin{cases} 1 \text{ si } |f| < f_p \\ 0 \text{ si } |f| > f_a \end{cases}$$



En pratique plus les fréquences f_p et f_a sont proches, plus l'ordre du filtre devra être élevé. Pour un filtre idéal, les trois valeurs seraient confondues.

On spécifie le *gabarit* du filtre en donnant :

- l'ondulation permise en bande passante en décibels: A_p (dB),

$$A_p(\text{dB}) = 20\log(1+\delta_p) \text{ d'où } \delta_p = 10^{0.05A_p} - 1$$

- l'ondulation permise en bande atténuée en décibels : A_a (dB),

$$A_a(\text{dB}) = -20\log\delta_a \text{ d'où } \delta_a = 10^{-0.05A_a}$$

- les fréquences $f_p$et f_a.

1. Détermination par identification à une structure connue

On pourra procéder par identification à une structure connue. Supposons que l'on veuille concevoir un filtre passe-bas de fréquence de coupure f_c, on peut alors prendre la structure réalisée par le filtre RIF suivant : $s_n = \frac{1}{2}e_n + \frac{1}{2}e_{n-1}$.

La réponse de ce type de filtre s'obtient de la manière suivante :

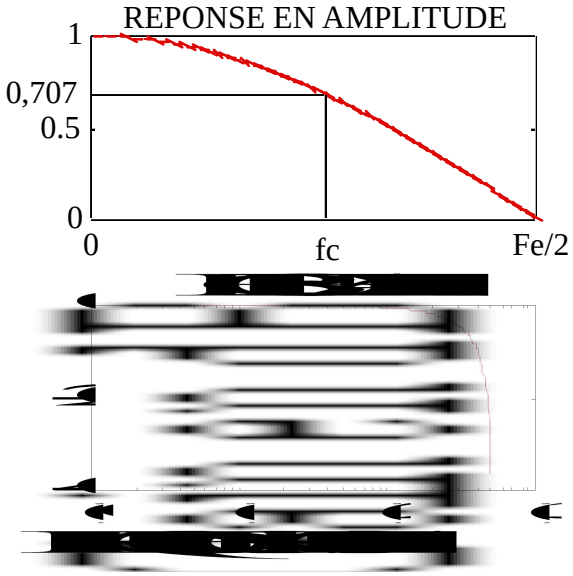
$$S(z) = \frac{1}{2}E(z) + \frac{1}{2}E(z)z^{-1} \text{ d'où } H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1},$$

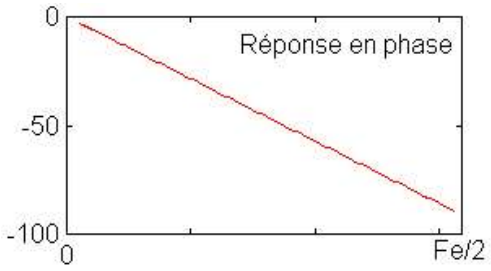
La réponse fréquentielle sera donc :

$$H(j\omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\omega T_e} = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega T_e/2} + e^{-j\omega T_e/2}\right)e^{-j\omega T_e/2} = \cos\left(\frac{\omega T_e}{2}\right)e^{-j\omega T_e/2}$$

d'où on tirera les réponses en amplitude et en phase :

$$|H(j\omega)| = \left|\cos\left(\frac{\omega T_e}{2}\right)\right| \qquad \arg(H(j\omega)) = 0 - \frac{\omega T_e}{2}$$





On obtient $f_c=f_e/4$. Par conséquent, si l'on désire une certaine fréquence de coupure f_c, il suffit de fixer f_e. Naturellement dans ce cas, il n'y aura pas similitude de la pente en dB par octave ni du déphasage entre les filtres analogique et numérique.

2. Détermination des coefficients par la méthode de la fenêtre (fonction Matlab FIR1)

2.1 Principe

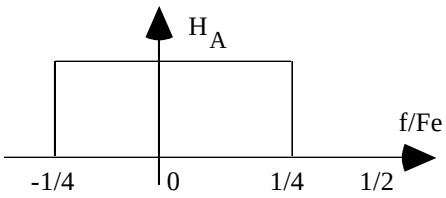
Cette technique consiste, connaissant l'expression analytique $H_A(jf)$ de la réponse fréquentielle à approcher, à déterminer par utilisation de la transformée de Fourier inverse, la réponse impulsionnelle. On sait par ailleurs que les échantillons de la réponse impulsionnelle sont égaux aux coefficients du filtre.

$$h_A(t) = F^{-1}(H_A(jf)).$$

On part en général d'une réponse fréquentielle "connue" mathématiquement de type fenêtre (rectangulaire = filtre idéal, triangulaire, Hann/Hamming,...) puis on obtient une réponse temporelle non causale. Il suffira de retarder cette réponse pour la rendre causale.

Illustrons cette technique dans le cas particulier où l'on désire approcher la fonction de transfert d'un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_C = \frac{f_e}{4}$. La réponse fréquentielle désirée est tracée ci-dessous et est définie par :

$$\begin{cases} H_A(jf) = 1 \ \text{ pour } \ -\dfrac{f_e}{4} < f < \dfrac{f_e}{4} \\ H_A(jf) = 0 \ \text{ ailleurs} \end{cases}$$



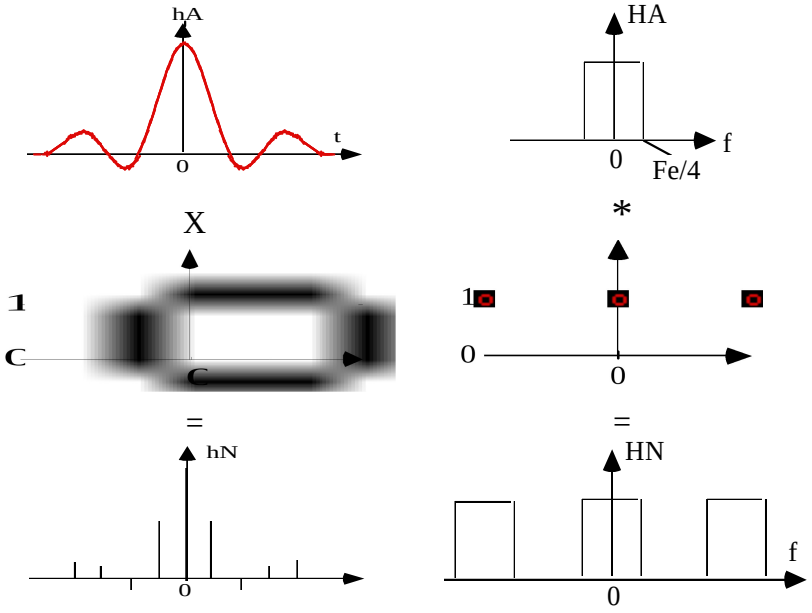
Pour cela, on part du module de la fonction de transfert $H_A(jf)$à approcher défini sur l'intervalle $\left[-\frac{f_e}{2};\frac{f_e}{2}\right]$. Il lui correspond une réponse impulsionnelle qui s'écrit :

$$h_A(t) = F^{-1}\left(H_A(jf)\right) = \int_{-f_C}^{f_C} e^{j2\pi ft}\,df = \frac{\sin(2\pi f_c t)}{\pi t}$$

Pour obtenir la fonction de transfert $H_N(jf)$ du filtre RIF idéal, on "périodise" la fonction $H_A(jf)$, ce qui revient à la convoluer avec un peigne $|_|_|_{F_e}(f)$ de période F_e.

Dans le domaine temporel, cette opération correspond à un échantillonnage à la période T_e de la réponse impulsionnelle accompagné d'une multiplication de l'amplitude par T_e, on trouve ainsi la réponse impulsionnelle $h_N^*(k) = T_e h_A(t)|_|_|_{T_e}$ du filtre numérique idéal. Les échantillons de cette réponse impulsionnelle sont les coefficients du filtre numérique non récursif idéal. Ils s'écrivent :

$$h_k = T_e h_A(kT_e) = \frac{\sin(2\pi f_c kT_e)}{\pi k}$$



Deux défauts apparaissent alors. La réponse impulsionnelle est infinie et non causale. Pour éliminer ces défauts, on procède comme suit :

Pour rendre la réponse impulsionnelle finie, on effectue une troncature de la réponse impulsionnelle échantillonnée obtenue, c'est-à-dire que l'on annule les échantillons situés à l'extérieur d'une "fenêtre" temporelle de largeur $(M+1)T_e$. Tout se passe comme si on multipliait la réponse impulsionnelle h_N^* par une fonction F(t) dite *fenêtre rectangulaire* définie par:

$$\begin{cases} F(t) = 1 \ \ pour \ \ -\dfrac{(M+1)}{2}T_e < t < \dfrac{M+1}{2}T_e \\ F(t) = 0 \ \ ailleurs \end{cases}.$$

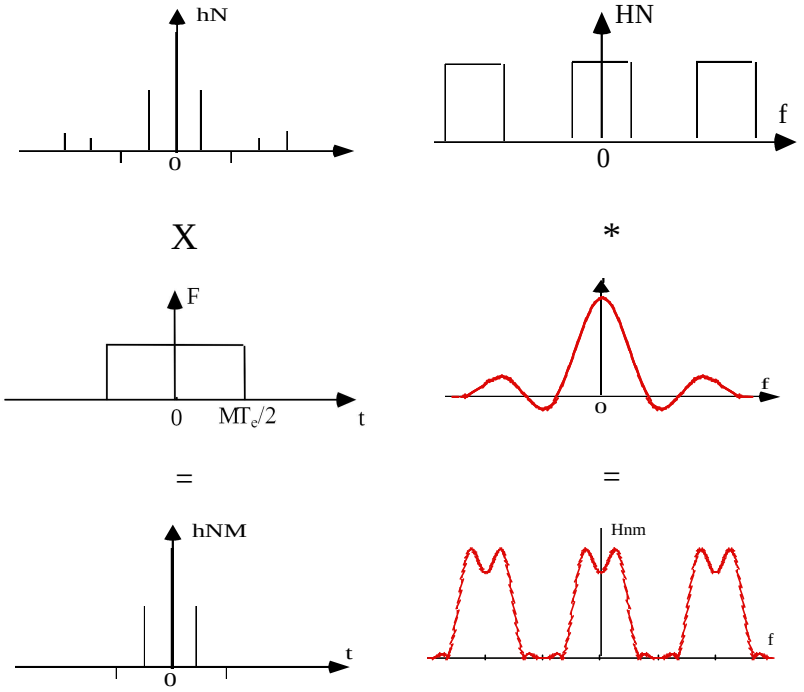
On obtient alors une réponse impulsionnelle $h^*_{N_M}(k)$ tronquée où seuls subsistent M+1 échantillons :

$$h^*_{N_M}(k) = F(k)h^*_N(k) = F(k)(h_A(t)T_e|_|_|_{T_e})$$

$$\begin{cases} h^*_{N_M}(k) = T_e h_A(kT_e) = \dfrac{\sin(2\pi f_c kT_e)}{\pi k} \quad pour \quad -\dfrac{(M+1)}{2} \le k \le \dfrac{M+1}{2} \\ h^*_{N_M}(k) = 0 \quad ailleurs \end{cases}$$

Dans le domaine fréquentiel, cette multiplication se traduit par une convolution de la fonction idéale $H_N(f)$ avec la transformée de Fourier F(f) de la fonction fenêtre F : $F(f) = \dfrac{\sin(\pi f M T_e)}{\pi f}$.

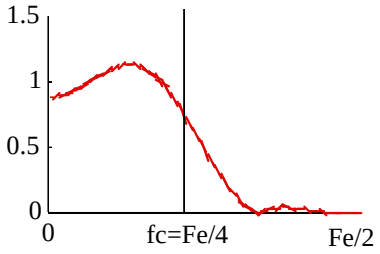
Cette convolution fait apparaître des ondulations en bande passante et en bande atténuée et limite la raideur de coupure du filtre.



Pour une fenêtre rectangulaire et un ordre M=8, on obtient :

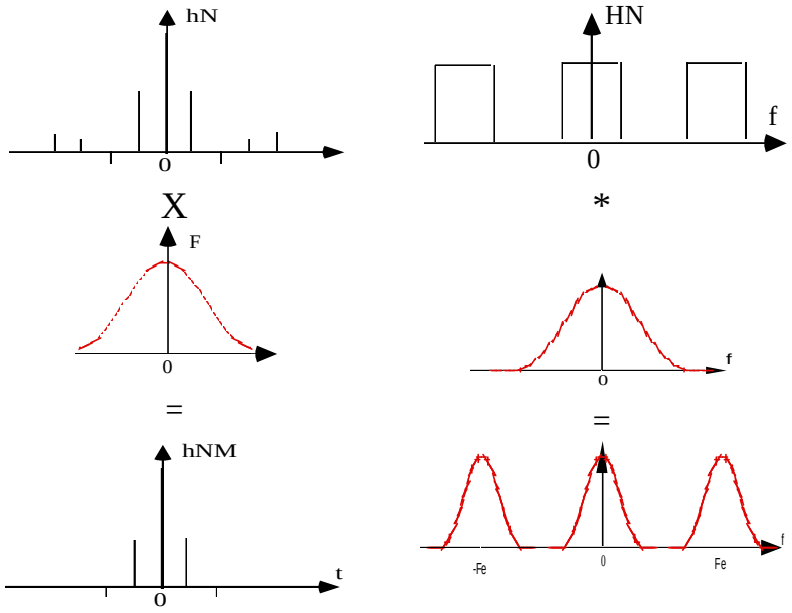
h(4) = h(-4) = 0.0000
h(3) = h(-3) = -0.1148
h(2) = h(-2) = 0.0000
h(1) = h(-1) = 0.3443
h(0) = 0.5409

(num=fir1(8,0.5,boxcar(9)) sous MATLAB)



On remarque que la courbe passe par la demi-hauteur de la discontinuité. En augmentant l'ordre du filtre M, on augmente la raideur de la coupure et le nombre d'ondulations mais on ne diminue pas leur amplitude maximale : c'est le ***phénomène de Gibbs***. Les ondulations dépendent de celles de F(f). Pour les réduire, on peut imaginer de choisir une fonction fenêtre w(t) dont le spectre W(f)présente moins d'ondulations que celui de F(t). C'est la même situation que celle rencontrée pour l'analyse spectrale et on peut utiliser les mêmes fonctions fenêtres. Si l'on choisit la fonction de Hamming telle que :

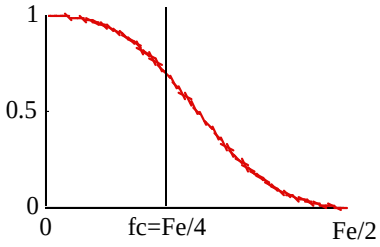
$$\begin{cases} w(t) = 0.54 + 0.46\cos\left(2\pi \dfrac{t}{MT_e}\right) \quad pour \quad -\dfrac{M}{2}T_e < t < \dfrac{M}{2}T_e \\ w(t) = 0 \quad ailleurs \end{cases}$$



Pour une fenêtre de Hamming et un ordre M=8, on obtient:

h(4) = h(-4) = 0.0000
h(3) = h(-3) = -0.0227
h(2) = h(-2) = 0.0000
h(1) = h(-1) = 0.2740
h(0) = 0.4974

(num=fir1(8,0.5,hamming(9)) sous MATLAB)



On remarque que si l'on a bien une réduction des ondulations, on a par contre une diminution de la raideur de coupure.

Pour rendre la réponse impulsionnelle causale, on la retarde de $\frac{M-1}{2}$ périodes T_e. A ce retard $\frac{M-1}{2}T_e$ temporel correspond une multiplication par $e^{-j2\pi f\frac{M-1}{2}T_e}$, c'est-à-dire à l'apparition d'une phase linéaire. Les coefficients b_k s'expriment alors par :

$$b_k = T_e h_A\left(\left(k-\frac{M-1}{2}\right)T_e\right) = \frac{\sin\left(2\pi f_c\left(k-\frac{M-1}{2}\right)T_e\right)}{\pi\left(k-\frac{M-1}{2}\right)}$$ pour 0<k<M-1 (fenêtre rectangulaire)

$$b_k = \frac{\sin\left(2\pi f_C\left(k-\frac{M-1}{2}\right)T_e\right)}{\pi\left(k-\frac{M-1}{2}\right)}\left(0.54+0.46\cos\left(\frac{2\pi}{M}\left(k-\frac{M-1}{2}\right)\right)\right)$$ pour 0<k<M-1 (fenêtre de Hamming).

Le filtre obtenu est donc un filtre RIF à phase linéaire dont le module approche d'autant mieux la fonction désirée que l'ordre et donc le nombre de coefficients est important.

2.2 Utilisation pratique de la méthode

1ère étape: Spécifier la réponse fréquentielle désirée du filtre $H_N(f)$ (ou $H_N(\omega)$). Il faudra faire attention aux fréquences de coupure à prendre en compte. Afin d'avoir de bons résultats lors de la synthèse, **ce ne sont pas les fréquences de coupure du filtre idéal qu'il faut utiliser mais il faut déplacer celles-ci afin de les centrer dans la zone de transition** :

- pour un passe-bas, l'augmenter de la demi zone de transition,
- pour un passe-haut, la diminuer de la demi zone de transition,
- pour un passe-bande, diminuer la première fréquence de coupure de la demi zone de transition et augmenter la seconde de la demi zone de transition,
- pour un réjecteur de bande, on fera l'inverse.

Les tableaux des pages suivantes nécessitent d'utiliser des fréquences réduites, c'est-à-dire des fréquences exprimées non pas en Hz mais en fonction de la fréquence d'échantillonnage. Il y a deux manières d'exprimer la fréquence réduite :

- la première consiste à diviser toutes les fréquences par f_e et par conséquent d'obtenir une nouvelle fonction de la variable f/f_e, cette méthode est très souvent utilisée dans la littérature,
- la seconde consiste à diviser toutes les fréquences par $f_e/2$ et par conséquent d'obtenir une nouvelle fonction de la variable $2f/f_e$, cette méthode est celle que l'on utilisera car c'est celle qui est utilisée parle logiciel Matlab pour effectuer la synthèse.

2ème étape : Obtenir la réponse impulsionnelle $h_N(k)$ du filtre numérique désiré, par l'évaluation de la transformée de Fourier inverse, les coefficients de la réponse impulsionnelle étant en fait les coefficients du filtre. Pour obtenir la réponse impulsionnelle d'un filtre idéal, on pourra utiliser le tableau ci-dessous :

	Réponse impulsionnelle idéale $h_N(k)$	
Type de filtre	$h_N(k)$, $k \neq 0$	$h_N(0)$
Passe-bas	$f_c \frac{\sin(k\pi f_c)}{k\pi f_c}$	f_c
Passe-haut	$-f_c \frac{\sin(k\pi f_c)}{k\pi f_c}$	$1 - f_c$
Passe-bande	$f_2 \frac{\sin(k\pi f_2)}{k\pi f_2} - f_1 \frac{\sin(k\pi f_1)}{k\pi f_1}$	$f_2 - f_1$
Réjecteur de bande	$f_1 \frac{\sin(k\pi f_1)}{k\pi f_1} - f_2 \frac{\sin(k\pi f_2)}{k\pi f_2}$	$1 - (f_2 - f_1)$

Tableau 1 - Réponses impulsionnelles idéales pour les filtres fréquentiels standards

N.B. : Ce tableau est utilisable en prenant en considération le fait que les fréquences sont normalisées par rapport à la demi-fréquence d'échantillonnage (comme c'est le cas dans Matlab). Les fréquences f_c indiquées dans ce tableau (fréquences de coupure désirées) s'expriment également en fréquences normalisées.

3ème étape : Sélectionner une fenêtre qui satisfait les spécifications requises pour déterminer le nombre de coefficients du filtre en fonction de la largeur de la transition souhaitée.

Type de fenêtre	Δf, largeur de transition (en fréquence réduite)	Ondulation en bande passante A_p (dB)	Atténuation du 1er lobe secondaire (dB)	Atténuation en bande atténuée A_a (dB)	Fonction fenêtre $w_k, \lvert k\rvert \le \frac{N-1}{2}$
Rectangulaire	1.8/N	0.7416	13	21	1
Hann (Hanning)	6.2/N	0.0546	31	44	$0{,}5 + 0{,}5\cos\frac{2\pi k}{N}$
Hamming	6.6/N	0.0194	41	53	$0{,}54 + 0{,}46\cos\frac{2\pi k}{N}$
Blackman	11/N	0.0017	57	74	$0{,}42 + 0{,}5\cos\frac{2\pi k}{N-1} + 0{,}08\cos\frac{4\pi k}{N-1}$
Kaiser	5.86/N (β=4.54) 8.64/N (β=6.76) 11.42/N (β=8.96)	0.0274 0.00275 0.000275		50 70 90	$\frac{I_0\left(\beta\sqrt{1-\left(2k/(N-1)^2\right)}\right)}{I_0(\beta)}$ avec $I_0(x) = 1 + \sum_{m=1}^{M}\left[\frac{(x/2)^m}{m!}\right]^2$ avec M < 25

Tableau2

N.B. 1 : Ce tableau est utilisable en prenant en considération le fait que les fréquences sont normalisées par rapport à la demi-fréquence d'échantillonnage (comme c'est le cas dans Matlab).

N.B. 2 : Dans ce tableau, N représente le nombre de coefficients du filtre (autrement dit M + 1).

*N.B. 3 : Afin de simplifier la synthèse, il est conseillé de choisir un nombre de coefficients de filtres **impair**, autrement dit un ordre **pair**.*

N.B. 4 : Il se peut que les expressions mathématiques des fenêtres données ici soient légèrement différentes de celles que l'on peut trouver dans la littérature (ou dans les boîtes à outils de Matlab). Ces différences traduisent en général simplement un déphasage temporel.

- Pour ce qui concerne les fenêtres rectangulaire, de Hamming, Hanning et Blackman, il existe une relation simple entre la largeur de la bande de transition et l'ordre du filtre. Les ondulations en bande passante sont données en dB, les ondulations en bande atténuée sont identiques, **ceci est une caractéristique des filtres conçus par la méthode de la fenêtre avec les fenêtres rectangulaire, de Hamming, Hann et Blackman**. Les valeurs relatives de l'amplitude du lobe central par rapport au premier lobe secondaire sont ensuite données en dB. L'avant-dernière colonne donne l'atténuation maxi en bande atténuée que l'on pourra obtenir, **cette caractéristique sera un critère de choix important pour le type de fenêtre.** Enfin la dernière colonne rappelle les expressions mathématiques des fenêtres.

- La fenêtre de Kaiser permet d'obtenir des ondulations différentes en bande passante et atténuée. Lors de la conception, il faudra prendre la plus petite des ondulations en bande passante ou atténuée $\delta = \min(\delta_p, \delta_a)$ afin de déterminer la valeur d'un nouveau paramètre β.

  Lorsque la paramètre β = 0, la fenêtre de Kaiser est égale à la fenêtre rectangulaire, et lorsque β = 5.44, la fenêtre est très proche de la fenêtre de Hamming, mais pas identique. La valeur de β est déterminée en fonction de l'atténuation désirée en bande atténuée et peut être estimée à l'aide des relations empiriques ci-dessous :

  $\beta = 0$ si A < 21 dB

  $\beta = 0.5842(A-21)^{0.4} + 0.07886(A-21)$ si 21 dB < A < 50 dB

  $\beta = 0.1102(A-8.7)$ si A > 50 dB

  où $A = -20\log_{10}(\delta)$ représente l'atténuation en bande atténuée et δ est obtenu par la formule suivante : $\delta = \min(\delta_p, \delta_a)$. Le nombre de coefficients N du filtre est donné par :

$$N \geq \frac{A - 7{,}95}{7{,}18.\Delta f}$$

4ème étape : Obtenir les valeurs de w_k pour la fenêtre choisie et les valeurs vraies des coefficients h_k comme étant le résultat du produit :

$$h_k = h_{N_k} w_k$$

Le résultat obtenu par cette méthode n'est pas **optimal**, c'est-à-dire qu'un filtre avec un ordre plus faible peut être obtenu par le biais d'autres méthodes (méthodes optimales).

2.3 Exemple

Obtenir les coefficients d'un filtre à RIF passe-bas pour obtenir les spécifications suivantes :

Fréquence de coupure :	f_c=1.5 kHz
Largeur de transition :	Δf=0.5 kHz
Atténuation en bande atténuée :	A_a> 51 dB
Fréquence d'échantillonnage :	f_e=8 kHz

Solution :

Il faudra d'abord convertir toutes les fréquences caractéristiques en fréquences réduites, la fréquence de coupure sera donc1.5/4=0.375, la largeur de transition sera $\Delta f = \frac{0.5}{4} = 0.125$.

A partir du tableau 1, l'expression de h_{N_k} est donnée par :

$$h_{N_k} = f_c \frac{\sin(k\pi f_c)}{k\pi f_c} \text{ pour } k \neq 0,$$

$$h_{N_k} = f_c \text{ pour } k = 0.$$

Le tableau 2 indique que seules les fenêtres de Hamming, Blackman ou Kaiser peuvent satisfaire les spécifications requises (A_a> 51 dB). Pour des raisons de simplicité de la méthode, la fenêtre de Hamming est utilisée dans cet exemple.

1. Détermination de l'ordre : $N = \frac{6.6}{\Delta f} = \frac{6.6}{0.125} = 52.8$, par conséquent N = 53 où N est le nombre de coefficients du filtre, l'ordre est donc de M=N-1=52.

2. Les coefficients du filtre sont obtenus par l'expression mathématique suivante :

$$h_k = h_{N_k} w_k \text{ pour-}26 \le k \le 26$$

L'expression mathématique de $h_N(k)$ est donnée plus haut, celle de w_k est la suivante :

$$w_k = 0.54 + 0.46\cos\left(\frac{2\pi k}{53}\right) \text{ pour } -26 \le k \le 26$$

La fréquence de coupure à prendre en compte (après centrage dans la zone de transition) est la suivante:

$$f'_c = f_c + \frac{\Delta f}{2} = (1.5 + 0.25)\text{kHz} = 1.75\text{kHz} = \frac{1.75}{4} = 0.4375$$

Les coefficients du filtre sont symétriques, il suffira par conséquent de calculer les valeur de h(0)à h(26).

k = 0 : $h_N(0) = f_c = 0.4375$

$w(0) = 0.54 + 0.46\cos(0) = 1$

$h(0) = h_N(0)\, w(0) = 0.4375$

k = 1 : $h_N(1) = \frac{2 \times 0.4375}{2\pi \times 0.4375}\sin(0.4375\pi) = 0.31219$

$w(1) = 0.54 + 0.46\cos(2\pi/53) = 0.98773$

$h(1) = h(-1) = h_N(1)\, w(1) = 0.311$

k = 2 : $h_N(2) = \frac{2 \times 0.4375}{2 \times 2\pi \times 0.4375}\sin(2 \times 0.4375\pi) = 0.06091$

$w(2) = 0.54 + 0.46\cos(4\pi/53) = 0.98713$

$h(2) = h(-2) = h_N(2)\, w(2) = 0.0601$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

k = 26 : $h_N(26) = \frac{2 \times 0.4375}{26 \times 2\pi \times 0.4375}\sin(26 \times 0.4375\pi) = 0.01131$

$w(26) = 0.54 + 0.46\cos(52\pi/53) = 0.08081$

$h(26) = h(-26) = h_N(26)\, w(26) = 0.0009$

Pour rendre le filtre causal, on ajoute 26 à chacun des indices. Les coefficients du filtre sont alors donnés ci-dessous.

b=fir1(52,0,4375,hamming(53)) *sous Matlab*		
h(0)=	h(52)=	-0.0009
h(1)=	h(51)=	0.0002
h(2)=	h(50)=	0.0012
h(3)=	h(49)=	0.0003
h(4)=	h(48)=	-0.0018
h(5)=	h(47)=	-0.0014
h(6)=	h(46)=	0.0022
h(7)=	h(45)=	0.0033
h(8)=	h(44)=	-0.0019
h(9)=	h(43)=	-0.0060
h(10)=	h(42)=	0.0000
h(11)=	h(41)=	0.0090
h(12)=	h(40)=	0.0042
h(13)=	h(39)=	-0.0110
h(14)=	h(38)=	-0.0112
h(15)=	h(37)=	0.0105
h(16)=	h(36)=	0.0207
h(17)=	h(35)=	-0.0052
h(18)=	h(34)=	-0.0319
h(19)=	h(33)=	-0.0075
h(20)=	h(32)=	0.0434
h(21)=	h(31)=	0.0325
h(22)=	h(30)=	-0.0533
h(23)=	h(29)=	-0.0856
h(24)=	h(28)=	0.0601
h(25)=	h(27)=	0.3113
h(26)=	h(26)=	0.4375

3. Technique d'échantillonnage en fréquence (fonction Matlab FIR2)

Lorsque l'on ne connaît pas l'expression analytique de $H_A(jf)$, la méthode précédente n'est plus applicable puisqu'on ne peut déterminer $h_A(t)$ par transformation de Fourier inverse. On utilise alors la transformation de Fourier Discrète inverse. C'est-à-dire que l'on "échantillonne" la réponse désirée dans le domaine fréquentiel, on obtient N points de cette réponse fréquentielle auxquels on fait correspondre N points de la réponse temporelle équivalente obtenus par TFD inverse (ou FFT inverse).

4. Utilisation du serveur web

Dans le paragraphe 5 du serveur, vous trouverez :

- Un questionnaire d'auto-évaluation sur les filtres numériques non récursifs.

Chapitre 5 : Analyse des filtres récursifs ou RII

1. Introduction

1.1 Définition

Les filtres récursifs sont décrits par une équation de récurrence de la forme :

$$s_k = \sum_{i=0}^{p} b_i e_{k-i} - \sum_{j=1}^{q} a_j s_{k-j}$$

Si on applique la transformée en Z à cette équation, on obtient :

$$S(z) = \left(\sum_{i=0}^{p} b_i z^{-i} \right) E(z) - \left(\sum_{j=1}^{q} a_j z^{-j} \right) S(z) \text{ ou } \left(1 + \sum_{j=1}^{q} a_j z^{-j} \right) S(z) = \left(\sum_{i=0}^{p} b_i z^{-i} \right) E(z)$$

La fonction de transfert d'un filtre récursif a donc la forme générale suivante :

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{p} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^{q} a_j z^{-j}}$$

Cette fonction de transfert possède q pôles car le degré du dénominateur est égal à q. On dit alors que le filtre est **d'ordre q**. Si le numérateur ne contient que le terme b_0, on dit que le filtre est **purement récursif**.

Parmi les principaux mérites des filtres récursifs, on peut citer :

- la possibilité d'obtenir une bande de transition étroite pour un ordre raisonnable,
- la possibilité d'obtenir des déphaseurs purs,

et parmi les défauts :

- les risques d'instabilité dus à une grande sensibilité numérique des coefficients mais que l'on peut contrôler en déterminant une structure mieux adaptée,
- une variation de phase fortement non linéaire si l'on ne se donne pas de contrainte sur celle-ci au moment de la synthèse.

1.2 Stabilité

La fonction de transfert possède des pôles. Il faudra alors s'assurer de la stabilité. En effet et contrairement aux filtres non récursifs, la stabilité du filtre récursif ne sera pas assurée dans tous les cas.

2. Analyse des filtres purement récursifs du premier ordre

2.1 Equation de récurrence et fonction de transfert

Un filtre purement récursif du 1er ordre peut être décrit par l'équation de récurrence suivante :

$$s_k = b_0 e_k - a_1 s_{k-1}$$

b_0 et a_1 étant des constantes réelles.

La fonction de transfert en z est alors de la forme :

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1}}$$

2.2 Réponse impulsionnelle

2.2.1 Calcul à partir de l'équation de récurrence

La réponse impulsionnelle est la réponse {h} au signal d'entrée impulsion de Dirac défini par :

$$\begin{cases} \delta_k = 1 \text{ si } k = 0 \\ \delta_k = 0 \text{ si } k \neq 0 \end{cases}$$

On a donc :

$$h_k = b_0 \delta_k - a_1 h_{k-1}$$

ce qui nous donne :

$$h_0 = b_0$$
$$h_1 = -a_1 b_0$$
$$h_2 = a_1^{\,2} b_0$$
$$\vdots$$
$$h_k = (-a_1)^k b_0$$

Plusieurs types de réponses peuvent se présenter suivant la valeur de a_1 :

si $|a_1| < 1$: on a $h_k \to 0$ si $k \to +\infty$, par conséquent le filtre est ***stable***.

si $|a_1| = 1$: h_k ne tend pas vers 0 lorsque $k \to +\infty$. Le filtre n'est pas stable, il est dit, dans ce cas, à la ***limite de l'instabilité***.

si $|a_1| > 1$: la suite h_k est divergente. Le filtre est ***instable***.

Dans la suite, on se placera dans l'hypothèse de stabilité.

2.2.2. Calcul à partir de la fonction de transfert

La sortie du filtre est liée à l'entrée par le relation :

$$S(z) = H(z)\,E(z)$$

avec $H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1}}$ et $E(z) = 1$

d'où $S(z) = H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1}}$

On en déduit d'après les tables de transformée en Z :

$$h_k = \left\{ b_0 (-a_1)^k \right\}$$

On retrouve bien la suite h_k obtenue précédemment, vérifiant ainsi que la fonction de transfert d'un système est la transformée en Z de la réponse impulsionnelle.

2.3 Réponse indicielle

La réponse indicielle est la réponse {d} au signal d'entrée échelon défini par :

$$\begin{cases} \Gamma_k = 1 \text{ si } k \geq 0 \\ \Gamma_k = 0 \text{ si } k < 0 \end{cases}$$

On a donc :

$$d_k = b_0 \Gamma_k - a_1 d_{k-1}$$

ce qui nous donne en supposant que $|a_1| < 1$:

$$d_0 = b_0$$
$$d_1 = b_0 - a_1 b_0 = b_0(1 - a_1)$$
$$d_2 = b_0 - a_1(b_0 - a_1 b_0) = b_0(1 - a_1 + a_1^2)$$
$$d_3 = b_0(1 - a_1 + a_1^2 - a_1^3)$$
$$\vdots$$
$$d_k = b_0\left(1 - a_1 + a_1^2 - a_1^3 + \ldots + (-1)^k a_1^k\right) = b_0 \sum_{i=0}^{k} (-1)^i a_1^i = b_0 \frac{1 - (-1)^{k+1} a_1^{k+1}}{1 + a_1}$$

2.4 Réponse fréquentielle

En posant $z = e^{j2\pi f T_e}$, on obtient :

$$H(jf) = \frac{b_0}{1 + a_1 e^{-j2\pi f T_e}} = \frac{b_0}{1 + a_1 \cos(2\pi f T_e) - j a_1 \sin(2\pi f T_e)}$$

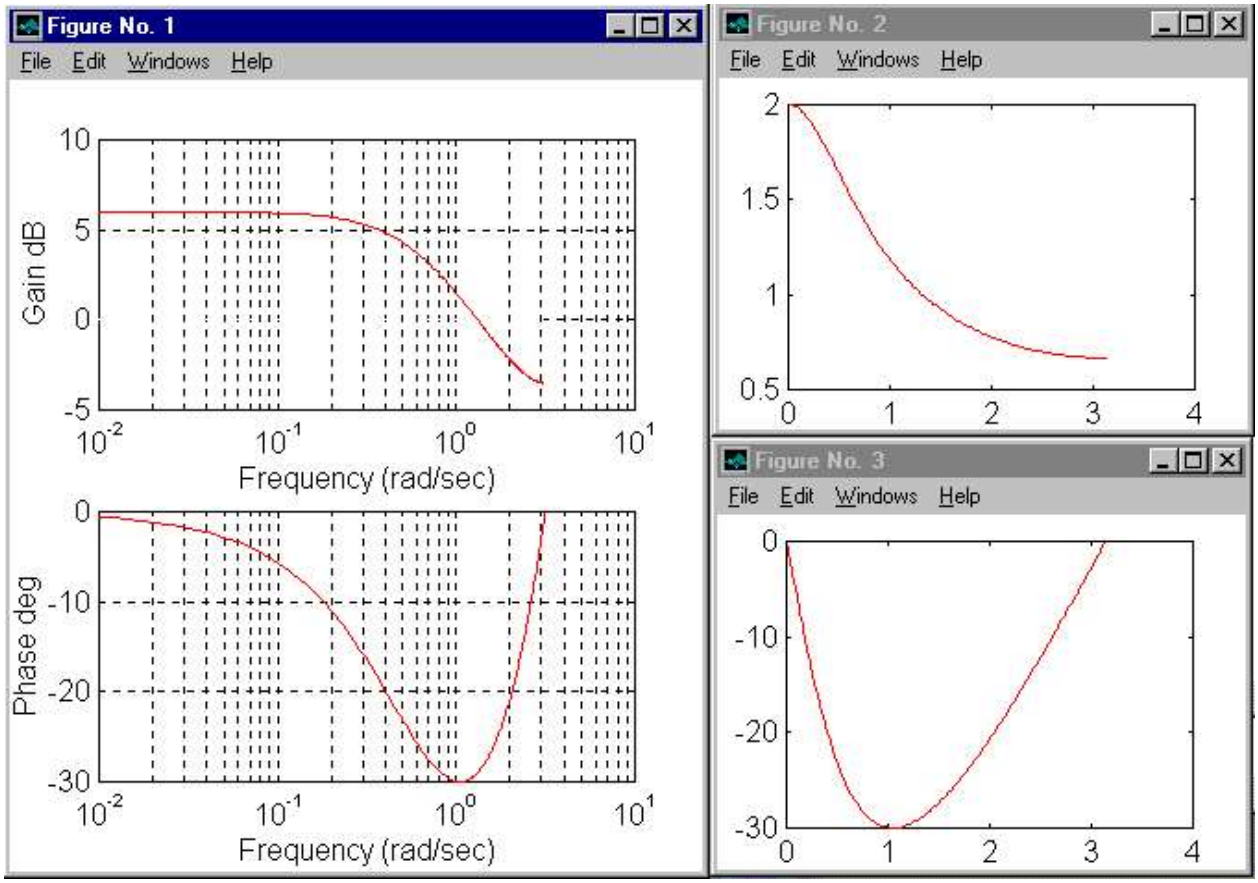
d'où le module :

$$|H(f)| = \frac{|b_0|}{\sqrt{(1 + a_1 \cos(2\pi f T_e))^2 + a_1^2 \sin^2(2\pi f T_e)}} = \frac{|b_0|}{\sqrt{1 + a_1^2 + 2a_1 \cos(2\pi f T_e)}}$$

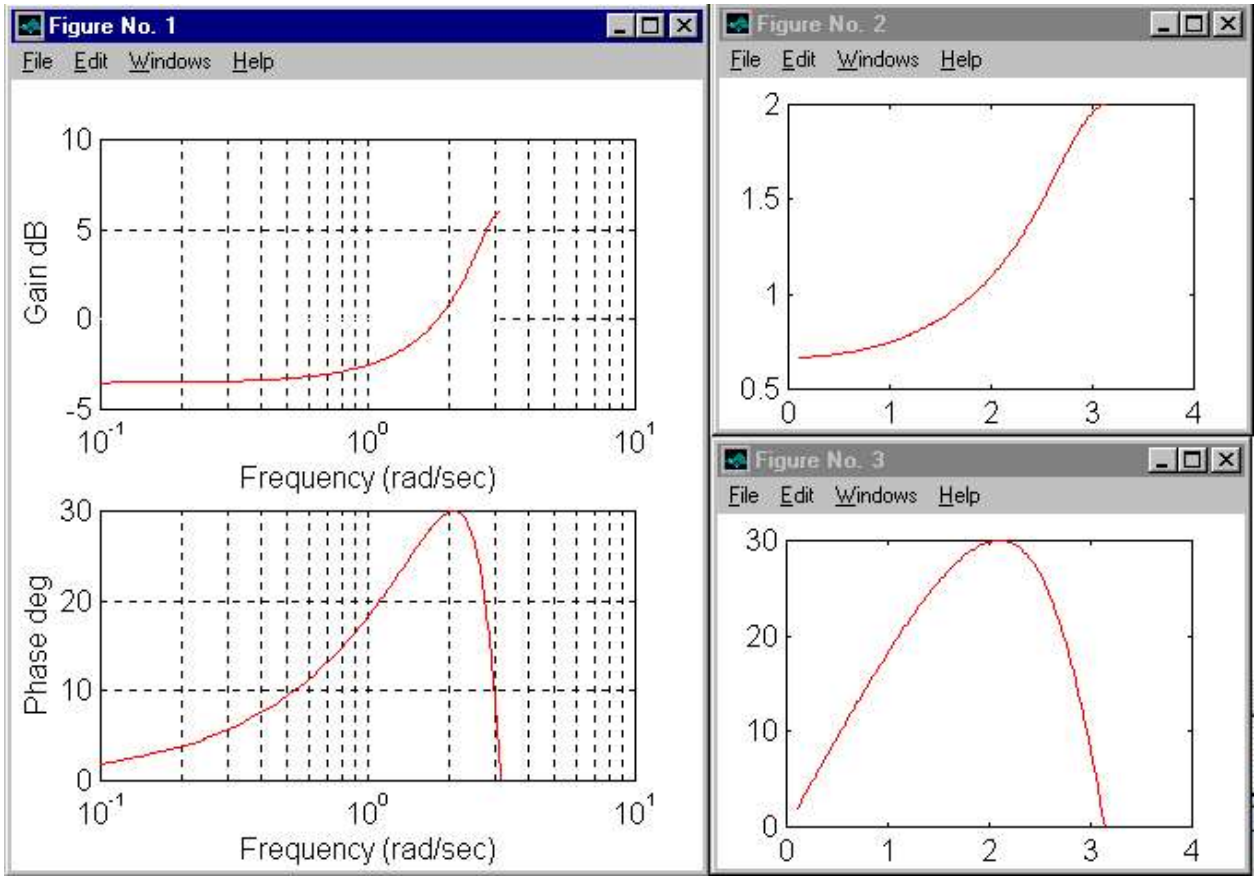
et l'argument :

$$\varphi(f) = \arg(b_0) + Arc\tan\left(\frac{a_1 \sin(2\pi f T_e)}{1 + a_1 \cos(2\pi f T_e)}\right) = Arc\tan\left(\frac{a_1 \sin(2\Pi f T_e)}{1 + a_1 \cos(2\Pi f T_e)}\right) \text{ défini à } k\pi \text{ près.}$$

Pour une période d'échantillonnage de 1, on obtient pour a_1 =-0,5



Pour a_1 = 0,5



3. Analyse des filtres purement récursifs du second ordre

Equation de récurrence et fonction de transfert

Un filtre purement récursif du second ordre peut être décrit par l'équation de récurrence suivante :

$$s_k = b_0 e_k - a_1 s_{k-1} - a_2 s_{k-2}$$

b_0, a_1 et $a_2$étant des constantes réelles.

La fonction de transfert en Z est alors de la forme :

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{b_0}{\left(1 - p_1 z^{-1}\right)\left(1 - p_2 z^{-1}\right)} \text{ ou } H(z) = \frac{b_0 z^2}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

4. Analyse des filtres récursifs d'ordre quelconque

Pour étudier les filtres récursifs d'ordre quelconque, on pourra toujours se ramener à une combinaison quelconque des éléments suivants :

* un filtre non récursif d'ordre quelconque,
* un ou plusieurs filtres purement récursifs du second ordre avec des pôles réels, pouvant de ramener en deux fois plus de filtres purement récursifs du premier ordre,
* un ou plusieurs filtres récursifs du second ordre avec des pôles complexes conjugués,
* éventuellement un filtre récursif du premier ordre (si ordre impair).

Chapitre 6 : Synthèse des filtres récursifs ou RII

Nous venons de voir comment analyser le comportement d'un filtre numérique dont la fonction de transfert H(z) (ou l'équation de récurrence) est connue. Nous avons pu déterminer la réponse temporelle à une entrée fixée (impulsion, échelon) et la réponse fréquentielle au régime sinusoïdal permanent. Tout ceci suppose que le filtre soit déjà déterminé. Or, en général, le problème qui se pose est l'inverse, on désire déterminer la fonction de transfert H(z) (ou la relation de récurrence) d'un filtre qui doit avoir une réponse temporelle imposée ou une réponse fréquentielle entrant dans un gabarit précis. On dit alors que l'on fait la synthèse du filtre numérique. Il existe de nombreuses méthodes permettant de synthétiser un filtre numérique récursif. Elles s'appuient généralement sur un filtre analogique pris comme modèle.

- le filtre doit avoir une réponse impulsionnelle ou indicielle imposée : ce sont les méthodes de l'invariance impulsionnelle et de l'invariance indicielle.
- le filtre doit avoir une réponse fréquentielle entrant dans un gabarit donné : c'est la transformation bilinéaire.

Principe

Le principe de définition du cahier des charges d'un filtre récursif se déroule de la même manière que pour un filtre non récursif (cf. chapitre synthèse des filtres non récursifs).

1. Synthèse par invariance impulsionnelle

Le principe de cette méthode est le suivant:

* on détermine la réponse impulsionnelle désirée h(t)
* on échantillonne cette réponse impulsionnelle à la fréquence f_e et on en déduit la suite $\{h_k\}$
* on recherche la fonction de transfert H(z) du filtre numérique qui a pour réponse impulsionnelle la suite $\{h_k\}$

Exemple : On veut synthétiser un filtre numérique qui possède la même réponse impulsionnelle qu'un filtre passe-bas analogique du 1er ordre de transmittance $H(p) = \frac{1}{1+\tau.p}$.

La réponse impulsionnelle est alors : $h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$ pour $t \geq 0$. L'échantillonnage de cette réponse impulsionnelle conduit à : $h_k = \frac{1}{\tau} e^{-kT_e/\tau}$ pour $k \geq 0$ donc $H(z) = \frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{1-e^{-T_e/\tau}z^{-1}}\right)$.

La fonction de transfert en z est une fonction de la période d'échantillonnage T_e ce qui n'est naturellement pas le cas de celle en p. Il ne peut y avoir égalité entre les deux réponses dans le cas général. En fait il s'avère qu'il y a égalité à un coefficient K près, on posera donc :

$$H(p) = \frac{1}{1+\tau p},\ H(z) = \frac{1}{\tau}\left(\frac{K}{1-e^{-T_e/\tau}z^{-1}}\right).$$

Pour déterminer la constante K, on va comparer les réponses statiques du filtre analogique et du filtre numérique. La réponse statique est le régime permanent de la réponse à une entrée constante, c'est-à-dire la réponse en régime "sinusoïdal" pour f=0 (autrement dit la réponse indicielle).
La réponse du filtre analogique est, puisque f=0, p=j2πf=0, H=1.

La réponse du filtre numérique est, puisque f=0, $z = e^{j2\pi fTe}=1$, $H = \frac{1}{\tau}\frac{K}{1-e^{-T_e/\tau}}$.

Pour qu'il y ait égalité entre les 2 réponses en régime permanent, on pose l'égalité entre les deux réponses et on déduit que $K = \tau(1-e^{-T_e/\tau})$.

La fonction de transfert recherchée est alors $H(z) = \frac{1-e^{-T_e/\tau}}{1-e^{-T_e/\tau}z^{-1}}$.

2. Synthèse par invariance indicielle

Le principe de cette méthode est semblable au cas précédent :

* on détermine la réponse indicielle désirée {d}.
* on échantillonne cette réponse indicielle à la fréquence F_e et on déduit la suite $\{d_k\}$.
* on recherche la fonction de transfert H(z) du filtre numérique qui a la même réponse indicielle.

Exemple : Appliquons cette méthode sur le cas simple du filtre passe-bas du premier ordre :

$$H(p) = \frac{1}{1+\tau p}.$$

La transformée D(p) de la réponse indicielle est $D(p) = \frac{1}{p(1+\tau p)} = \frac{1}{p} + \frac{-\tau}{1+\tau p}$ d'où la réponse indicielle $d(t) = 1 - e^{-t/\tau}$. L'échantillonnage de cette réponse indicielle conduit au signal :

$$\{d_k\} = 1 - e^{-kT_e/\tau}.$$

La transformée D(z) de cette séquence est : $D(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-T_e/\tau}z^{-1}} = \frac{z^{-1}(1-e^{-T_e/\tau})}{(1-z^{-1})(1-e^{-T_e/\tau}z^{-1})}$

or D(z) = H(z)Γ(z) avec $\Gamma(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$

par conséquent $H(z) = \frac{z^{-1}(1-e^{-T_e/\tau})}{(1-z^{-1})(1-e^{-T_e/\tau}z^{-1})}(1-z^{-1}) = \frac{z^{-1}(1-e^{-T_e/\tau})}{1-e^{-T_e/\tau}z^{-1}}$

Si on compare ce résultat avec celui obtenu par la méthode de l'invariance impulsionnelle, on constate que les deux fonctions de transfert H(z) trouvées sont identiques à un facteur z^{-1}près. Le comportement de ce filtre est donc le même que le précédent mais retardé d'une impulsion d'horloge.

3. Etude des filtres numériques récursifs par la méthode des pôles et zéros

Afin de faciliter l'étude des filtres récursifs, mais aussi pour améliorer la stabilité numérique de ceux-ci, il est commode de représenter respectivement le numérateur, et le dénominateur des filtres récursifs comme étant le produit de filtres du premier ordre (un pôle ou un zéro) et du second ordre (paire de pôles, ou de zéros, complexes conjugués).

On factorisera donc la fonction de transfert de la forme suivante :

$$H(z) = \frac{K(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_p)}{(z - p_1)(z - p_2)\dots(z - p_q)}$$

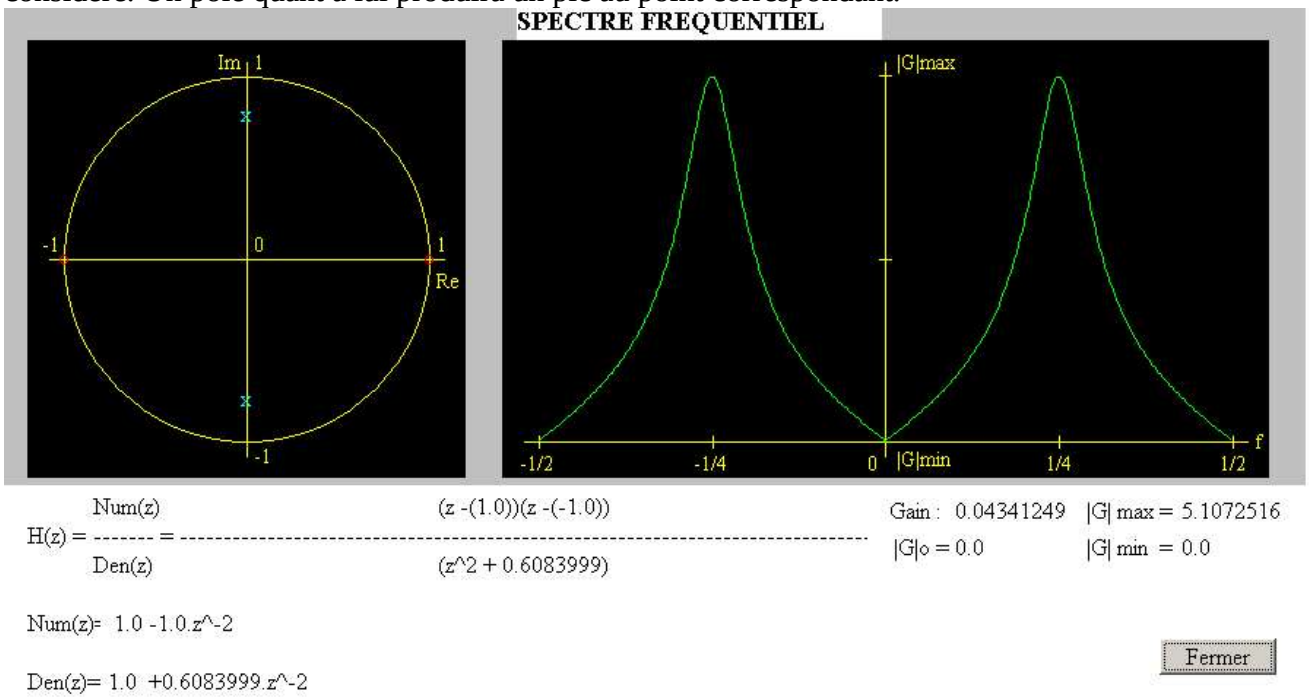
Rappel : la condition de stabilité est que tous les pôles p_i soient contenus dans le cercle unité.

On pourra de cette façon programmer les filtres sous Matlab de la manière suivante :

```
[Z,P,K] = BUTTER(...), the zeros and poles are returned in length
Ncolumn vectors Z and P, and the gain in scalar K.
```

Interprétation de la position des pôles et zéros

Lorsqu'un zéro est placé sur un point donné du plan en z, la réponse fréquentielle sera de 0 au point considéré. Un pôle quant à lui produira un pic au point correspondant.



Sur la figure de gauche, le cercle complet correspond à une fréquence d'échantillonnage (-180° correspondant a $-f_e/2$ et 180°à $f_e/2$).

Des pôles proches du cercle unité sont à l'origine de larges pics tandis que des zéros proches ou sur le cercle unité produisent des minima. Il est donc possible, par un placement judicieux des pôles et des zéros, d'obtenir un filtre sélectif simple.

N.B.1 : Pour que les coefficients du filtre soient réels, il faut que les pôles et zéros soient réels (sur l'axe des réels) ou par paires de complexes conjugués.

N.B.2 : Il existe une relation "empirique" entre la largeur de la zone de transition et la position des pôles sur un rayon éventuellement inférieur à :

$$r \approx 1 - \left(\frac{\text{largeur}}{F_e}\right)\pi \text{ valable uniquement si } r > 0{,}9$$

Utilisation du serveur web

Dans le paragraphe 5 du serveur, vous trouverez :

- Un questionnaire d'auto-évaluation sur les filtres numériques récursifs.
- Une applet Java de simulation permettant d'effectuer la synthèse de filtres numériques récursifs par la méthode des pôles et des zéros.

PHOTOCOPIE LIVRE DSP EXAMPLE 7.2

Pages 380-381 + **corrections manuelles**

(cf. poly Maroc)

4. Synthèse par la transformée en Z

La méthode la plus naturelle consiste à transformer la fonction de transfert d'un filtre analogique en utilisant la définition de la transformée en Z. Il faut pour cela ajouter le bloqueur d'ordre 0 de fonction de transfert $B_0(p)=\frac{1-e^{-T_e p}}{p}$ sinon la fonction de transfert du filtre numérique obtenu n'aura pas la valeur finale souhaitée.

$$H(z)=Z\left(B_0(p).H_F(p)\right)$$

On détermine ensuite l'équation de récurrence du filtre. Le filtre ainsi obtenu sera stable si le filtre analogique est stable et si les conditions d'échantillonnage sont vérifiées.

Exemple : Soit le filtre analogique du premier ordre de fonction de transfert $H_F(p)=\frac{1}{1+\tau p}$ (la fonction de transfert en Z équivalente a été trouvée dans le paragraphe 1 sur la synthèse par invariance impulsionnelle comme égale à $H_F(z)=\frac{1-e^{-T_e/\tau}}{1-e^{-T_e/\tau}z^{-1}}$.

On détermine alors $H(z)=Z\left(\frac{1-e^{-T_e p}}{p}.\frac{1}{1+\tau p}\right)=\left(1-z^{-1}\right)Z\left(\frac{1}{p}.\frac{1}{1+\tau p}\right)$

En utilisant la table des transformées en Z, on obtient :

$$H(z)=(1-z^{-1})\left(\frac{\left(1-e^{-\frac{T_e}{\tau}}\right)z}{(z-1)\left(1-e^{-\frac{T_e}{\tau}}z^{-1}\right)}\right)=\left(\frac{\left(1-e^{-\frac{T_e}{\tau}}\right)}{\left(1-z^{-1}e^{-\frac{T_e}{\tau}}\right)}\right)$$

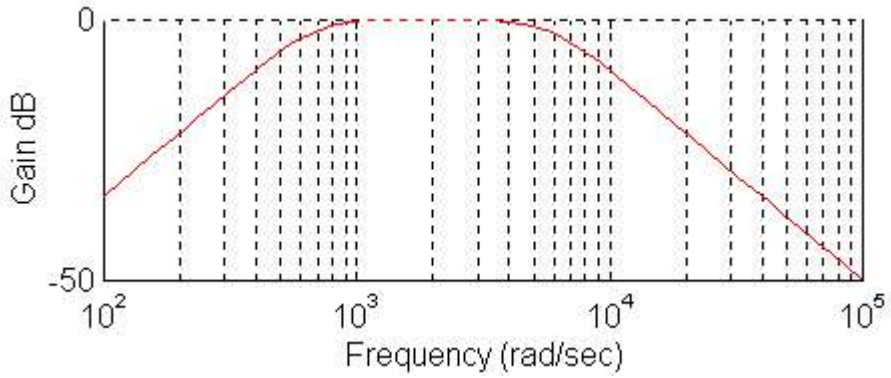
Cette méthode présente l'avantage d'être rigoureuse. Cependant il n'est pas toujours facile de déterminer facilement la transformation en Z d'une fonction de transfert.

5. Synthèse par transformation bilinéaire

Objectif : obtention de la fonction de transfert H(z) d'un filtre numérique qui a la même réponse fréquentielle qu'un filtre analogique de référence H(p), autrement dit le même gabarit.

En pratique, on utilisera cette méthode couplée avec une méthode de synthèse de filtres analogiques qui sera vue par ailleurs en électronique (Butterworth, Chebychev, Chebychev inverse, Cauer, ...).

Principe : cette méthode a pour objectif de faire coïncider au mieux les domaines analogique et numérique. En fait, à cause de la condition d'échantillonnage (Shannon/Nyquist), il ne sera possible de faire coïncider les deux domaines que dans une fraction du domaine utile.

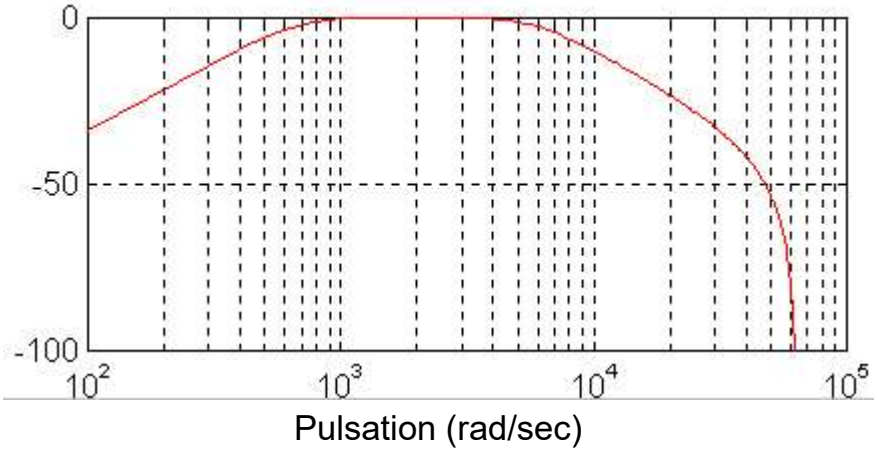


A titre d'exemple, la figure ci-dessus est un filtre analogique passe-bande du second ordre (fréquences de coupure 100 Hz et 1000 Hz, pulsation de coupure 628 et 6280 rad/sec) obtenu par synthèse par la méthode de Butterworth sous Matlab :

```
[num,den]=butter(2,[628 6280],'s');
bode(num,den)
```

On peut noter que la réponse fréquentielle n'est pas limitée car elle existe aussi pour des valeurs très grandes de la fréquence. D'autre part, on note l'existence d'asymptotes linéaires de 40 dB/décade pour les fréquences basses et de -40 dB/décade pour les fréquences élevées.

La réponse fréquentielle d'un filtre numérique équivalent pourra être de la forme suivante :



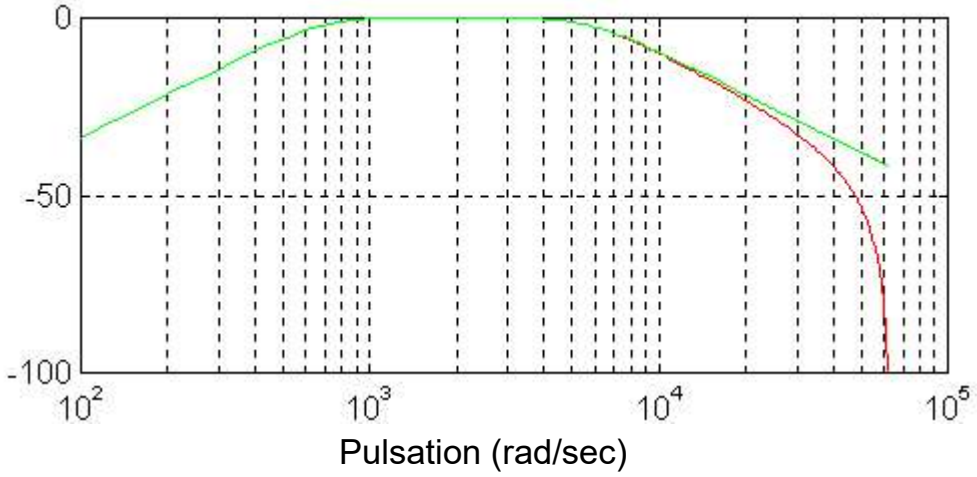
Ce filtre a été obtenu sous Matlab par l'utilisation de la transformation bilinéaire à partir des équations du filtre analogique obtenu précédemment et avec une fréquence d'échantillonnage de 20000 Hz (pulsation de 125660 rad/sec) :

```
[numd,dend]=bilinear(num,den,20000);
dbode(numd,dend,1/20000)
```

La raideur du filtre, c'est-à-dire la largeur de la zone de transition, peut être plus ou moins étroite, mais la valeur de la demi-fréquence d'échantillonnage (ou demi-pulsation, ici 10000 Hz ou 62830 rad/sec) est une barrière "infranchissable", caractéristique de tout système numérique. Pour que le filtre numérique recherché ait un sens, il faudra que la demi-fréquence d'échantillonnage soit plus grande que la plus grande des fréquences caractéristiques.

Puisqu'il n'est pas possible de faire coïncider précisément la réponse fréquentielle du filtre analogique (sur [0;+∞[) et numérique (sur $\left[0;\frac{F_e}{2}\right]$), la transformation bilinéaire aura pour objet de faire coïncider au mieux les deux réponses.

La courbe ci-dessous représente la superposition des réponses des filtres analogiques et numériques étudiés précédemment.

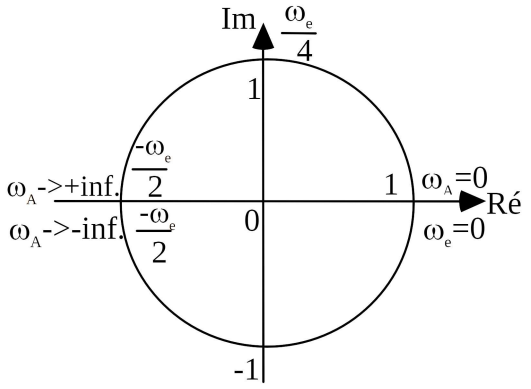


5.1 Fonctionnement de la méthode

- Tout d'abord on appellera ω_A la pulsation dans le domaine analogique (avec $p=j\omega_A$), ω_N la pulsation dans le domaine numérique (avec $z = e^{j\omega_N T_e}$). On se fixera une pulsation de référence, appelée ω_r ; cette valeur est une valeur précise de la pulsation pour laquelle on souhaite que les réponses des filtres analogique de référence et numérique recherché soient identiques. Sans entrer dans des considérations trop théoriques, on peut dire qu'autour de cette valeur ω_r, les réponses des deux filtres seront très "proches". Loin de cette valeur ω_r, et plus particulièrement pour des pulsations élevées, les réponses pourront différer sensiblement.
- Avant de rechercher la fonction de transfert du filtre numérique, il est nécessaire de "normaliser" la fonction de transfert du filtre analogique de référence en effectuant $p_n = \frac{p}{\omega_r}$ où p_n est la variable de Laplace normalisée, ω_r la pulsation de référence.
- De la même manière, on posera $\Omega = \frac{\omega_A}{\omega_r}$ où Ω désigne la "pulsation analogique normalisée".

  ***Attention**, la pulsation analogique normalisée est un rapport de pulsations, c'est donc un nombre sans dimension.*
- La transformation bilinéaire établit une correspondance entre le domaine analogique et le domaine numérique par la relation : $p_n = k\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ avec $k > 0$: facteur d'échelle. On pourra en déduire : $z = \frac{k+p_n}{k-p_n}$

- On recherchera la relation entre les pulsations (ou fréquences) dans les domaines analogiques et numériques en effectuant l'étude fréquentielle : on pose $p_n=j\Omega$, calcul de $|z|$ et Arg(z) :



$$z=\frac{k+p_n}{k-p_n}=\frac{k+j\Omega}{k-j\Omega}= \ ; \ |z|=\frac{\sqrt{k^2+\Omega^2}}{\sqrt{k^2+\Omega^2}}=1$$

$$\mathrm{Arg}(z)=\mathrm{Arc\,tan}\left(\frac{\Omega}{k}\right)-\mathrm{Arc\,tan}\left(\frac{-\Omega}{k}\right)=2\mathrm{Arc\,tan}\left(\frac{\Omega}{k}\right)$$

Représentation de z dans le plan complexe :

Comme $|z| = 1 \ \forall x \in \Re$ alors le lieu de z dans le plan complexe correspond au cercle de rayon unité car Arg(z) varie de -π à -π lorsque Ω varie de -∞ à +∞.

- Discussion : placement des points correspondant au domaine analogique $\omega_A \to -\infty$, $\omega_A = 0$ et $\omega_A \to +\infty$, sur le graphique précédent,
- placement des points $\omega_N=-\frac{\omega_e}{2},\omega_N=-\frac{\omega_e}{4},\omega_N=0,\omega_N=+\frac{\omega_e}{4}$ et $\omega_N=\frac{\omega_e}{2}$ correspondant au domaine numérique.
- Etude de la relation entre les pulsations dans les domaines analogiques et numériques :

en posant $z=e^{j\omega_N T_e}=e^{j2\pi\frac{\omega_N}{\omega_e}}$ dans le domaine numérique, on déduit :

$$\text{si } \omega_N=-\frac{\omega_e}{2}\Rightarrow z=e^{-j\pi}$$

$$\text{si } \omega_N=-\frac{\omega_e}{4}\Rightarrow z=e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{si } \omega_N=\frac{\omega_e}{2}\Rightarrow z=e^{j\pi}$$

$$\text{si } \omega_N=\frac{\omega_e}{4}\Rightarrow z=e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{si } \omega_N=0\Rightarrow z=1.$$

On peut donc placer les différentes pulsations sur le cercle rayon unité. Lorsque dans le domaine analogique la pulsation ω_A varie de -∞ à +∞, dans le domaine numérique la pulsation ω_N varie de $-\frac{\omega_e}{2}$ à $\frac{\omega_e}{2}$ ce qui correspond au domaine d'utilisation des filtres numériques.

D'autre part, on peut démontrer que $\frac{\omega_A}{\omega_r}=k\tan\left(\pi\frac{\omega_N}{\omega_e}\right)$ => Arg(z)=2arctan(Ω/k) avec $\Omega=\frac{\omega_A}{\omega_r}$, or comme $z=e^{j\omega_N T_e}$ donc $\arg(z)=\omega_N T_e=2\pi\frac{\omega_N}{\omega_e}$, on en déduit que $\frac{1}{k}\frac{\omega_A}{\omega_r}=\tan\left(\pi\frac{\omega_N}{\omega_e}\right)$ soit $\frac{\omega_A}{\omega_r}=k\tan\left(\pi\frac{\omega_N}{\omega_e}\right)$, donc $k=\frac{\omega_A}{\omega_r\tan\left(\pi\frac{\omega_N}{\omega_e}\right)}$.

De manière générale, k varie en fonction de ω_A et ω_N. De façon à obtenir une fonction de transfert unique, on se placera en pratique dans le cas où $\omega_N = \omega_A = \omega_r$ d'où $\boxed{k = \frac{1}{\tan\left(\pi \frac{\omega_r}{\omega_e}\right)}}$.

5.2 Utilisation pratique de la méthode

Pour utiliser cette méthode, on procédera de la manière suivante :

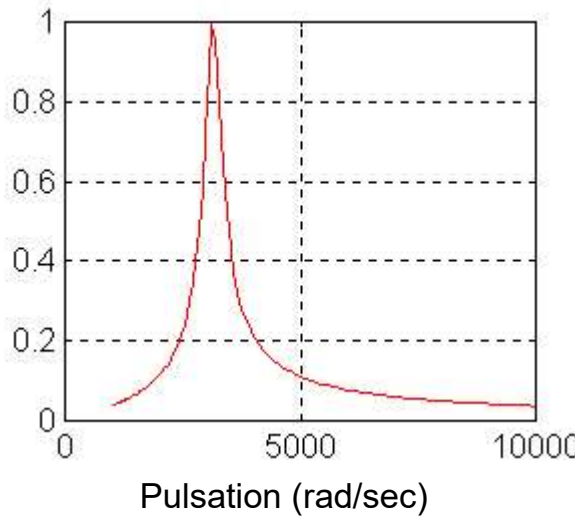
- Faire l'étude du filtre analogique de référence H(p) (manuellement ou informatiquement),
- Définir une pulsation de référence ω_r, une pulsation que l'on voudra être identique dans les deux domaines analogique et numérique (une fréquence caractéristique du filtre, typiquement la pulsation de coupure ou la pulsation se trouvant au centre de la bande passante ou de la bande atténuée), puis calculer la fonction de transfert de Laplace normalisée (en p_n) en utilisant la relation $p = \omega_r p_n$.
- Déterminer le facteur d'échelle k.
- Ecrire la fonction de transfert en z après avoir effectué le changement de variable : $p_n = k\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$.
- Etudier le filtre numérique obtenu afin de vérifier ces spécifications.

N.B. Cette méthode donne d'assez bons résultats à condition que les fréquences caractéristiques ne soient pas trop proches de la demi-fréquence d'échantillonnage.

5.3 Exemple d'utilisation : on désire réaliser un filtre numérique passe-bande du second ordre avec les caractéristiques suivantes :

* fréquence d'échantillonnage f_e = 5 kHz,
* fréquence centrale : f_{0N} = 500 Hz,
* gain unitaire à la fréquence centrale,
* fonction de transfert du filtre analogique de référence : $H(p) = \frac{337{,}81p}{p^2 + 337{,}81p + 9{,}8696.10^6}$

dont le représentation fréquentielle est donnée ci-contre :



SOLUTION :

On choisit comme pulsation de référence en analogique : $\omega_r = 2\pi f_{0N}$, donc $p_n = \frac{p}{\omega_r} = \frac{p}{2\pi f_{0N}}$ d'où $H(p_n) = \frac{0{,}1075 p_n}{p_n^{\,2} + 0{,}1075 p_n + 1}$. On veut qu'il y ait correspondance entre la pulsation centrale des domaines analogiques et numériques, d'autre part on choisit la pulsation centrale comme pulsation de référence, on aura donc :

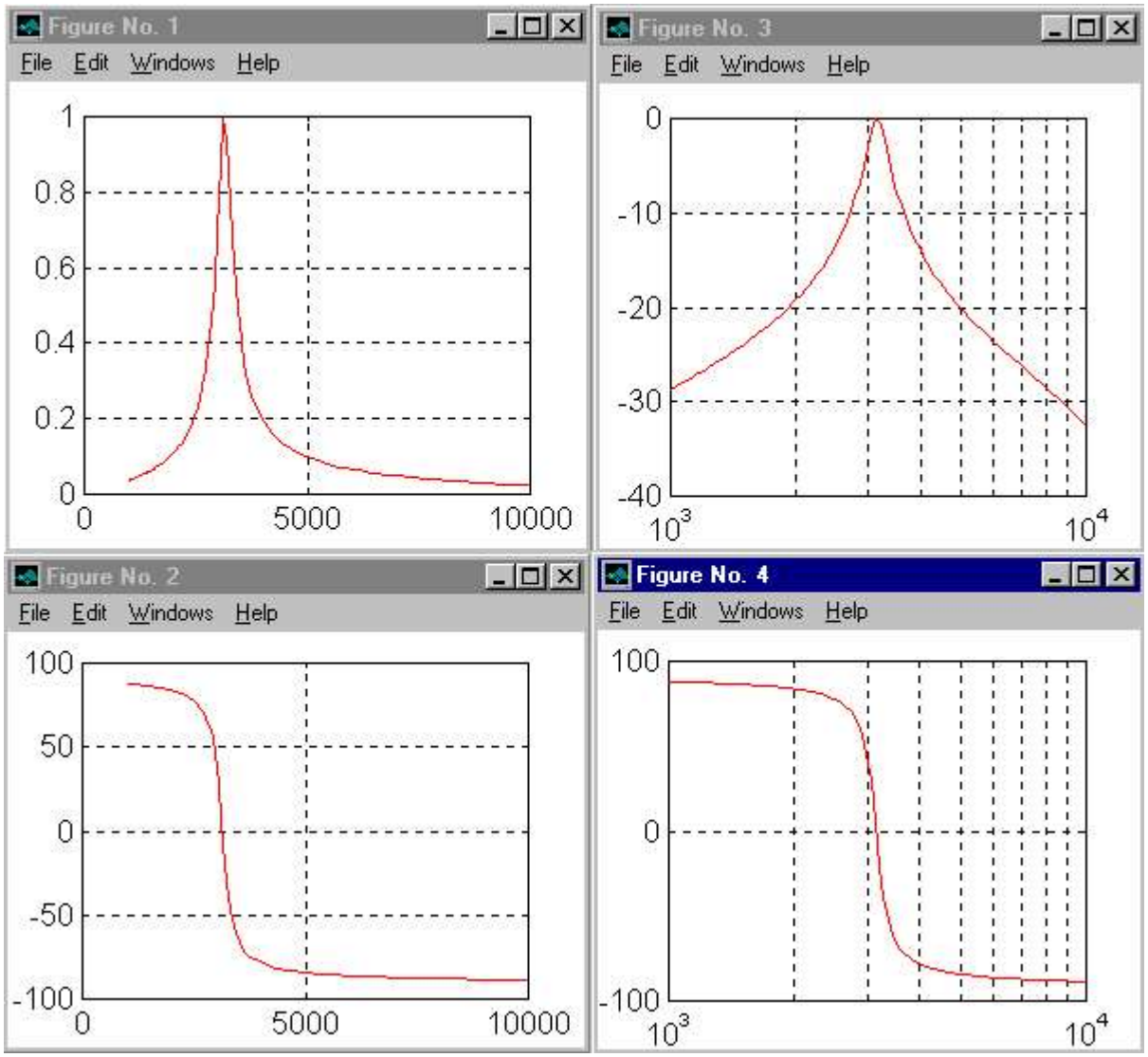
$$k = \frac{\omega_A}{\omega_r \tan\left(\pi \frac{\omega_N}{\omega_e}\right)} = \frac{2\pi f_{0N}}{2\pi f_{0N} \tan\left(\pi \frac{2\pi f_{0N}}{\omega_e}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\pi \frac{f_{0N}}{f_e}\right)} = 3{,}078$$

La fonction de transfert du filtre numérique est par conséquent :

$$H(z) = \frac{0{,}1075k \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}{\left(k\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + 0{,}1075\left(k\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + 1} = \frac{0{,}1075k\left(1-z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)}{\left(k(1-z^{-1})\right)^2 + 0{,}1075k\left(1-z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right) + \left(1+z^{-1}\right)^2}$$

$$H(z) = \frac{0{,}331 - 0{,}331z^{-2}}{10{,}805 - 16{,}948z^{-1} + 10{,}143z^{-2}} = \frac{1-z^{-2}}{32{,}64 - 51{,}2z^{-1} + 30{,}64z^{-2}}$$

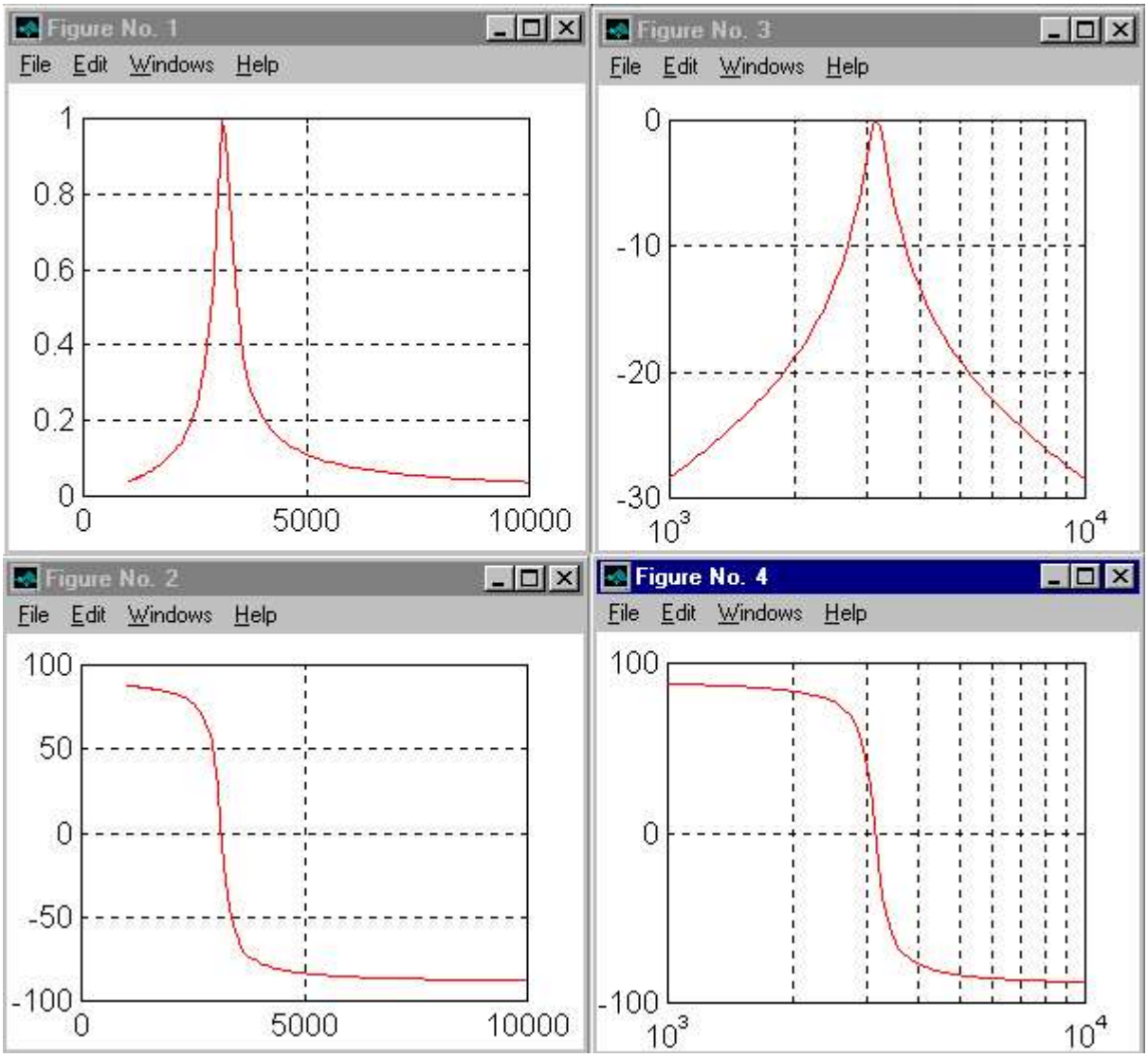
Tracés pour le filtre numérique obtenu



Sur ces courbes et celles de la page suivante,

- la figure 1 représente l'amplitude (en module) en fonction de la fréquence sur une échelle linéaire,
- la figure 2 la phase en fonction de la fréquence également,
- les figures 3 et 4 représentent les diagrammes de Bode.

Rappel des courbes pour le filtre analogique de référence :



6. Utilisation de méthodes de synthèse de filtres analogiques couplées à la transformation bilinéaire

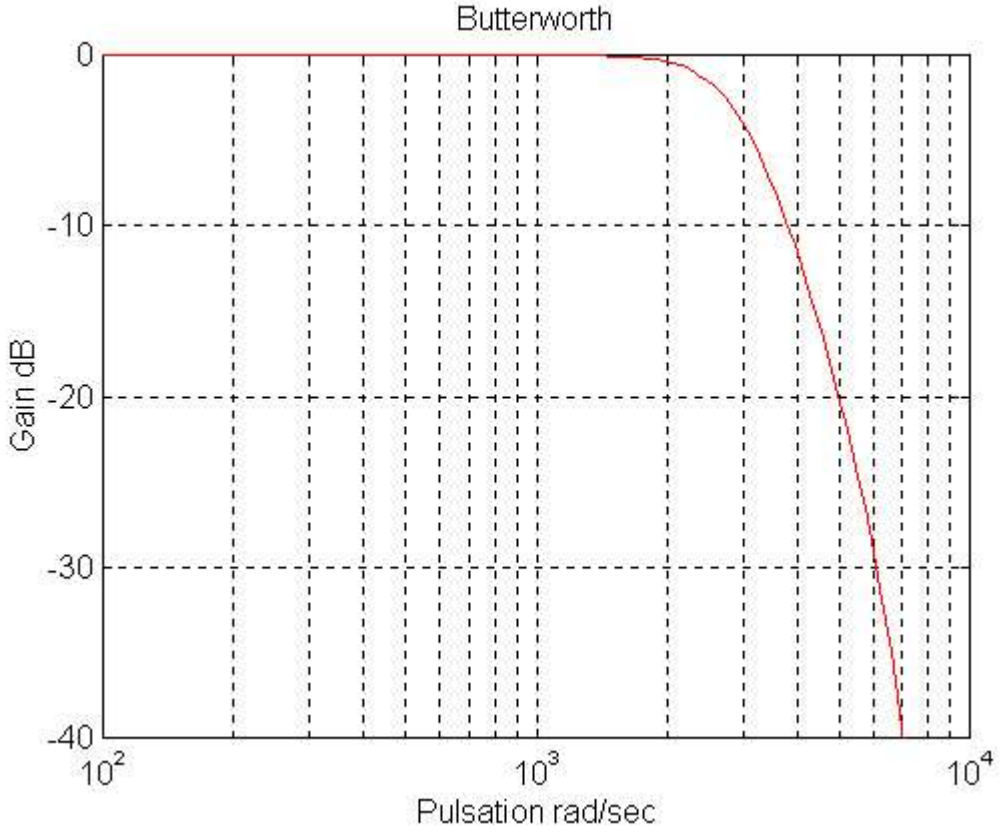
Dans la plupart des situations réelles, la fonction de transfert du filtre analogique de référence ne sera pas connue ; c'est un gabarit type qui sera utilisé. La technique consistera alors à :

- synthétiser le filtre analogique à l'aide d'une des méthodes ci-dessous, que vous verrez plus en détail dans le cadre du cours d'Electronique analogique,
- puis d'obtenir le filtre numérique en utilisant la transformation bilinéaire.

Le logiciel Matlab que l'on utilise en TP permet d'effectuer la synthèse à la fois de filtres numériques ou analogiques ; dans le cas de filtres numériques, la transformation bilinéaire est ensuite utilisée automatiquement.

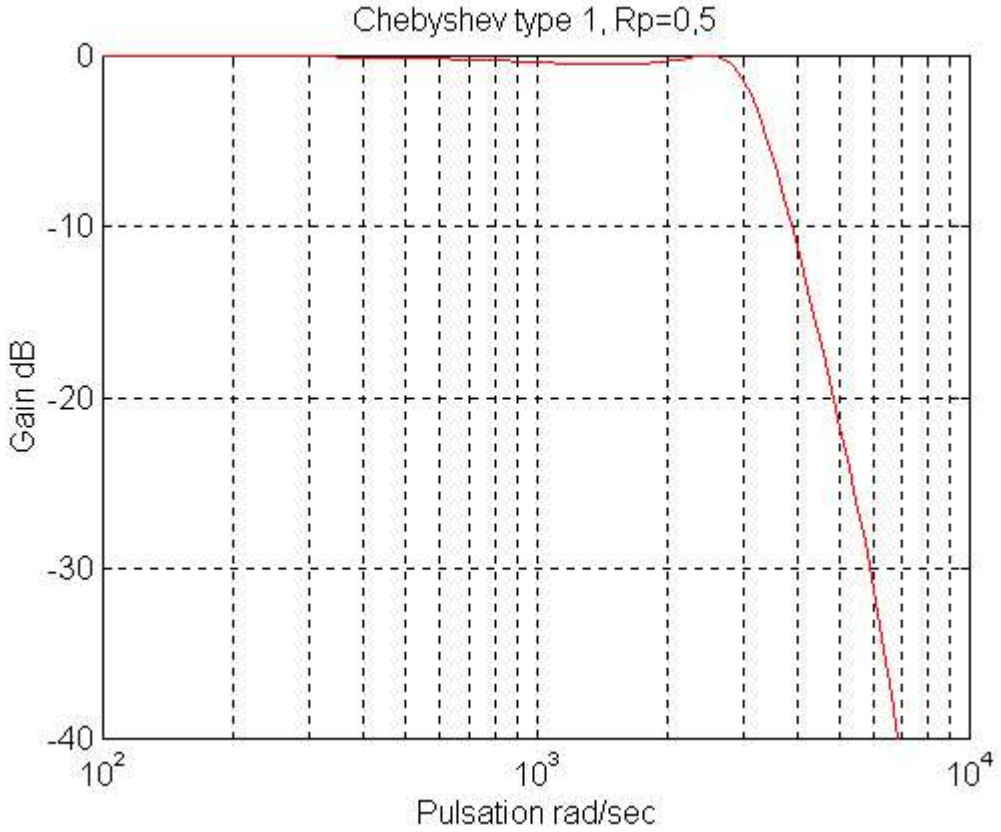
Filtres de Butterworth

Ces filtres sont aussi qualifiés de *maximalement plats* (maximally flat) car leur réponse fréquentielle est plate au maximum dans la bande passante :



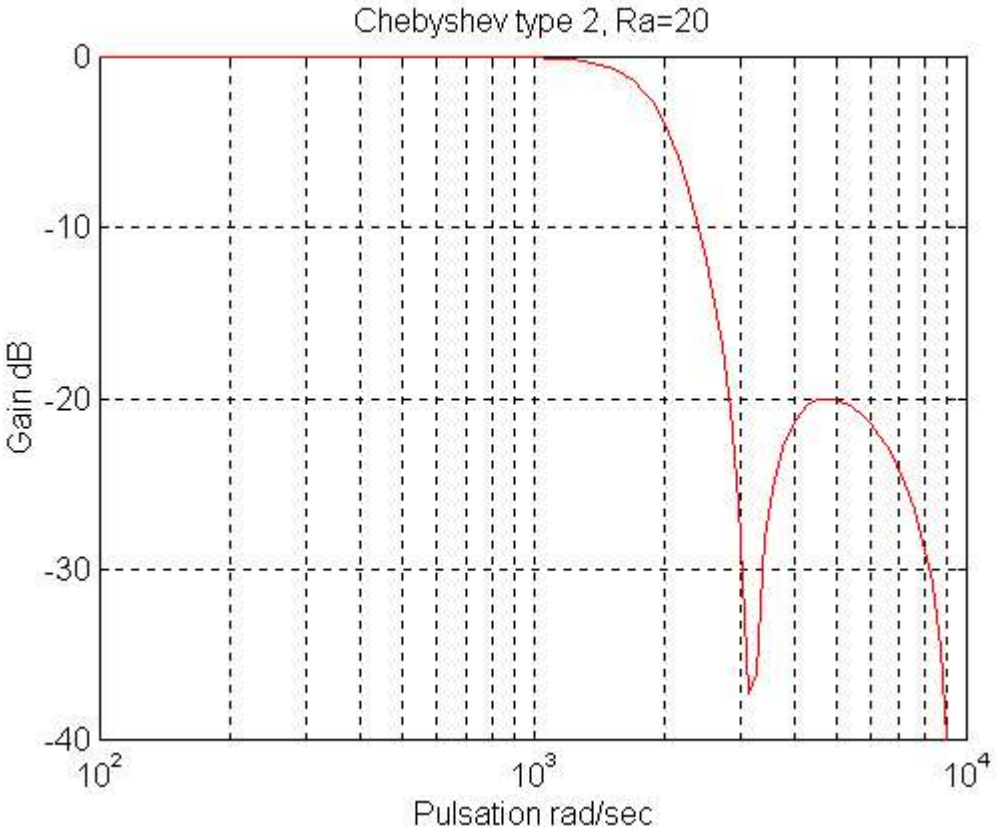
Filtres de Chebychev type I

Ces filtres présentent la caractéristique d'avoir une erreur équirépartie (equal ripple) dans la bande passante et la bande atténuée a une réponse fréquentielle plate.



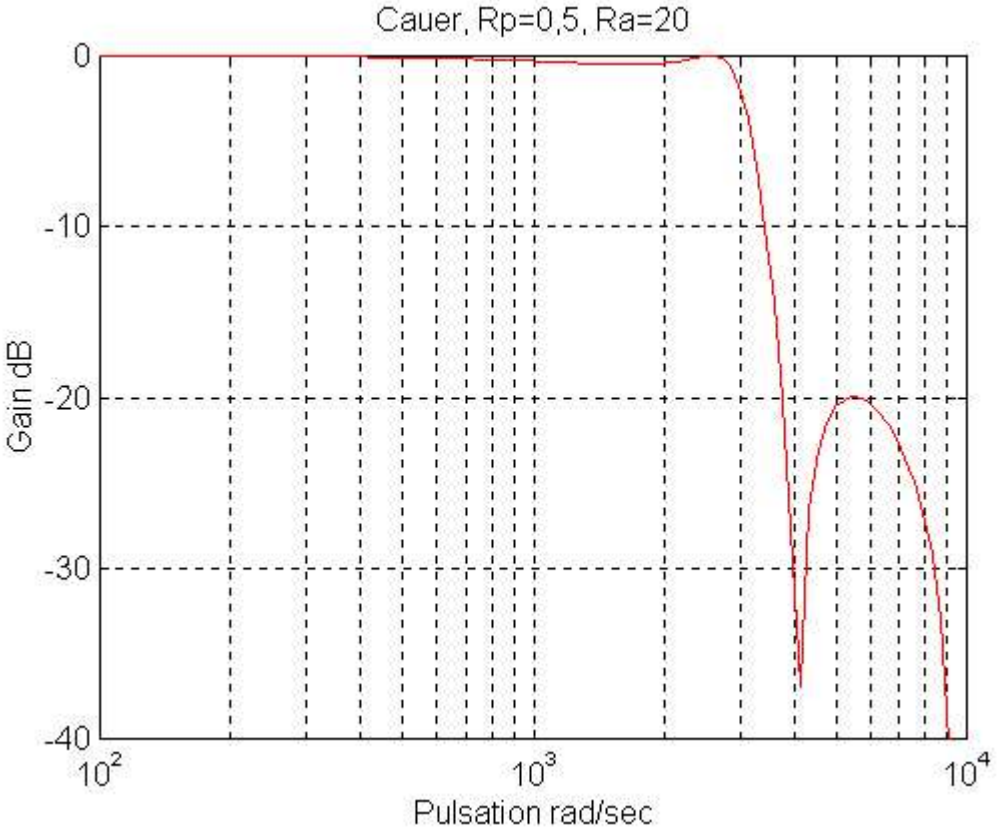
Filtres de Chebychev type II (ou inverses)

Ces filtres présentent la caractéristique d'avoir une erreur équirépartie dans la bande atténuée et la bande passante a une réponse fréquentielle plate.



Filtres elliptiques (ou de Cauer)

La réponse fréquentielle a des ondulations à la fois dans la bande passante et dans la bande atténuée.



D'autre types de méthodes existent (Bessel, Yulewalk,...).

Références bibliographiques

G. Baudoin & F. Virolleau - *DSP : les processeurs de traitement du signal : Famille 320C5X* - Dunod, Paris, 1996.

G. Blanchet & M. Charbit - *Eléments de théorie du signal et simulation sous Matlab* - Collection Pédagogiques de Télécommunications, Ellipses, 1997.

A. Deluzurieux & M. Rami - *Cours d'électronique numérique et échantillonnée* - Eyrolles, Paris, 1991.

A. Deluzurieux & M. Rami - *Problèmes d'électronique numérique* - Eyrolles, Paris, 1989.

F. Manneville & J. Esquieu - *Théorie du signal et composants* - Dunod, Paris, 1989.

F. Manneville & J. Esquieu - *Systèmes bouclés linéaires de communication et de filtrage*- Dunod, Paris, 1990.

Y. Thomas - *Signaux et systèmes linéaires* - Masson, Paris, 1992.

C. Ifeachor & B.W. Jervis - *Digital Signal Processing : a practical approach* - Addison-Wesley, Wokingham, 1993.

J.C. Belloc & P. Schiller - *Mathématiques pour l'électronique* - Masson, Paris, 1994.

TD 1 : RAPPELS SUR LA TRANSFORMEE EN Z - ANALYSE DE FILTRES NUMERIQUES NON RECURSIFS

Ex 1.1 : En appliquant la définition, trouver la transformée en Z de la suite numérique suivante :
u(0) = 1u(1) = 4u(2) = 16 u(3) = 64 u(4)= u(5) = ... = 0.
Extrait du devoir de 94-95

Ex 1.2 : Trouver les originaux x_n des transformées suivantes :

$$X_1(z) = \frac{z^2}{z^2 - 3z + 2} \qquad X_2(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}$$

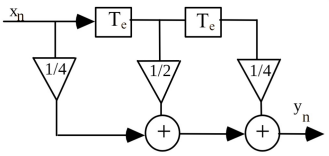
$$X_3(z) = \frac{0{,}2z}{(z-1)(z-0{,}8)} \qquad X_4(z) = \frac{z^2(3{,}15z - 3)}{4(z-1)(z-0{,}9)(z-0{,}5)}$$

On donnera les valeurs de x(0), x(1), x(2) et x(3) ainsi que x(∞) lorsque cela est possible.

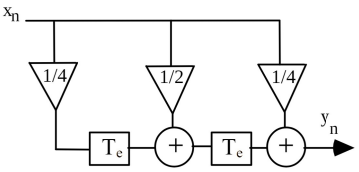
Ex 1.3 : Etude d'un filtre numérique à réponse impulsionnelle finie.

1. Etude de la structure

1.1 Le filtre est réalisé selon la structure directe figure 1 :
Exprimer la relation de récurrence donnant y_n ainsi que la fonction de transfert H(z) du système.



figure



1 figure 2

1.2 Montrer que la structure transposée figure 2 réalise la même fonction que la structure directe.

1.3 Montrer que la structure figure 3 réalise également la même fonction. Quel est l'avantage de cette structure sur les précédentes ?

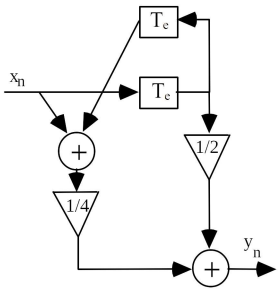


figure 3

2. Déterminer la réponse impulsionnelle. Justifier la dénomination de filtre à Réponse Impulsionnelle Finie. Quelle relation existe-t-il entre la réponse impulsionnelle et la fonction de transfert ?

3. Donner la réponse fréquentielle du filtre |H(jω)|, donner l'allure de la réponse en amplitude en fonction de $\frac{f}{(f_e/2)}$ (dans une échelle linéaire). Rappel : $F_e/2$ est appelée la fréquence de Nyquist.
Que peut-on dire de la réponse en fréquence d'un filtre numérique ?
On veut échantillonner un signal sinusoïdal s(t) de fréquence pouvant aller jusqu'à une valeur maximale f_m. Rappeler la condition sur la fréquence d'échantillonnage f_e pour pouvoir échantillonner s(t) sans perte d'information.
En déduire la portion utile de la réponse en fréquence du filtre numérique.
Dans ce domaine de fréquences, quel est le type de filtrage réalisé ? Calculer alors la fréquence de coupure à -3 dB du filtre.

4. Tracer l'allure du diagramme de Bode en amplitude. Commenter.

5. Tracer la réponse en phase dans le domaine utile de fréquences. Que peut-on dire du retard de propagation τ du filtre lorsque la fréquence f varie ? Exprimer τ en fonction de la période d'échantillonnage T_e. Comment appelle-t-on ce type de filtre ?

TD2 : SYNTHESE DE FILTRES NUMERIQUES NON RECURSIFS

***Ex 2.1* : Synthèse d'un filtre non récursif.**

1. Donner la relation de récurrence donnant, dans le cas général, le fonctionnement d'un filtre non récursif.

2. Quel lien existe-t-il entre les coefficients de pondération et les échantillons de la réponse impulsionnelle ?

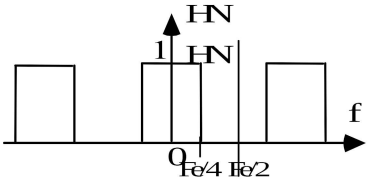
3. 3.1 Donner les expressions de la fonction de transfert en Z, ainsi que la fonction de transfert en fonction de jω.

   3.2 Montrer que $H(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k e^{-j2k\pi fT_e}$. Montrer que les coefficients d'indices -k et k peuvent s'associer dans l'expression de H(f) et que l'on peut écrire :

$$H(f) = h_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2h_k \cos\left(2\pi k \frac{f}{f_e}\right)$$

4. Conception d'un filtre numérique passe-bas idéal qui a comme fréquence de coupure $F_e/4$.

Un tel filtre est défini par la réponse fréquentielle ci-contre :



   4.1 Commenter la réponse représentée ci-contre. Justifier qu'il s'agit bien de la réponse fréquentielle d'un filtre numérique passe-bas idéal de fréquence de coupure $F_e/4$.

   4.2 Montrer que la réponse impulsionnelle peut s'écrire :

$$h_k = h_A(k) = \frac{\sin(2\pi f_C kT_e)}{\pi kT_e} = 2f_C \sin c(2\pi f_C kT_e)$$

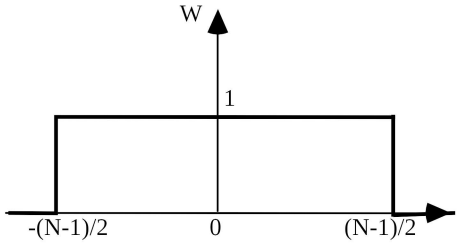
   Représenter h_k en considérant pour la suite que $F_e=1$. h_k représente donc les coefficients du filtre idéal.

   4.3 Quelle est la fréquence maximale f_M du signal que l'on peut appliquer à l'entrée du filtre?

5. Problème de troncature

Le nombre de coefficients N que le processeur de traitement du signal peut prendre en compte est limité. La fonction de transfert que l'on réalise n'est donc qu'une approximation de celle qui est désirée. Elle sera d'autant meilleure que N est grand. On choisit de prendre pour N un nombre impair. On ne conserve alors que les coefficients h_k de rang 0, de rangs compris entre -1 et -(N - 1)/2 et de rang compris entre 1 et (N - 1)/2.

Cela revient à multiplier par 1 tous les coefficients h_k tels que $|k| \le \frac{N-1}{2}$ et à multiplier tous les autres coefficients par 0. On multiplie donc la réponse impulsionnelle échantillonnée par une fonction fenêtre rectangulaire W(k) définie par :



d'où le nom de méthode d'approximation impulsionnelle par fenêtre rectangulaire.

Il s'agit de réaliser une troncature de la réponse impulsionnelle.

5.2 On choisit de conserver N = 7 coefficients.
Calculer h_0, h_1, h_2 et h_3.
Représenter le module de H(f) pour $0 \leq f \leq F_e/2$.
Que peut-on dire de l'argument de H(f) ?
Comment évolueraient ces courbes si N augmentait, on pourra tester en TP.

<u>Ex 2.2</u> : Conception d'un filtre non récursif passe-bande

Il s'agit de concevoir un FNR passe-bande obéissant aux caractéristiques ci-dessous :

bande passante 150-250 Hz
zone de transition 50 Hz
ondulations en bande passante : 0,1 dB
ondulations en bande atténuée : 60 dB
fréquence d'échantillonnage : 1 kHz

1. Donnez les fréquences caractéristiques du filtre normalisées en $F_e/2$. Déplacer les fréquences de coupure en prenant en compte le fait qu'il s'agit d'un filtre passe-bande.

2. Donner l'expression mathématique des coefficients de la réponse impulsionnelle "idéale" (infinie) $h_D(k)$,utiliser pour cela les tableaux du cours.

3. Donner la valeur des ondulations en bande passante(A_p en dB, ainsi que δ_p), et en bande atténuée (A_a en dB, ainsi que δ_a). En déduire que l'on pourra utiliser au choix la fenêtre de Kaiser ou de Blackman.

4. Utiliser la fenêtre de Blackman, donner son nombre de coefficients.
Donner son expression mathématique. Donner les valeurs des coefficients $h(k) = h_D(k)w(k)$ pour k=0, k=1, k=(N-1)/2 (rappel : prendre N impair). (N.B. :Si vous avez des problèmes avec vos calculatrices, ne pas oublier que $\sin(x) = \sin(x \pm 2k\pi)$, même chose pour le cosinus). Il n'est pas nécessaire de calculer tous les autres coefficients à la main, il est naturellement possible de les calculer informatiquement, ce que nous ferons en T.P.

5. Utiliser la fenêtre de Kaiser, donner les spécifications : ordre, β.
Les coefficients du filtre seront calculés dans le cadre du T.P.

TD 3 : ANALYSE DE FILTRES NUMERIQUES RECURSIFS

***Ex 3* : Etude d'un filtre numérique récursif du premier ordre**

On considère un filtre numérique défini par l'algorithme suivant: $y_n = x_n + a y_{n-1}$ où a est une constante.

1. Faire le schéma de la structure du filtre.

2. Calculer la fonction de transfert H(z) du filtre. Vérifier les conditions de stabilité de ce filtre.

3. Déterminer la réponse impulsionnelle du filtre :
   - à partir de l'équation de récurrence,
   - à partir de la fonction de transfert en Z.

   Justifier la dénomination filtre RII. Quelle est la condition sur a pour que le filtre soit stable ? Représenter la réponse impulsionnelle dans ce cas. Quel lien existe entre la fonction de transfert et la réponse impulsionnelle ?

4. Etude de la réponse indicielle :
   - 4.1 Déterminer et représenter la réponse indicielle $\{y_n\}$ du filtre à partir de l'équation de récurrence dans le cas où celui-ci est stable.
   - 4.2 Sachant que $Z(\Gamma_k) = \frac{z}{z-1}$, calculer la transformée Y(z) de la réponse indicielle.
   - 4.3 Décomposer Y(z) en éléments simples et retrouver la suite originale $\{y_n\}$ déterminée à partir de la relation de récurrence.

5. Etude de la réponse fréquentielle :
   - 5.1 Calculer la réponse fréquentielle H(jω) de ce filtre numérique.
   - 5.2 Déterminer le module |H| et l'argument ϕ de H(jω). Représenter |H| et ϕ pour le domaine utile du filtre. De quel type de filtre s'agit-il ?

On donne : $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + \ldots + b^{n-2}a + b^{n-1})$

TD 4 : SYNTHESE DE FILTRES NUMERIQUES RECURSIFS

***Ex 4.1* Egaliseur numérique**

Afin de traiter un son, on conçoit un égaliseur numérique comportant une batterie de filtres passe-bande, chacun ayant une bande passante adaptée à un haut-parleur spécifique d'une enceinte acoustique.

1. On décide de choisir une structure de type RII. Quels sont les avantages et inconvénients respectifs des filtres à RIF et à RII ?

2. Concevoir un filtre pour la bande passante 500 rad/s - 1500 rad/s, en utilisant la transformation bilinéaire (en conservant invariante la pulsation centrale de 1000 rad/s). La fonction de transfert du filtre analogique de référence est donnée ci-dessous :

$$H(p) = \frac{1000\,p}{p^2 + 1000\,p + 750000}$$

La fréquence d'échantillonnage est de 44 kHz (qualité CD-audio).

Pour cela, donner la valeur de p_n puis déterminer la valeur de k, le facteur d'échelle. Donner la fonction de transfert du filtre numérique. Ce filtre est-il stable ?

3. Donner l'équation de récurrence du filtre numérique obtenu. Ce filtre est-il récursif ou non récursif, pourquoi ? Quel est le domaine utile du filtre ?

4. Exprimer et représenter la réponse impulsionnelle, ce filtre est-il stable ?

(Inspiré de l'examen de 98-99)

***Ex 4.2* : Synthèse d'un filtre numérique passe-bas**

Réaliser un filtre numérique passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure 0,159 Hz par identification avec le filtre passe-bas analogique du premier ordre ayant les mêmes caractéristiques ; la fréquence d'échantillonnage est 10 Hz.

Le filtre est-il stable ?

Afin de pouvoir effectuer le calcul de la réponse fréquentielle sur calculateur, il est demandé de poser les équations permettant la résolution de cette réponse en module et en phase. La résolution sera par la suite effectuée sur machine.

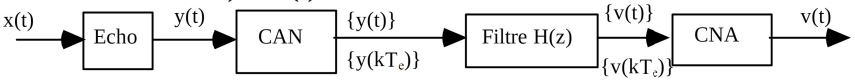
<u>Ex 7</u> : Traitement d'échos

Lors de l'enregistrement en studio d'un signal x(t), un écho s'ajoute généralement à celui-ci et le récepteur(enregistreur) reçoit en fait :

$$y(t) = x(t) + \alpha x(t - \tau) \text{ où } 0 < \alpha < 1 \text{ et } \tau > 0.$$

On veut concevoir un filtre numérique permettant de corriger (voire éliminer) cet écho. L'objectif est par conséquent d'avoir v(t) (à la sortie du filtre) = x(t).

Le traitement est numérique, on pose $y(t) = y(nT_e)$.



Les hypothèses sont les suivantes :

- $f_e = 1/T_e$ = fréquence d'échantillonnage,
- le signal x(t) est à bande limitée à f_1 : $\left(X(f) \equiv 0 \text{ pour } f \geq f_1\right)$.

1. On se place dans le cas où $\tau = 1/(2f_1)$.

   1.1. Peut-on choisir $T_e = \tau$? Justifier.

   1.2. Puisqu'on veut restituer x(t) à la sortie du filtre, on pourra poser $H(z) = \dfrac{V(z)}{Y(z)} = \dfrac{X(z)}{Y(z)}$.

   Donner la fonction de transfert H(z) du filtre et son équation de récurrence.

   1.3. En déduire le type de filtre obtenu (RII ou RIF). Préciser l'ordre du filtre et les conditions de stabilité.

2. On considère à présent le cas où $\tau = 1/f_1$ et on pose $\tau = NT_e$ (N entier).

   2.1. Déterminer la fonction de transfert du filtre H(z).

   2.2. Dans le cas où $\alpha=1$, donner et tracer la réponse fréquentielle du filtre.

   2.3. Déterminer le pas d'échantillonnage T_e (et N) qui satisfait de justesse la condition de Shannon.

(Extrait de l'examen de 96-97)

D'autres exercices sur le FILTRAGE NUMERIQUE

Ex FN.8 : Filtrage Q.M.F. (Quadrature Mirror Filter)

1. Un filtre demi-bande de type FIR à phase linéaire est défini par une réponse fréquentielle réelle H(f) antisymétrique par rapport au point (f_e / 4 = 0,5), f_e étant la fréquence d'échantillonnage. Ainsi : $H\left(\frac{f_e}{4}\right) = 0,5; H\left(\frac{f_e}{4} + f\right) = 1 - H\left(\frac{f_e}{4} - f\right)$.

On considère ici le filtre dont l'équation récurrente est donnée par : $y_n = \frac{1}{2}.\left(x_n + \frac{1}{2}.x_{n-1} + \frac{1}{2}.x_{n+1}\right)$

a) Calculer H(f) = ;

b) Montrer que le filtre est un FIR demi-bande ;

c) Tracer l'allure de sa réponse fréquentielle et vérifier qu'il s'agir d'un passe-bas ;

d) Dans le cas général, l'équation récurrente d'un demi-bande causal s'écrit : $y_n = \frac{1}{2}.\left[x_{n-2M} + \sum_{i=1}^{2M} a_i.x_{n-2i+1}\right].$.

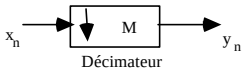
Déterminer la fonction de transfert en z correspondante et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme : $\frac{Y(z)}{X(z)} = H_0(z) = \frac{1}{2}\left[G_0(z^2) + z^{-1}.G_1(z^2)\right]$ avec $G_0(z^2)$ et $G_1(z^2)$ à préciser.

e) La sortie y'_n du passe-haut complémentaire au passe-bas précédent est donnée par : $y'_n = \frac{1}{2}\left[x_{n-2M} - \sum_{i=1}^{2M} a_i.x_{n-2i+1}\right]$

- Calculer $H_1(z) = \frac{Y'(z)}{X(z)}$

- Vérifier que l'on retrouve bien X(z), à un retard près, en sommant $Y'(z)$ avec Y(z) du 1.d

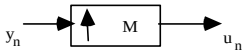
2. On considère le décimateur d'ordre M correspondant au schéma suivant (on conserve un échantillon sur M échantillons).



Décimateur

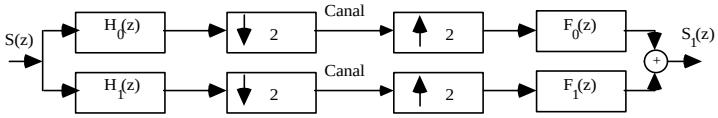
a) Déterminer la condition sur f_m, (f_m = fréquence maximale de X(f), X(f) = 0 pour $f_m \leq f \leq$) pour qu'il n'y ait pas de recouvrement spectral en sortie du décimateur. Dans la suite de l'exercice on admettra que Y(z) et X(z) sont reliées par : $Y(z) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X\left(z^{\frac{1}{M}}.e^{-2j\Pi\frac{k}{M}}\right)$

b) Soit l'interpolateur obtenu en insérant M - 1 zéros entre deux échantillons successifs du signal y_n.



Montrer que $U(z) = Y(z^M)$

3. On considère le système de décomposition - reconstruction Q.M.F. d'un signal :



$H_0(z)$, $H_1(z)$ = les transmittances des § 1. d et 1.e

$F_0(z)$, $F_1(z)$ à déterminer

a) En supposant le canal de transmission parfait, calculer $S_1(z)$ en fonction de S(z).

b) Donner le système d'équations permettant de déterminer $F_0(z)$ et $F_1(z)$ pour qu'il y ait une parfait reconstruction, c'est-à-dire $S_1(z) = S(z)$.

Ex FN.9 : Etude de l'algorithme de filtrage s(n) = - e (n) + e (n - 2)

Vous exprimerez et représenterez :

- la réponse impulsionnelle ;

- la réponse indicielle ;
- la fonction de transfert H(z) ;

Vous déterminerez la fonction de transfert H(jf) et représenterez le module de H(jf).

Vous conclurez sur le type de fonction réalisée en proposant un système analogique équivalent (il n'est pas demandé d'équations du système analogique équivalent). Vous justifierez votre réponse.

Extrait du devoir de 93-94

Ex FN.10 : Synthèse des filtres récursifs (Pb n°11)

Ex FN.11 : Synthèse des filtres récursifs (voir pages suivantes)

Ex FN.12 : 1) Etude de l'algorithme de filtrage s(n) = - e (n) + e (n - 4)

Vous exprimerez et représenterez :

- la réponse impulsionnelle ;
- la réponse indicielle ;
- la fonction de transfert H(z) ;

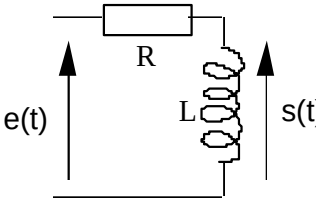
Vous déterminerez la fonction de transfert H(jω) et représenterez le module de H(jω), en n'omettant pas de situer la fréquence d'échantillonnage (ou pulsation d'échantillonnage).

2) Vous donnerez la (ou les) bandes passantes du filtre calculé précédemment.

Extrait du devoir de 94-95

Ex FN.13 Synthèse de filtre numérique

On se propose de concevoir un filtre numérique ayant la même réponse fréquentielle qu'un filtre analogique RL du premier ordre avec R = 330 Ω et L = 20 mH (schéma ci-contre). On conservera invariante sa fréquence de coupure.



1. Donner la fonction de transfert de ce filtre et sa fréquence de coupure f_c.

2. On décide de choisir une structure de type RII. Quels sont les avantages et inconvénients respectifs des filtres à RIF et à RII ?

3. Parmi des méthodes de synthèse connues : invariance impulsionnelle, invariance indicielle et transformation bilinéaire, nous choisissons la dernière. Justifier ce choix et donner le changement de variable à effectuer pour utiliser cette transformation.

4. Donner la valeur de p_n puis déterminer la valeur de k, le facteur d'échelle. Donner la fonction de transfert du filtre numérique en supposant que la fréquence d'échantillonnage est : 20000 Hz.

5. Quel est le domaine utile du filtre ? Donner la fonction de transfert du filtre numérique et son équation de récurrence.

6. Exprimer et représenter la réponse impulsionnelle, ce filtre est-il stable ?

7. Déterminer la fonction de transfert H(jω), donner les valeurs des points |H(0)|, $|H(j.\omega_c)|$, $|H(j\omega_e/4)|$, $|H(j\omega_e/2)|$, où $\omega_e$représente la pulsation d'échantillonnage et ω_C la pulsation de coupure du filtre analogique de référence. Préciser le type de filtre obtenu.
Quel commentaire peut-on faire sur la valeur obtenue de $|H(j\omega_c)|$?
Représenter l'allure de |H(jω)|, en n'omettant pas de situer la fréquence d'échantillonnage (ou pulsation d'échantillonnage). *(Extrait de l'examen de 95-96)*

D'autres exercices sur les SYSTEMES DISCRETS et la TRANSFORMEE EN Z

Ex TZ.4 : Système discret du 1er ordre

Soit l'équation de récurrence : $x_t = x_{t-1} + u_{t-1}$. Calculer de deux façons différentes les réponses du système pour $\{u_t\} = \delta_t, \{u_t\} = \Gamma_t, \{u_t\} = t.\Gamma_t$

- d'une part, en faisant tourner l'algorithme,
- d'autre part, en utilisant la transformée en Z.

Ex TZ.5 :

1. Trouver X(z), la transformée en z du signal numérique $x_n = \left(-1 + 2^n\right)\Gamma(n)$.
2. On retarde x_n de deux coups. Quelle est la transformée en z, Y(z) du signal y_n ainsi obtenu (on exprimera analytiquement y_n).

Ex TZ.6 : Par la méthode que vous désirez, vous déterminerez les quatre premiers échantillons de la suite numérique dont la transformée en z est : X (z) =

Extrait du devoir de 93-94

Ex TZ.7 : Système discret du 2è ordre

Soit l'équation de récurrence : $x_{t+1} = x_t - 0,5x_{t-1} + 0,5.u_t$.

1. Calculer de deux façons différentes la réponse impulsionnelle du système :
- d'une part, en faisant tourner l'algorithme,
- d'autre part, en utilisant la transformée en Z.
2. En déduire la réponse à un échelon Γ_t.

Ex TZ.8 : En utilisant les théorèmes du cours et le résultat de l'exercice 1, trouver la transformée en Z des suites numériques u_1 et u_2 suivantes :

1. $u_1(0) = 0$ $u_1(1) = 0$ $u_1(2) = 1$ $u_1(3) = 4$ $u_1(4) = 16$ ...
2. $u_2(0) = 16$ $u_2(1) = 64$ $u_2(3) = 256$ ...

Ex TZ.9 Vous déterminerez les quatre premiers échantillons de la suite numérique dont la transformée en z est :

X (z) =

Extrait du devoir de 94-95

Ex TZ.10 : Ex 3 page 122 Cours d'électronique numérique et échantillonnée

ARCHIVES

1. Analyse des filtres non récursifs

1. Les coefficients de pondération

Les M valeurs b_i de l'équation de récurrence sont les coefficients de pondération du filtre. Ces coefficients constituent la mémoire du filtre. En effet, pour calculer la sortie actuelle, le filtre utilise les N entrées présente et passées pondérées par les coefficients b_i. Sa mémoire est donc finie : le filtre oublie les entrées les plus anciennes au profit des plus récentes.

2. La réponse impulsionnelle

La séquence - réponse impulsionnelle $\{h_k\}$ est la séquence - réponse à la séquence causale $\delta_k = (1,0,0,...)$. On obtient :

$h_k = b_0.\delta_k + b_1.\delta_{k-1}+...+b_{M-1}.\delta_{k-M+1}$

c'est-à-dire : $h_i = 0$ si $i < 0$ (causalité), $h_0 = b_0.1+ b_1.0+...+b_{M-1}.0 = b_0$, $h_1 = b_0.0 + b_1.1+...+b_{M-1}.0 = b_1$, ..., $h_i = b_i$, $h_{M-1} = b_0.0 + b_1.0+...+b_{M-1}.1 = b_{M-1}$, $h_j = 0$ si $j > M-1$.

Ainsi, les coefficients de pondération ne sont rien d'autre que les valeurs de la réponse impulsionnelle du filtre. Puisque ces coefficients sont en nombre limité, la réponse impulsionnelle du filtre s'annule au bout de M valeurs. On dit qu'elle est finie et le fitre est lui-même appelé filtre à réponse impulsionnelle finie ou filtre RIF (FIR pour les Anglo-saxons).

L'équation de récurrence de définition du filtre peut s'écrire en remplaçant les coefficients b_i par les valeurs h_i de la réponse impulsionnelle : $s_k = h_0.e_k + h_1.e_{k-1}+...+h_{M-1}.e_{k-M+1}$, ou, de manière plus condensée : $s_k = \sum_{i=0}^{M-1} h_i.e_{k-i}$.

3. La réponse indicielle

C'est le signal $\{d_k\}$ réponse au signal causal $\Gamma_k = (1,1,1,.....1)$. La séquence représentative de $\{d_k\}$ vérifie :

$d_k = b_0.\Gamma_k + b_1.\Gamma_{k-1}+...+b_{M-1}.\Gamma_{k-M+1}$

c'est-à-dire : $d_i = 0$ si $i < 0$ (causalité), $d_0 = b_0.1 + b_1.0+...+b_{M-1}.0 = b_0$, $d_1 = b_0.1 + b_1.1+...+b_{M-1}.0 = b_0 + b_1$, ..., $d_i = b_0 + b_1+...+b_i$, $d_{M-1} = b_0.1+ b_1.1+...+b_{M-1}.1 = b_0 + b_1+...+b_{M-1}$, $d_j = d_{M-1}$ si $j > M-1$.

Ainsi la valeur finale de la réponse indicielle est égale à la somme des coefficients du filtre RIF. Cette valeur est atteinte au bout de M sorties.

4.. La réponse harmonique

4.1 Fonction de transfert en z

La fonction de transfert en z s'écrit : $H(z) = b_0 + b_1.z^{-1}+...+b_{M-1}.z^{-(M-1)}$, ou, de manière plus condensée, $H(z) = \sum_{i=0}^{M-1} b_i.z^{-i}$.

Elle ne présenta pas de pôle mais seulement des zéros, le filtre RIF sera par conséquent toujours **stable**.

4.2 Réponse en fréquence

Il suffit de remplacer z par $e^{j2\Pi f\Delta}$, d'où : $H(jf) = b_0 + b_1.e^{-j2\Pi f\Delta}+...+b_{M-1}.e^{-j2\Pi(M-1)f\Delta}$ soit $H(jf) = \sum_{i=0}^{M-1} b_i.e^{-j2\Pi if\Delta}$

Cette réponse est bien sûr périodique de période fréquentielle $F_e = \frac{1}{\Delta}$. Les coefficients de pondération du filtre RIF constituent les coefficients du développement en série de Fourier de la fonction de transfert H(jf).

2. Synthèse des filtres non récursifs

SUITE ET FIN DE LA TECHNIQUE D'ECHANTILLONNAGE EN FREQUENCE

En effet, cette transformation fait correspondre à une séquence "fréquentielle" {H(k)} périodique de M valeurs par période une séquende "temporelle" {h(i)} périodique de M valeurs par période par les relations :

Les H'k) sont les échantillons de pas de la fonction motif de la fonction que l'on désire réaliser.

Si l'on compare l'expression des H(k) à celle de la fonction de transfert d'un filtre non récursif
on s'aperçoit qu'il y a identité si l'on réalise :
On obtient alors un filtre RIF dont la fonction de transfert passe par les M points d'échantillonnage de
Illustrons cette démarche par le même exemple que celui utilisé pour la technique impulsionnelle et choisissons M= 8.
L'échantillonnage de la fonction de transfert du filtre passe-bas idéal donne:
On en déduit :
On retrouve bien la symétrie de la réponse impulsionnelle qui permet d'aboutir à un filtre RIF à phase linéaire. Pour rendre ce filtre causal, il suffit de retarder cette réponse de . On aboutit finalement à un filtre de fonction de transfert :
Son module est représenté par la figure :
Cette courbe passe bien par les M points d'échantillonnage comme prévu, mais elle présente entre ces points des ondulations.
L'expression obtenue pour la fonction de transfert s'écrit en remplaçant les en fonction desH(k) :
soit :
La fonction correspond danc à une formule d'interpolation de la fonction idéale entre les points d'échantillonnage. Le terme entre parenthèses se transforme aisément en :
d'où :
Le filtre RIF obtenu peut donc être considéré comme l'association de M filtres de fonctions de transfert pondérées par les coefficients H(k) et centrées sur les fréquences .

SUITE PAGE 166-168 C.E.N.

3.2 Etude de la stabilité

Le dénominateur de la fonction de transfert étant d'ordre 2, les deux pôles de cette fonction de transfert pourront être la cause d'instabilités. Suivant le signe du discriminant $\Delta = a_1^2 - 4a_2$ du dénominateur, cette fonction de transfert possède des pôles réels ou complexes conjugués.

3.2.1 Premier cas : présence de pôles réels, $\Delta \geq 0$

La fonction de transfert H(z) est décomposable en un produit de deux fonctions de transfert du premier ordre. Le filtre est stable si les deux pôles p_1 et p_2 sont situés à l'intérieur du cercle unité, avec :

$$p_1 = -\frac{a_1}{2} - \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \text{ et } p_2 = -\frac{a_1}{2} + \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

* Si $a_1 > 0$, $|p_1| > |p_2|$, donc $|p_1| = \left| -\frac{a_1}{2} - \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \right| = \frac{a_1}{2} + \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} < 1$, vrai si $\mathbf{a_2 > a_1 - 1}$.

* Si $a_1 < 0$, $|p_1| < |p_2|$, donc $|p_2| = \left| -\frac{a_1}{2} + \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \right| = -\frac{a_1}{2} + \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} < 1$, vrai si $\mathbf{a_2 > -a_1 - 1}$.

3.2.2 Second cas : présence de pôles complexes conjugués : $\Delta < 0$

L'expression des pôles est la suivante :

$$p_1 = -\frac{a_1}{2} - j\frac{\sqrt{-a_1^2 + 4a_2}}{2} \text{ et } p_2 = -\frac{a_1}{2} + j\frac{\sqrt{-a_1^2 + 4a_2}}{2}.$$

Il faut que ces pôles soient contenus dans le cercle unité, donc de module < 1:

$$|p_1| = |p_2| = \sqrt{\frac{a_1^2}{4} + \frac{-a_1^2 + 4a_2}{4}} = \sqrt{a_2}.$$

Le module des pôles n'étant défini que pour $a_2 > 0$ pour que la racine ait un sens, et d'autre part $\Delta < 0$, c'est-à-dire $a_2 > \frac{a_1^2}{4}$, donc $a_2 > 0$. Par conséquent, le filtre est stable si $\mathbf{a_2 < 1}$, car a_2 est égal au module des pôles complexes conjugués.

3.2.3 Triangle de stabilité

Il est habituel de récapituler les conditions de stabilité obtenues précédemment dans un triangle de stabilité dans le plan(a_1,a_2). L'intérêt d'utiliser ce triangle est de permettre d'étudier les conditions de stabilité du filtre purement récursif du second ordre directement à partir des coefficients de la fonction de transfert, même sans en connaître les pôles. Les conditions sont les suivantes :

si $\Delta > 0$, si $a_1 > 0$alors $a_2 > a_1 - 1$
si $a_1 < 0$, $a_2 > -a_1 - 1$,
si $\Delta < 0$, alors $a_2 < 1$.

Ces conditions se traduisent de la manière suivante :

* le filtre est instable si $a_2 > 1$, c'est-à-dire si le point de coordonnées (a_1,a_2) est situé au-dessus de la droite (D_1)horizontale d'ordonnée $a_2=1$.
* le filtre est instable si $a_2 < a_1-1$ lorsque $a_1 > 0$, c'est-à-dire si le point de coordonnées(a_1,a_2) est situé au-dessous de la droite(D_2) d'équation $a_2 = a_1-1$.
* le filtre est instable si $a_2 < -a_1-1$ lorsque $a_1 < 0$, c'est-à-dire si le point de coordonnées(a_1,a_2) est situé au-dessous de la droite(D_3) d'équation $a_2 = -a_1-1$.

Figure 6 page 5 poly 97-98

Pour que le filtre soit stable, il faut et il suffit que le couple de pôles (a_1,a_2) soit situé à l'intérieur du triangle délimité par les trois droites. On peut également noter que les pôles sont complexes si $a_2 > \frac{a_1^2}{4}$, c'est-à-dire si les couples(a_1,a_2) sont situés au-dessus de la parabole d'équation $a_2 = \frac{a_1^2}{4}$ représentée en pointillés sur la figure ci-dessus ($\Delta < 0$). Ils sont réels et confondus si le couple est situé sur la parabole ($\Delta = 0$) et sont réels et distincts si le couple est situé au-dessous de cette parabole ($\Delta > 0$).

Ex TZ.1 : Soit la suite illimitée dont les premiers nombres sont les suivants :

u(0) = 1 u(1) = 4 u(2) = 16 u(3) = 64 u(4) = 256 ...

En appliquant la définition de la transformation en Z, exprimer U(z), la transformée en Z de la fonction u(t).

A quelle condition la série obtenue converge-t-elle ? Cette condition étant supposée respectée, donner la valeur de U(z).