Chapitre 7
Synthèse
(ou construction, ou conception)
de filtres RII ou récursifs

Méthodes de synthèse de filtres récursifs

Il existe de nombreuses méthodes dont :

1) la méthode de l'invariance impulsionnelle

2) la méthode de l'invariance indicielle

3) la transformée en Z

4) la méthode des pôles et des zéros

5) la transformation bilinéaire

1) Synthèse par invariance impulsionnelle

Principe

- on détermine la réponse impulsionnelle désirée h(t)
- on échantillonne cette réponse impulsionnelle à la fréquence f_e et on en déduit la suite $\{h_k\}$
- on recherche la fonction de transfert H(z) du filtre numérique qui a pour réponse impulsionnelle la suite $\{h_k\}$

1) Synthèse par invariance impulsionnelle (exemple)

On veut synthétiser un filtre numérique qui possède la même réponse impulsionnelle qu'un filtre passe-bas analogique du 1er ordre de transmittance

.

$$H(p)=\frac{1}{1+\tau.p}$$

Réponse impulsionnelle

$$h(t)=\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau} \qquad h_k=\frac{1}{\tau}e^{-kT_e/\tau}$$

Echantillonnage de cette

réponse impulsionnelle

$$\{h_k\}=\frac{1}{\tau}\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-kT_e/\tau}=\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{1-e^{-T_e/\tau}}\right)$$

d'où :

$$H(z)=\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{1-e^{-T_e/\tau}z}\right)$$

La fonction de transfert en z est une fonction de la période d'échantillonnage T_e ce qui n'est naturellement pas le cas de celle en p. Il ne peut y avoir égalité entre les deux réponses dans le cas général. En fait il s'avère qu'il y a égalité à un coefficient K près

1) Synthèse par invariance impulsionnelle (exemple, suite)

on posera donc : $$H(z) = \frac{1}{\tau}\left(\frac{K}{1 - e^{-T_e/\tau} z^{-1}}\right)$$

Pour déterminer la constante K, on va comparer les réponses statiques du filtre analogique et du filtre numérique. La réponse statique est le régime permanent de la réponse à une entrée constante, c'est-à-dire la réponse en régime "sinusoïdal" pour f=0 (autrement dit la réponse indicielle).

La réponse du filtre analogique est, puisque f=0, p=j2πf=0, H=1.

La réponse du filtre numérique est, puisque f=0, $z = e^{j2\pi fTe}=1$.

Pour qu'il y ait égalité entre les 2 réponses en régime permanent, on pose $H = \frac{1}{\tau}\left(\frac{K}{1 - e^{-T_e/\tau}}\right)$ l'égalité entre les deux réponses et on déduit que

La fonction de transfert recherchée est alors $$K = \tau(1 - e^{-T_e/\tau})$$

$$H(z) = \frac{1 - e^{-T_e/\tau}}{1 - e^{-T_e/\tau} z^{-1}}$$

3) Transformée en Z

- Transformer la fonction de transfert d'un filtre analogique en Z en utilisant la définition de la transformée en Z. Il faut pour cela ajouter le bloqueur d'ordre 0.

$$H(z) = Z\left(B_0(p).H(p)\right)$$

- Le bloqueur d'ordre 0 a pour fonction de transfert $B_0(p) = \dfrac{1 - e^{-T_e p}}{p}$
- Le filtre ainsi obtenu sera stable si le filtre analogique est stable et si les conditions d'échantillonnage sont vérifiées.
- Ex : Soit le filtre analogique du premier ordre $H_F(p) = \dfrac{1}{1 + \tau p}$

- La fonction de transfert numérique équivalente (cf. "synthèse par la méthode impulsionnelle") est

$$H_F(z) = \frac{1 - e^{-T_e/\tau}}{1 - e^{-T_e/\tau} z^{-1}}$$

3) Transformée en Z : Passage direct Laplace -> Z

$$H(z) = Z\left(\frac{1-e^{-T_e p}}{p}.\frac{1}{1+\tau p}\right) = (1-z^{-1})Z\left(\frac{1}{p}\frac{1}{1+\tau p}\right)$$

Echelon

$$\frac{z}{z-1}$$

$$H_F(z) = \frac{1-e^{-T_e/\tau}}{1-e^{-T_e/\tau}z^{-1}}$$

Fonction de transfert globale résultante

$$H(z) = (1-z^{-1})\left(\frac{z}{z-1}\frac{\left(1-e^{-\frac{T_e}{\tau}}\right)}{\left(1-e^{-\frac{T_e}{\tau}}z^{-1}\right)}\right)$$

Fonction de transfert équivalente

3) Transformée en Z (suite)

$$H(z) = (1 - z^{-1})\left(\frac{z}{z-1}\frac{\left(1 - e^{-\frac{T_e}{\tau}}\right)}{\left(1 - e^{-\frac{T_e}{\tau}} z^{-1}\right)}\right) = \left(\frac{\left(1 - e^{-\frac{T_e}{\tau}}\right)}{\left(1 - z^{-1} e^{-\frac{T_e}{\tau}}\right)}\right)$$

- Cette méthode présente l'avantage d'être rigoureuse. Cependant il n'est pas toujours facile de déterminer facilement la transformation en Z d'une fonction de transfert.
- Les autres méthodes vont consister à approximer l'intégrale

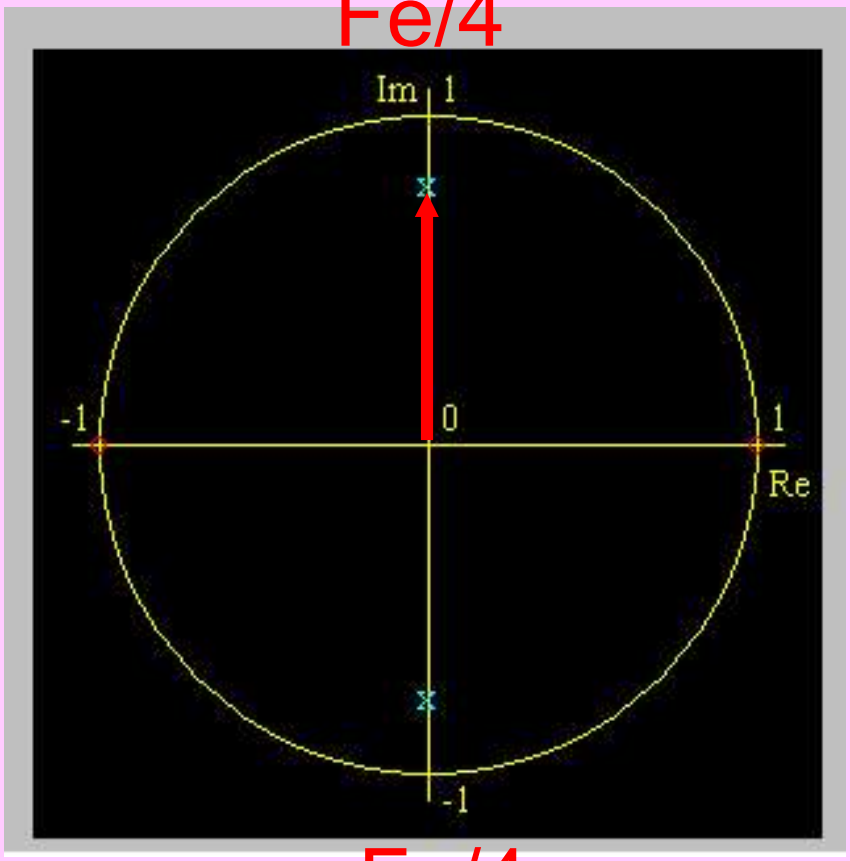
4) Synthèse par la méthode des pôles et des zéros

$$H(z) = \frac{K(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_p)}{(z - p_1)(z - p_2)\ldots(z - p_q)}$$

Le cercle unité représente un domaine utile théorique, de -Fe/2 à Fe/2

Les pôles et zéros du filtre sont soit réels, soit par paires complexes conjugués

Les zéros peuvent être sur le cercle unité => H(jf)=0



Les pôles ne peuvent pas être sur le cercle unité (pb de stabilité =>il seront sur un rayon inférieur à 1, tel que

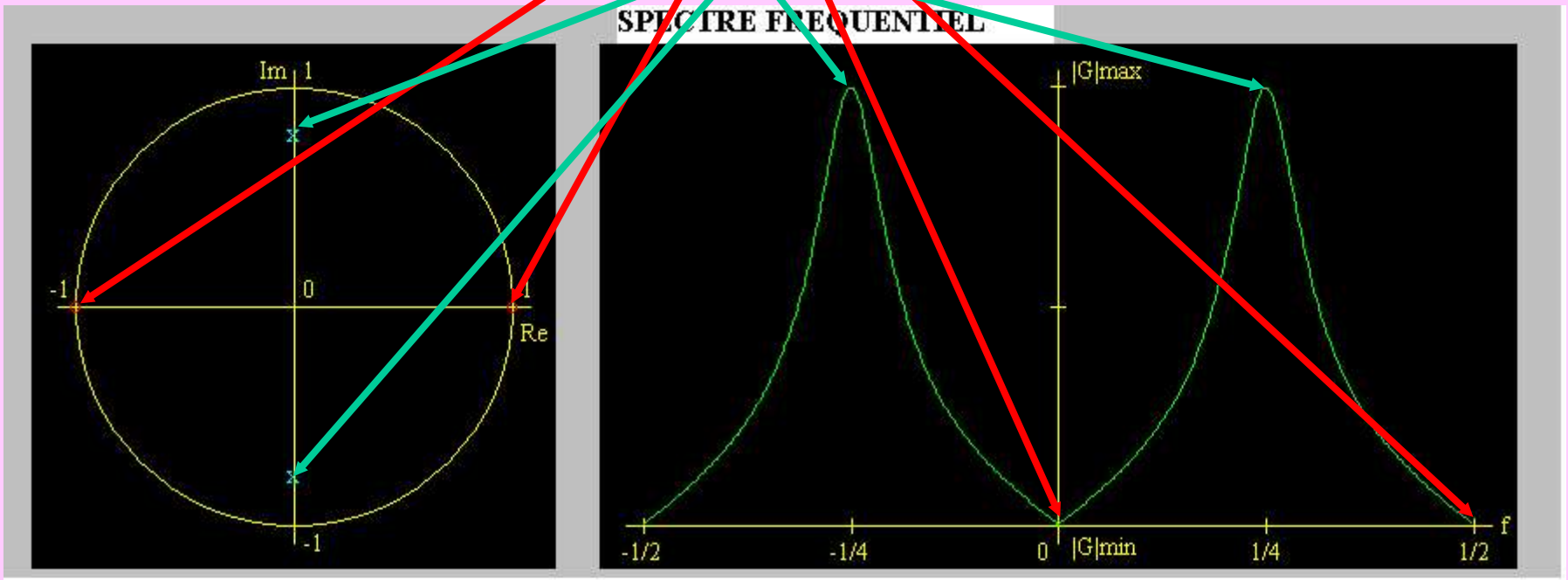
$$r \approx 1 - \left(\frac{l\,\mathrm{arg}\,eur}{F_e} \right) \pi$$

4) Synthèse par la méthode des pôles et des zéros

$$H(z) = \frac{K(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_p)}{(z-p_1)(z-p_2)\ldots(z-p_q)}$$

Zéros proches du cercle unité => G=0

Pôles proches du cercle unité => larges pics



$$H(z) = \frac{Num(z)}{Den(z)} = \frac{(z-(1.0))(z-(-1.0))}{(z^2+0.6083999)}$$

Gain : 0.04341249 |G| max = 5.1072516

|G|o = 0.0 |G| min = 0.0

Num(z)= 1.0 -1.0.z^-2

Den(z)= 1.0 +0.6083999.z^-2

Fermer

4) Synthèse par la méthode des pôles et zéros : Exemple

Filtre réjecteur de bande, rejetant la bande 50 Hz $\pm$ 5 Hz, Fe = 500 Hz

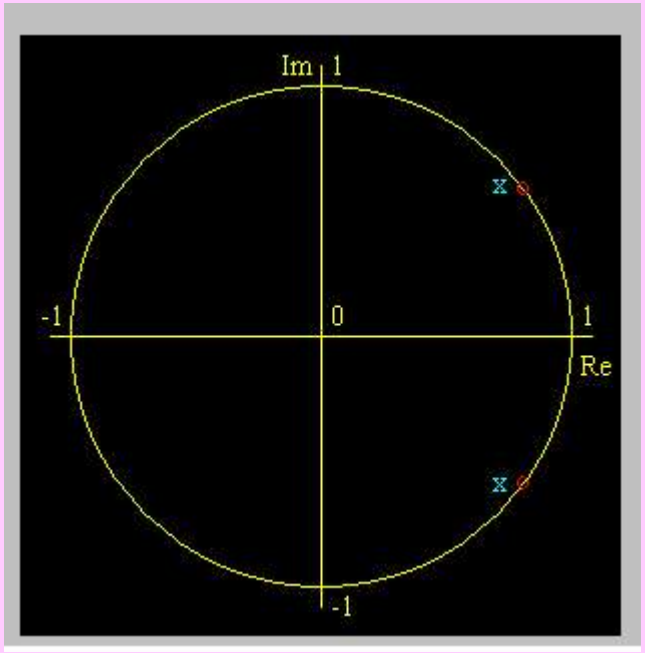
On propose par exemple de placer 2 pôles en 55 et -55 Hz et

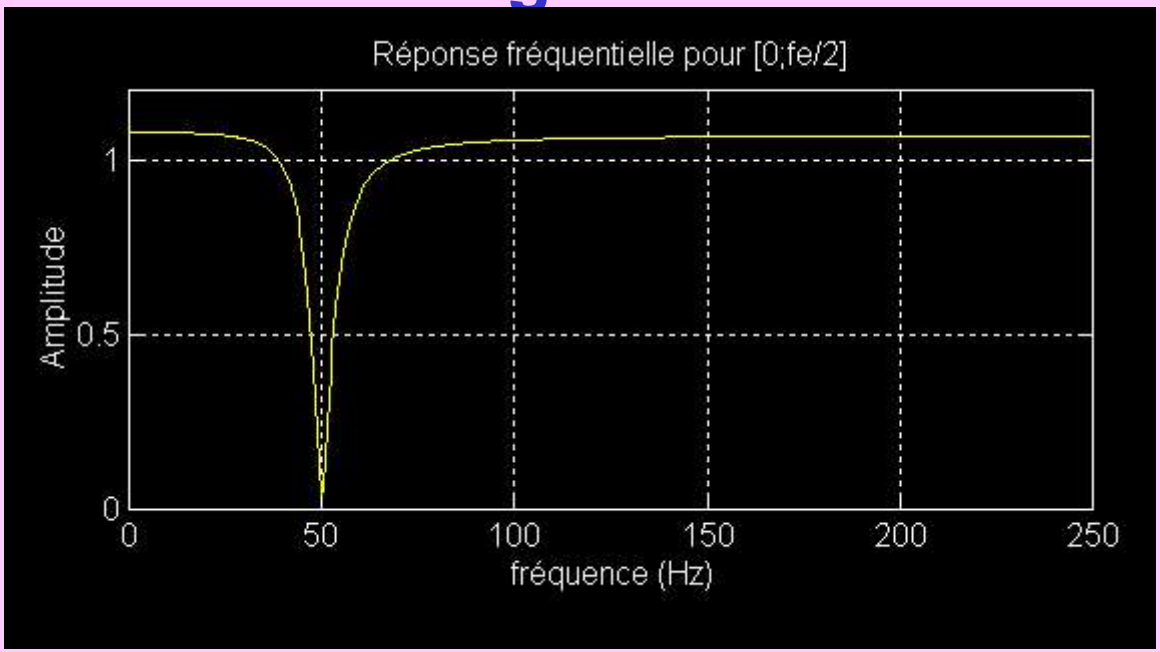
deux zéros à 50 et -50 Hz

Rayon des pôles :

$$r \approx 1 - \left(\frac{l\arg eur}{F_e} \right) \pi = 1 - \left(\frac{10}{500} \right) \pi = 0{,}937$$

4) Synthèse par la méthode des pôles et zéros : Corrigé



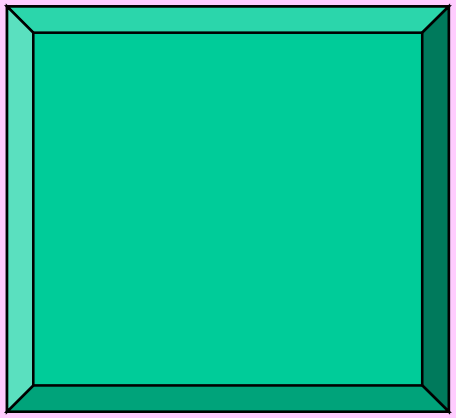


$$H(z) = \frac{\left(z - e^{-j36°}\right)\left(z - e^{+j36°}\right)}{\left(z - 0{,}937e^{-j39{,}6°}\right)\left(z - 0{,}937e^{+j39{,}6°}\right)}$$

$$H(z) = \frac{z^2 - 1{,}6180z + 1}{z^2 - 1.5161z + 0{,}87}$$

num=[1 -1.618 1] den=[1 -1.5161 .87]

4) Synthèse par la méthode des pôles et des zéros



Simulation,
Cliquez SVP

http://www.eaeeie.org/

theiere_signal/fr/applet/partie2/call_applet.html

5) Synthèse par transformation bilinéaire

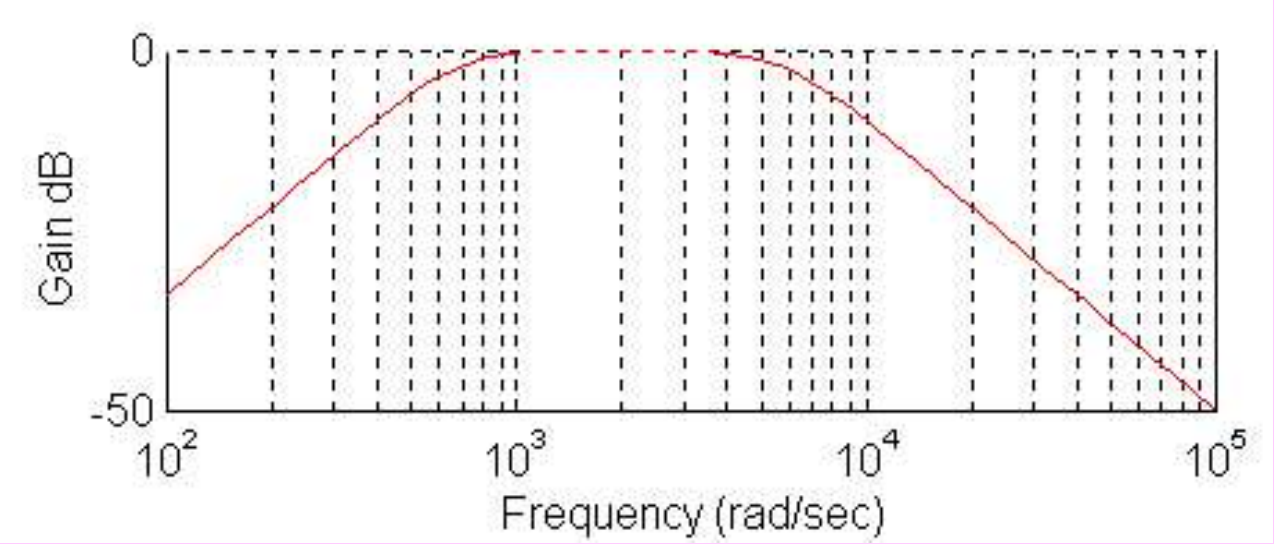
- ***Principe***

On dispose d'un filtre continu ayant un gabarit fréquentiel répondant au cahier des charges demandés (synthèse de filtres analogiques de type butterworth, Cauer, ... : cf. cours d'électronique).

Objectif : Trouver le filtre numérique récursif ayant une réponse fréquentielle équivalente à celle du filtre analogique.

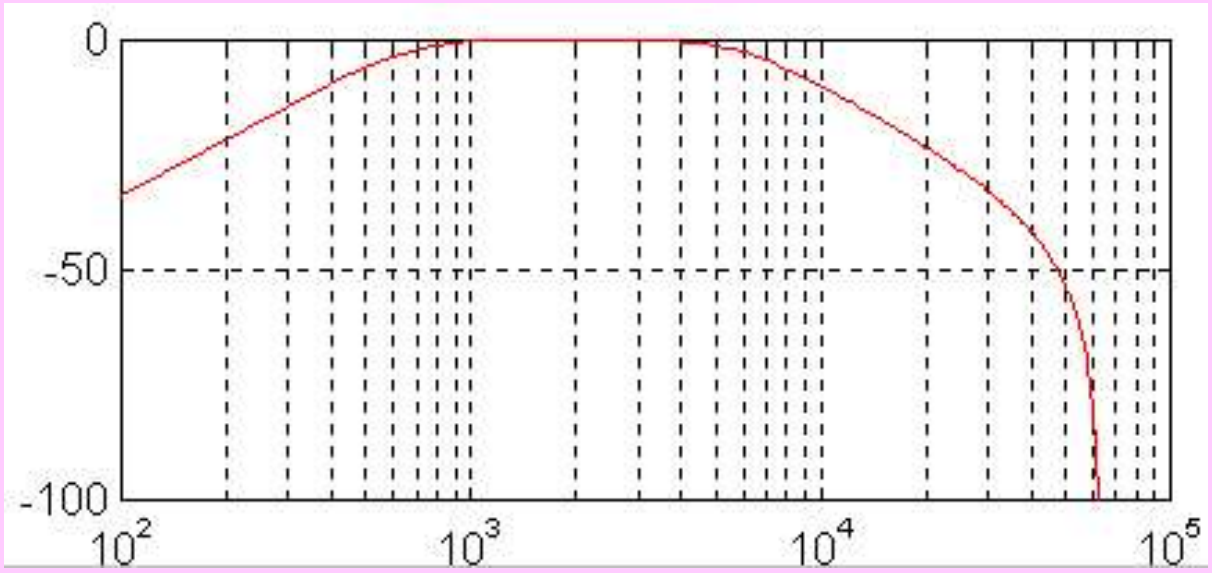
Remarque : la coïncidence des réponses est limitée au mieux à la zone utile du filtre numérique soit pour des fréquences comprises entre 0 et fe/2. En pratique, les réponses fréquentielles ne pourront être proches que pour une fraction du domaine utile (autour d'une pulsation de référence)

5: Transf. Bilinéaire : Comparaison des réponses fréquentielles analogique vs. numérique



Pulsation analogique ω_a

Pulsation (rad/sec)



Pulsation numérique ω_N

5) Transformation bilinéaire : Utilisation pratique de la méthode

On note

- ω_A : pulsation dans le domaine analogique

  ω_N : pulsation dans le domaine numérique

  ω_e : pulsation d'échantillonnage $\omega_e = 2\pi f_e$

1. Faire la synthèse du filtre analogique de référence H(p)

2. Définir une pulsation de référence ω_r pour laquelle on veut faire coïncider les réponses fréquentielles des filtres analogique et numérique
   - pour filtres passe-bas et passe-haut, $\omega_r = \omega_c$
   - pour filtres passe-bande et coupe-bande, ω_r = pulsation au centre de la bande passante ou de la bande atténuée,

3. Calculer la fonction de transfert de Laplace analogique en fonction de la variable normalisée p_n en utilisant la relation : $p = p_n \omega_r$

5) Transformation bilinéaire : Utilisation pratique de la méthode

4. Définir une pulsation où l'on voudra identité des réponses fréquentielles des filtres analogique et numérique donc $\omega_A = \omega_N$.
   Rq : le plus souvent on choisira cette pulsation = ω_r,

5. Déterminer le facteur d'échelle k :

$$k = \frac{\omega_A}{\omega_r \tan\left(\pi \frac{\omega_N}{\omega_e}\right)}$$

Pour nous

$$k = \frac{1}{\tan\left(\pi \frac{\omega_r}{\omega_e}\right)}$$

6. Calculer la fonction de transfert en z après avoir effectué le changement de variable :

$$p_n = k \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

7. Etudier le filtre numérique obtenu afin de vérifier les spécifications demandée (Effectuer son analyse).

5) Transformation bilinéaire : Exemple : synthèse d'un filtre passe-bande

Synthétiser un filtre numérique réjecteur de bande du second ordre ayant les caractéristiques suivantes :

- fréquence d'échantillonnage f_e = 500 Hz,
- réjecteur de bande (ω_{c1}=310 rd/s, ω_{c2}= 320 rd/s

  ou f_{c1}=49,33 Hz, f_{c2}= 50,93 Hz)
- largeur à rejeter : f_{0N} = 50 Hz,
- gain unitaire dans la bande passante,
- fonction de transfert du filtre analogique de référence :

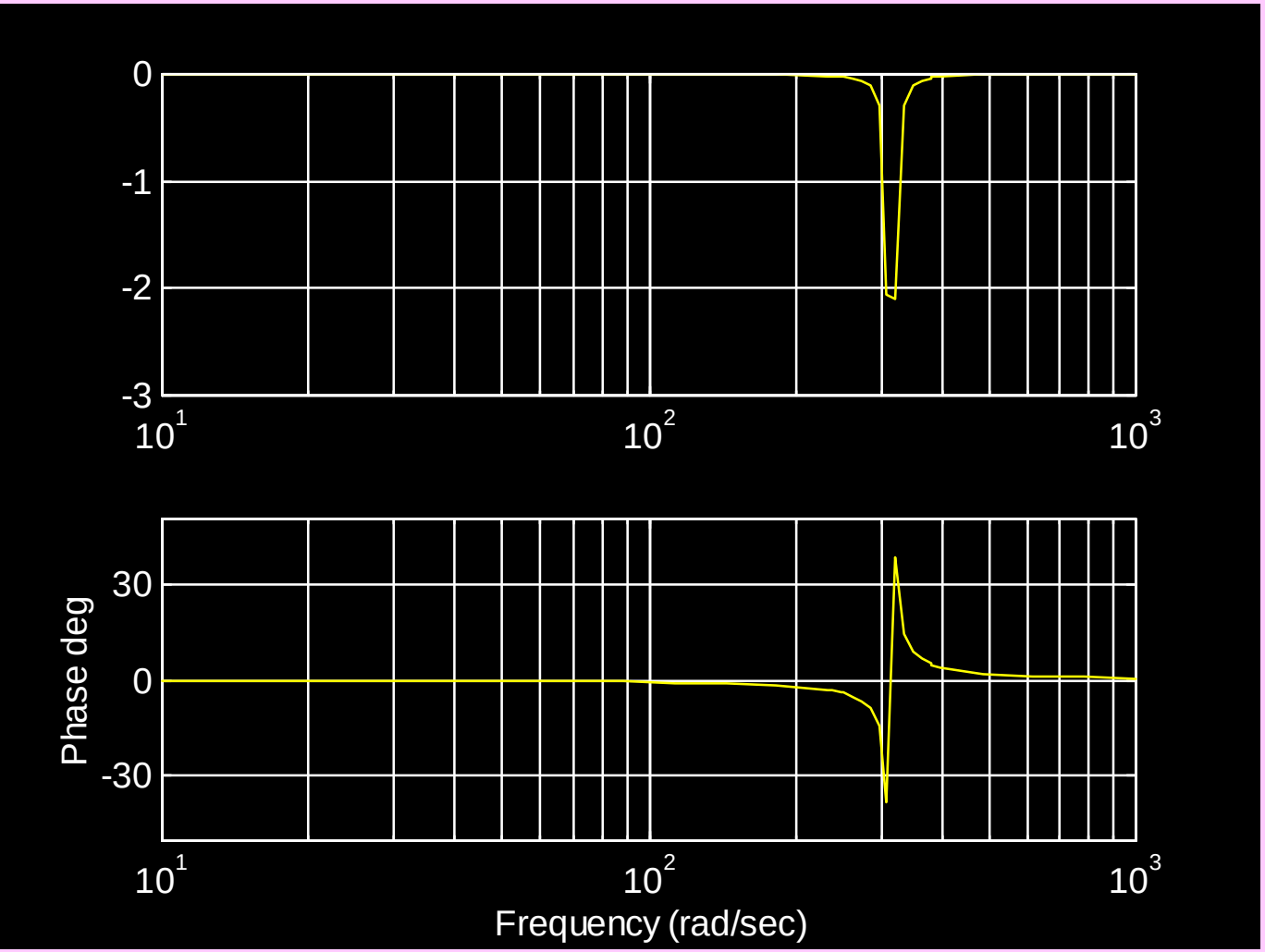
$$H(p) = \frac{p^2 + 99200}{p^2 + 10p + 99200}$$

Commandes Matlab permettant d'obtenir ce filtre :
ATT. Filtre analogique !
Pulsations en rd/s

```
[numa,dena]=butter(1,[310 320],'stop','s')
bode(numa,dena)
```

5) Transformation bilinéaire : Correction

Filtre analogique de référence



Pulsation de coupure :
314 rad/sec.

5) Transformation bilinéaire : Correction

- Choix de la pulsation de référence $\omega_r = 2\pi.50$

- Variable de Laplace normalisée : $p_n = \frac{p}{\omega_r} = \frac{p}{2\pi.50}$

- Fonction de transfert en Laplace normalisée :

$$H(p_n) = \frac{(2\pi 50\, p_n)^2 + 99200}{(2\pi 50\, p_n)^2 + 20\pi 50\, p_n + 99200} = \frac{{p_n}^2 + 1{,}00613}{{p_n}^2 + 0{,}0318\, p_n + 1{,}00613}$$

- Facteur d'échelle k : $k = \frac{1}{\tan\left(\pi \frac{\omega_r}{\omega_e}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\pi \frac{2\pi.50}{2\pi.500}\right)} = 3{,}078$

5) Transformation bilinéaire : Correction

- Fonction de transfert normalisée $H(p_n) = \dfrac{p_n^{\,2} + 1{,}00613}{p_n^{\,2} + 0{,}0318\,p_n + 1{,}00613}$

- Fonction de transfert en Z avec : $p_n = k\dfrac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$

$$H(z) = \frac{\left(k\dfrac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)^2 + 1{,}00613}{\left(k\dfrac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)^2 + 0{,}0318\left(k\dfrac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right) + 1{,}00613}$$

$$H(z) = \frac{k^2\left(1 - z^{-1}\right)^2 + 1{,}00613\left(1 + z^{-1}\right)^2}{k^2\left(1 - z^{-1}\right)^2 + 0{,}0318k\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 + z^{-1}\right) + 1{,}00613\left(1 + z^{-1}\right)^2}$$

5) Transformation bilinéaire : Correction

$$H(z)=\frac{k^2\left(1+z^{-2}-2z^{-1}\right)+1{,}00613\left(1+z^{-2}+2z^{-1}\right)}{k^2\left(1+z^{-2}-2z^{-1}\right)+0{,}0318k\left(1-z^{-2}\right)+1{,}00613\left(1+z^{-2}+2z^{-1}\right)}$$

$$H(z)=\frac{\left(k^2+1{,}00613\right)+\left(-2k^2+2*1{,}00613\right)z^{-1}+\left(k^2+1{,}00613\right)z^{-2}}{\left(k^2+0{,}0318k+1{,}00613\right)+\left(-2k^2+2*1{,}00613\right)z^{-1}+\left(k^2-0{,}0318k+1{,}00613\right)z^{-2}}$$

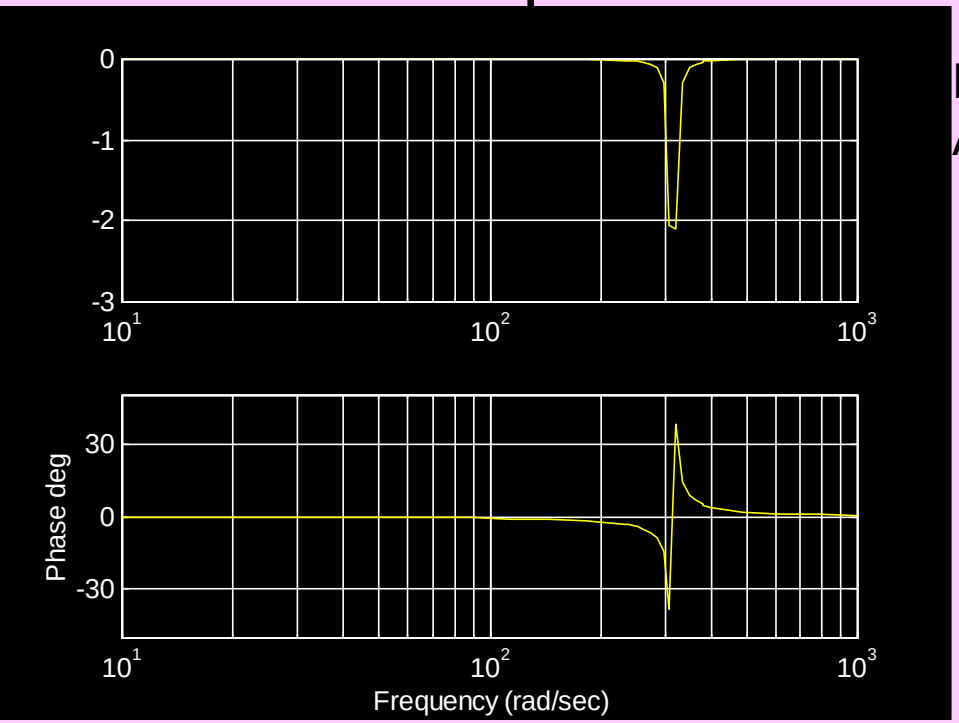
$$H(z)=\frac{10{,}48-16{,}936z^{-1}+10{,}48z^{-2}}{10{,}578-16{,}936z^{-1}+10{,}382z^{-2}}$$

$$H(z)=\frac{0{,}9907-1{,}6013z^{-1}+0{,}9907z^{-2}}{1-1{,}6013z^{-1}+0{,}9815z^{-2}}$$

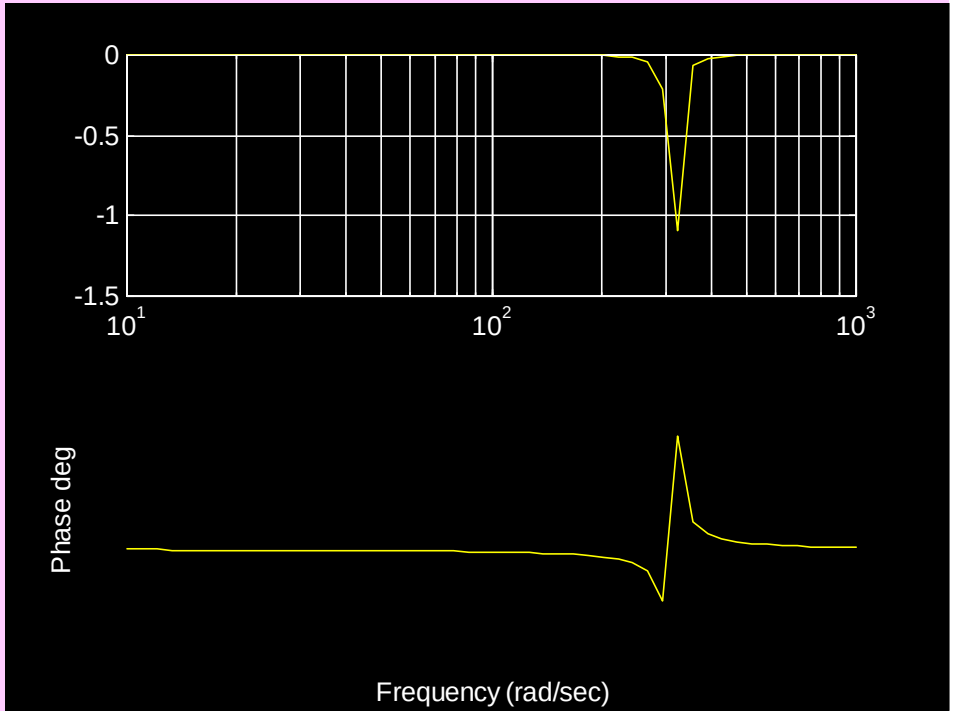
```
[num,den]=bilinear([1 0  99200],[1  10  99200],500,50)
dbode(num,den,1/500)
```

5) Transformation bilinéaire : Correction

Comparaison des réponses fréquentielles



Rappel du filtre
Analogique de référence

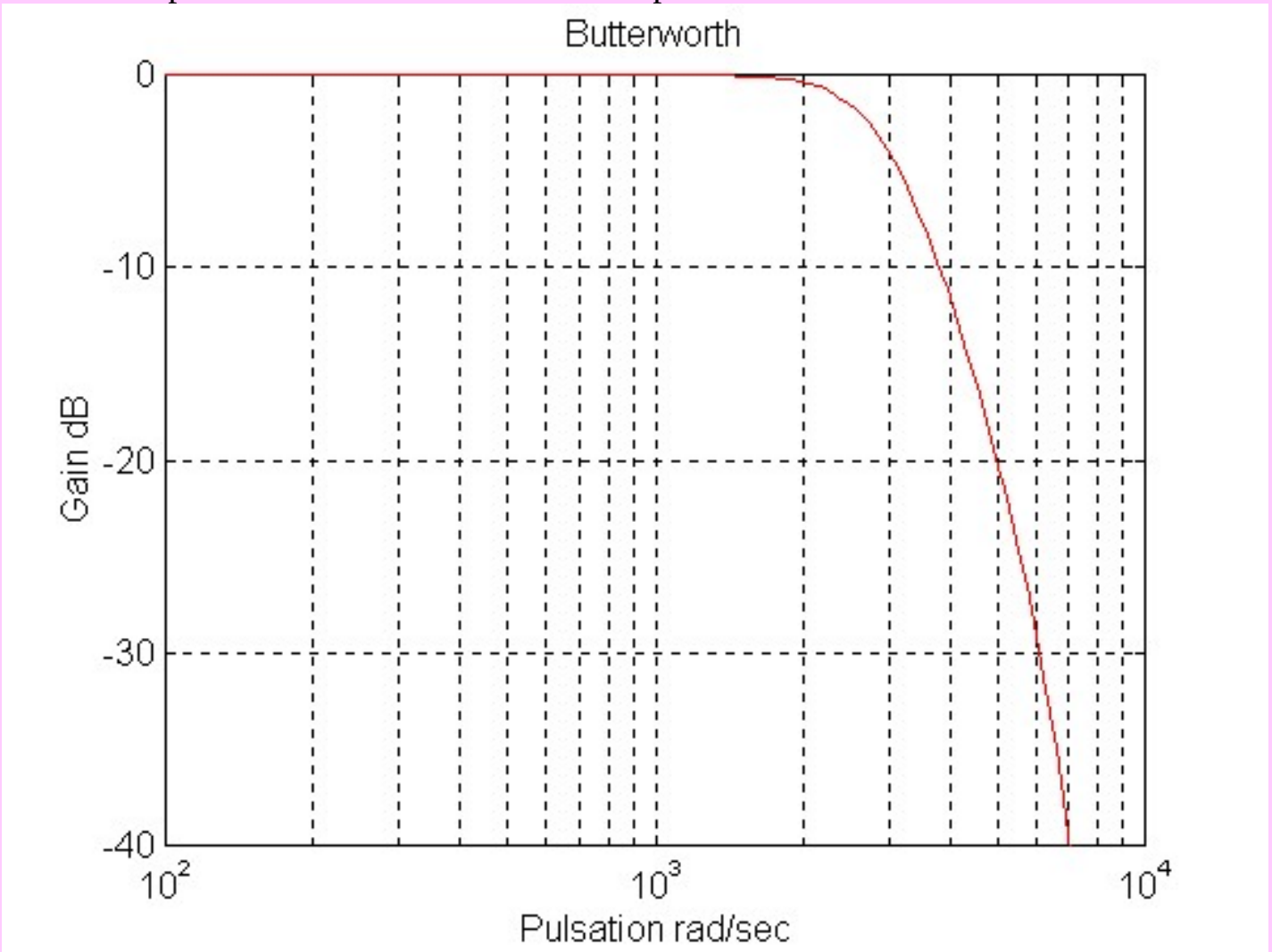


Filtre
Numérique obtenu

5) Méthodes de synthèse de filtre analogique (à coupler avec la transformation bilinéaire pour concevoir un filtre numérique récursif)

Filtres de Butterworth

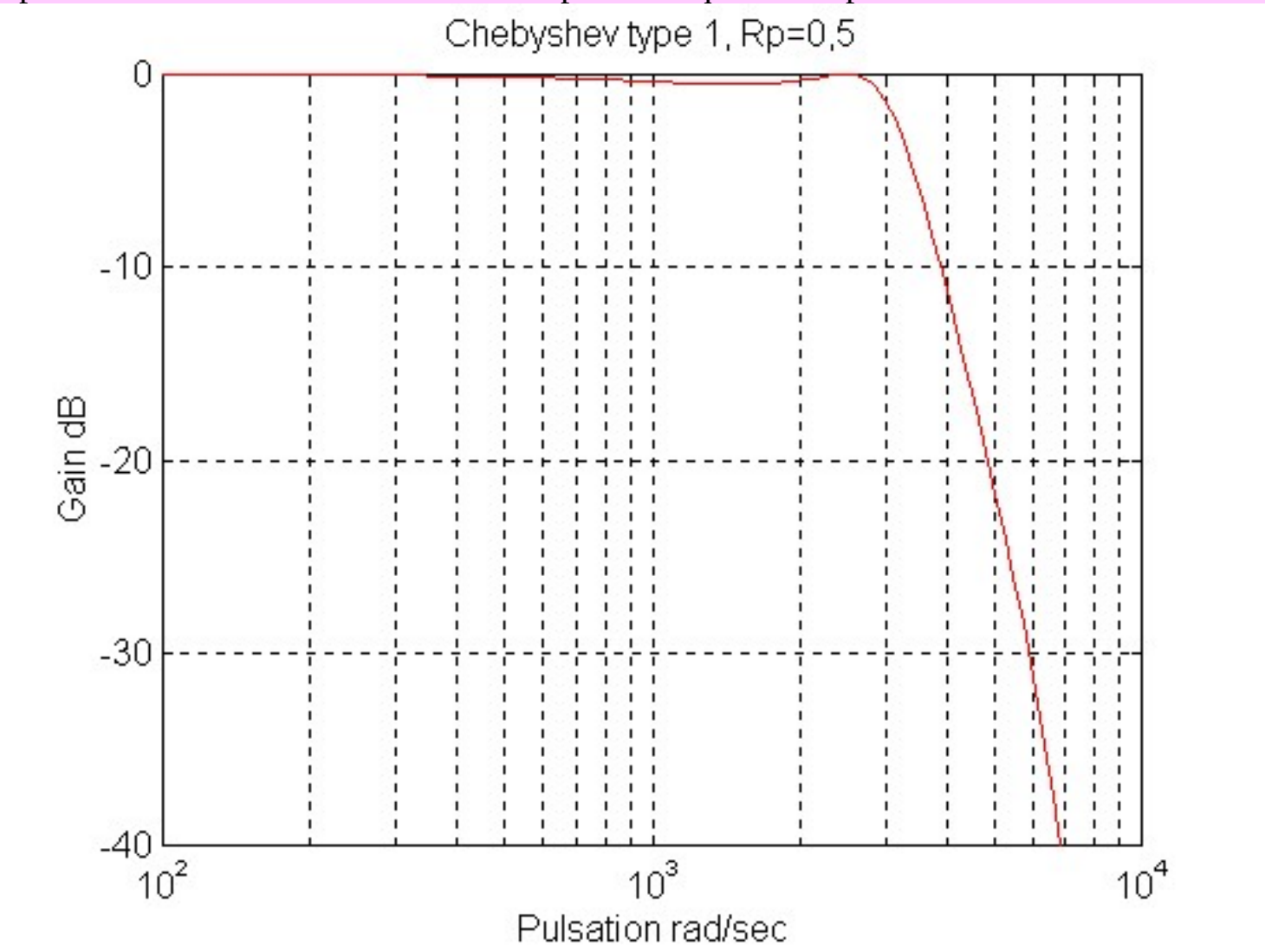
Ces filtres sont aussi qualifiés de *maximalement plats* (maximally flat) car leur réponse fréquentielle est plate au maximum dans la bande passante :



5) Chebychev type 1

Filtres de Chebychev type I

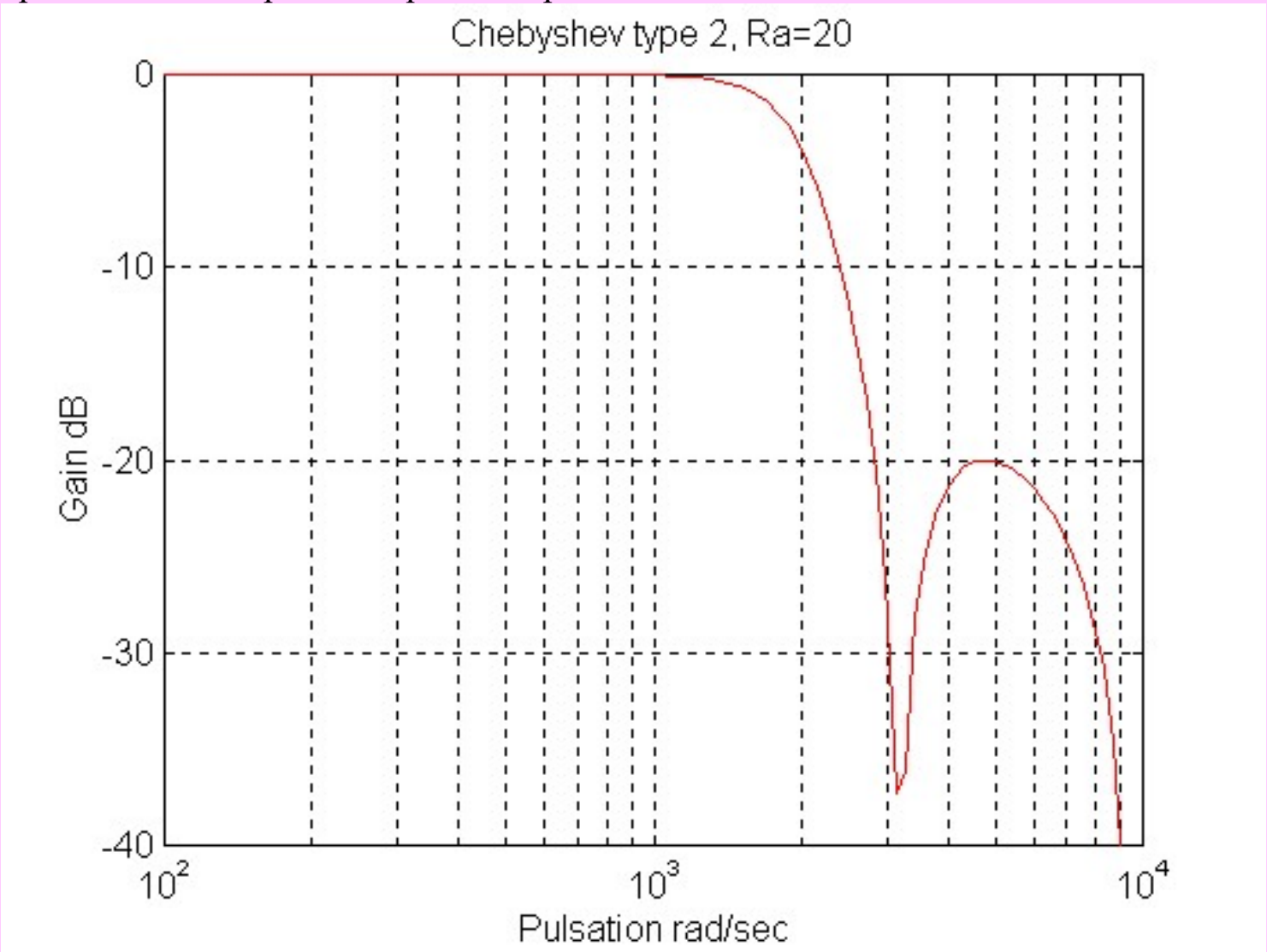
Ces filtres présentent la caractéristique d'avoir une erreur équirépartie (equal ripple) dans la bande passante et la bande atténuée a une réponse fréquentielle plate.



5) Chebychev type 2 (ou inverse)

Filtres de Chebychev type II (ou inverses)

Ces filtres présentent la caractéristique d'avoir une erreur équirépartie dans la bande atténuée et la bande passante a une réponse fréquentielle plate.



5) Cauer (filtres elliptiques)

Filtres elliptiques (ou de Cauer)

La réponse fréquentielle a des ondulations à la fois dans la bande passante et dans la bande atténuée.

