Chapitre 6

Analyse des filtres RII ou récursifs

Définition

- ***Equation de récurrence***

$$s_k = \sum_{i=0}^{p} b_i e_{k-i} - \sum_{j=1}^{q} a_j s_{k-j}$$

$$s_k = b_0 e_k + b_1 e_{k-1} + \ldots + b_p e_{k-p} - a_1 s_{k-1} - a_2 s_{k-2} - \ldots - a_q s_{k-q}$$

Fonction de transfert

- **Eq. de récurrence** $s_k = \sum_{i=0}^{p} b_i e_{k-i} - \sum_{j=1}^{q} a_j s_{k-j}$

- **Transf. en Z**
$$S(z) = \left(\sum_{i=0}^{p} b_i z^{-i} \right) E(z) - \left(\sum_{j=1}^{q} a_j z^{-j} \right) S(z)$$

- **Fonc. de transfert**
$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{p} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^{q} a_j z^{-j}}$$

q : **ordre** du filtre

si le numérateur = b_0 : filtre purement récursif

Présence de pôles => vérifier la stabilité $|p_i| < 1$

Filtres récursifs ?

- Possibilité d'obtenir une bande de transition étroite pour un ordre raisonnable
- Risques d'instabilité dus à une grande sensibilité numérique des coefficients (en effet, les pôles de la fonction de transfert devront effleurer le cercle unité sans le toucher => limite d'instabilité)
- Variation de phase non linéaire

Filtres purement récursifs du 1er de 2nd ordre

- ***Filtres purement récursifs du 1er ordre***

$$s_k = b_0 e_k - a_1 s_{k-1}$$

$$S(z) = b_0 E(z) - a_1 S(z) z^{-1}$$

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1}} = \frac{b_0 z}{z + a_1}$$

Réponse impulsionnelle d'un filtre purement récursif du 1er ordre

$$\delta(k) = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \neq 0 \\ 1 & \text{pour } k = 0 \end{cases}$$

$$h_0 = b_0$$

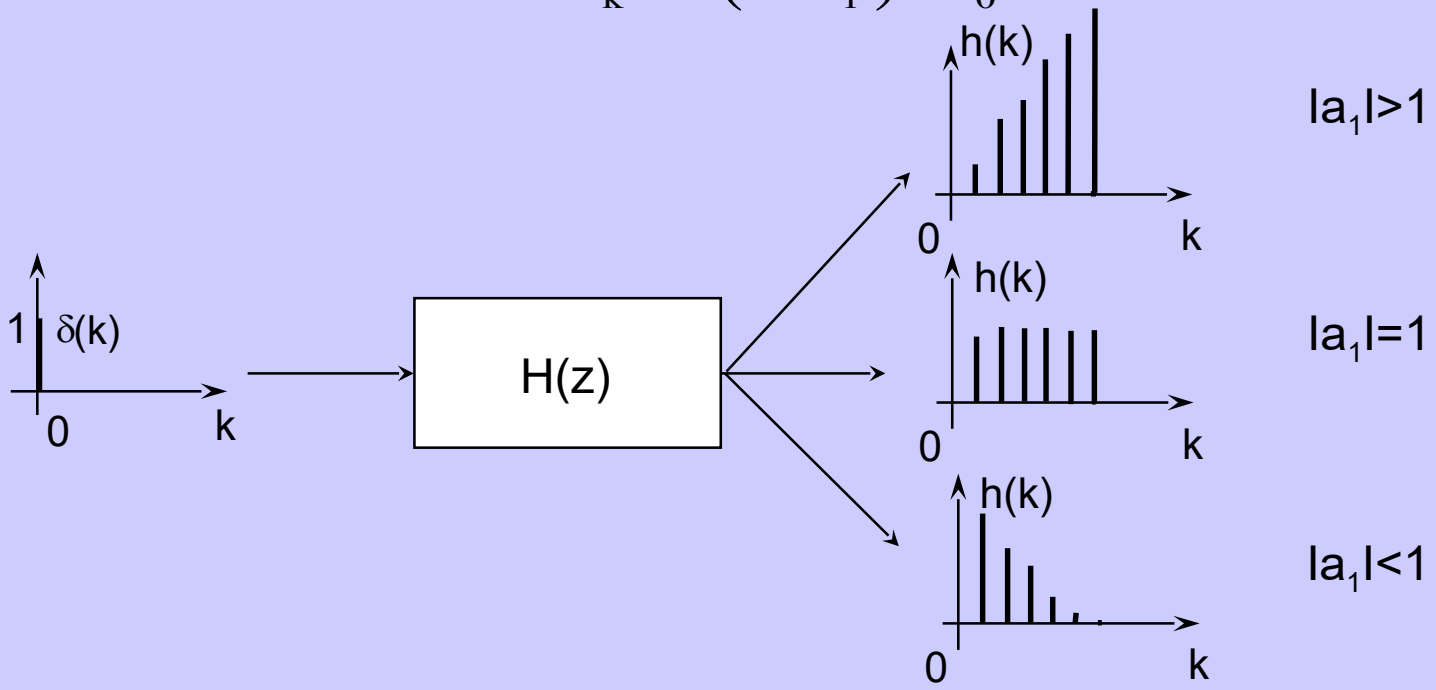
$$h_1 = b_0 . 0 - a_1 h_0 = -a_1 b_0$$

$$h_2 = a_1^2 b_0$$

$$\vdots$$

$$h_k = (-a_1)^k b_0$$

$$h_k = b_0 \delta_k - a_1 h_{k-1}$$



$|a_1|>1$

$|a_1|=1$

$|a_1|<1$

Réponse indicielle d'un filtre purement récursif du 1er ordre

$$\Gamma(k) = \begin{cases} 0 & \text{pour } k < 0 \\ 1 & \text{pour } k \geq 0 \end{cases}$$

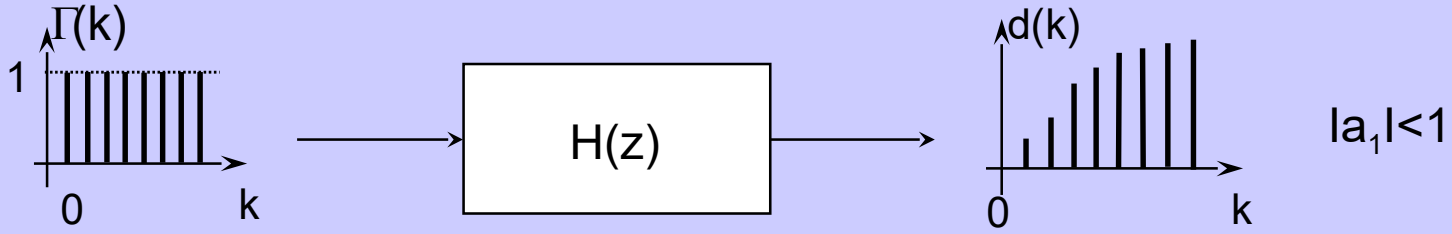
$$d_0 = b_0$$

$$d_1 = b_0 - a_1 b_0 = b_0(1 - a_1)$$

$$\vdots$$

$$\boxed{d_k = b_0 \Gamma_k - a_1 d_{k-1}}$$

$$d_k = b_0 \sum_{i=0}^{k} (-1)^i a_1^i$$



$|a_1|<1$

Réponse fréquentielle

- ***Fonction de transfert*** $$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1}}$$

- ***Réponse fréquentielle*** $$z = e^{j2\pi f T_e}$$

$a_1 = -0.5$

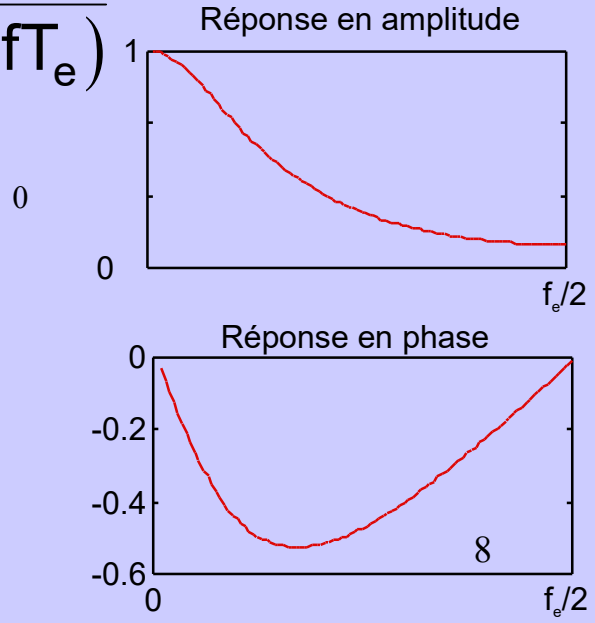
$$H(f) = \frac{b_0}{1 + a_1 e^{-j2\pi f T_e}} = \frac{b_0}{1 + a_1 \cos(2\pi f T_e) - j a_1 \sin(2\pi f T_e)}$$

Tracé de IH(f)I et Arg(H(f))

réponse périodique de période f_e

zone utile du filtre : [0, f_e/2]

- ***Ex FN4***



Filtre purement récursif du second ordre

$$s_k = b_0 e_k - a_1 s_{k-1} - a_2 s_{k-2}$$

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{b_0 z^2}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

Analyse des filtres récursifs d'ordre quelconque

- Filtre récursif d'ordre quelconque = mise en cascade de :
  - Un filtre non récursif d'ordre quelconque
  - Un ou plusieurs filtres purement récursifs du premier ordre avec des pôles réels
  - Un ou plusieurs filtres purement récursifs du second ordre avec des pôles complexes conjugués

Test des réponses en fonction de la valeur du pôle a

Cd \
envmat
num=1
den=