Chapitre 5

Synthèse (ou construction, ou conception) de filtres RIF ou non récursifs

Généralités

- ***Synthèse (ou construction) de filtres :***

déterminer en fonction de la réponse fréquentielle que l'on veut obtenir la structure d'un filtre (RIF ou RII, détermination des coefficients du filtre).

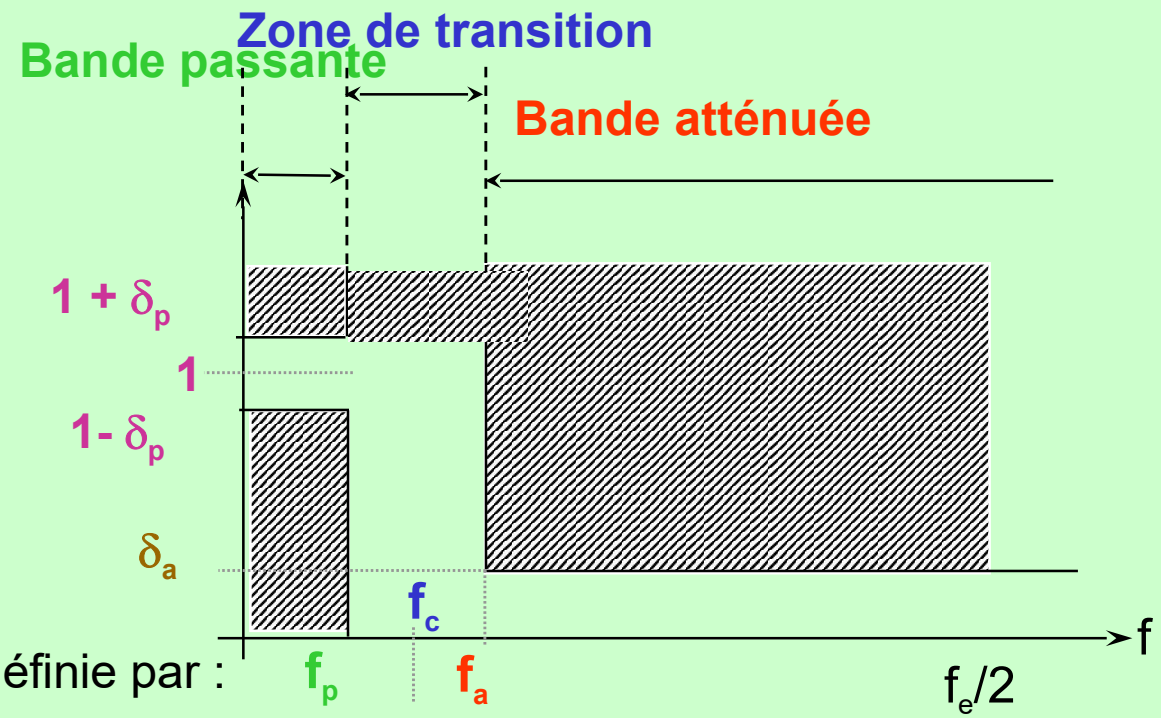
Réponse fréquentielle utile : intervalle ***[0, f_e/2]***

- ***Principe*** **:**

Il faut définir le cahier des charges du filtre et donc préciser :

- la (ou les) fréquence (s) de coupure f_c désirée (s),
- les valeurs limites de la bande passante f_p et/ou atténuée f_a,
- les valeurs permises des ondulations en bande passante A_p et atténuée A_a,
- la largeur de la zone de transition Δf permise,
- la fréquence d'échantillonnage f_e,
- éventuellement l'ordre maximal permis.

Exemple de synthèse : filtre passe-bas (1)



La réponse fréquentielle est définie par :

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } |f| < f_p \\ 0 & \text{si } |f| > f_a \end{cases}$$

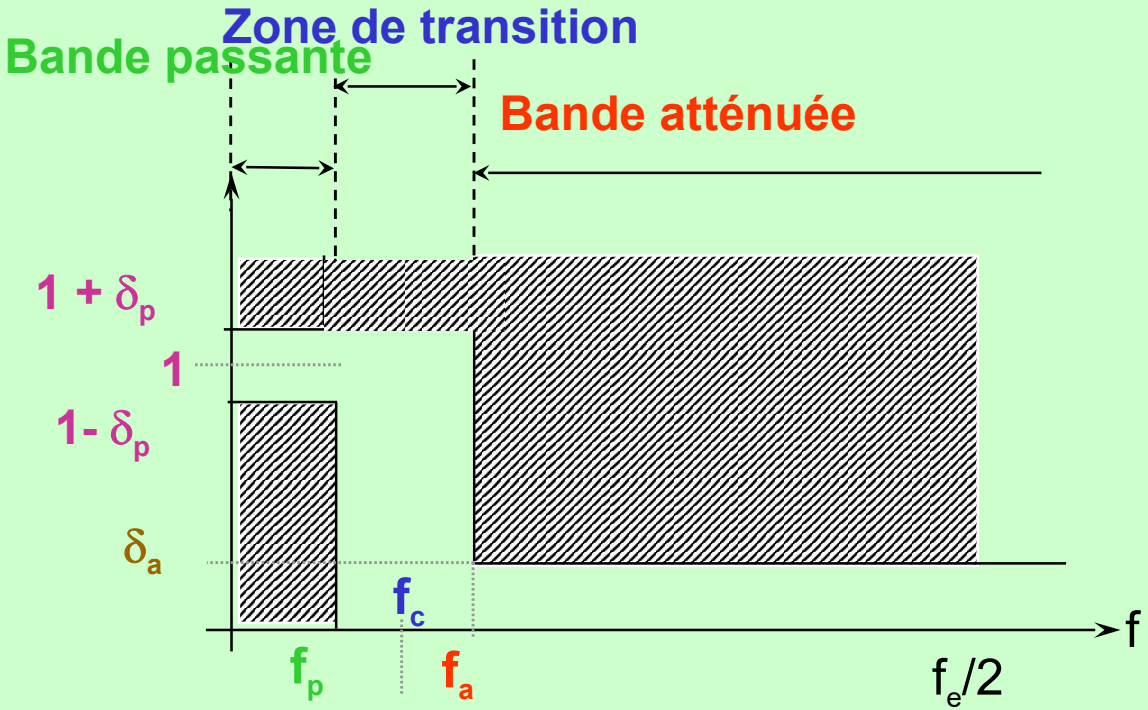
avec $f_c = 0.5(f_p + f_a)$

Plus f_p et f_a sont proches,

plus l'ordre du filtre devra être élevé.

Pour un filtre idéal, $f_p = f_a = f_c$

Exemple de synthèse : filtre passe-bas (2)



On spécifie le ***gabarit du filtre*** en donnant :

- l'ondulation en bande passante en décibels: $A_p\,(dB)$,

$$A_p(dB) = 20\log(1+\delta_p) \quad \text{d'où} \quad \delta_p = 10^{0.05A_p} - 1$$

- l'ondulation en bande atténuée en décibels : $A_a\,(dB)$,

$$A_a(dB) = -20\log\delta_a \quad \text{d'où} \quad \delta_a = 10^{-0.05A_a}$$

- les fréquences f_p et f_a

Synthèse de filtres RIF :
1. Identification à une structure connue

- ***Principe***

Faire des modifications à partir d'un filtre dont on connaît les caractéristiques => nécessite d'avoir a priori une certaine "culture" dans le domaine du filtrage

Synthèse de filtres RIF : 2. Méthode de la fenêtre

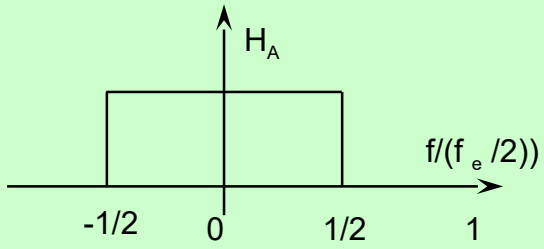
- ***Principe***

1. On choisit une réponse fréquentielle d'un filtre analogique idéal $H_A(f)$ de type fenêtre rectangulaire
2. On détermine par utilisation de la transformée de Fourier inverse, la réponse impulsionnelle $h(t)=\mathcal{F}^{-1}(H_A(f))$
3. On échantillonne cette réponse impulsionnelle h(k) et on multiplie par T_e
4. On tronque cette réponse impulsionnelle
5. On retarde cette réponse pour la rendre causale
6. Les valeurs successives de la réponse impulsionnelle sont les coefficients du filtre recherché b(k)=h(k)

Exemple : synthèse d'un filtre passe-bas $f_c=f_e/4$

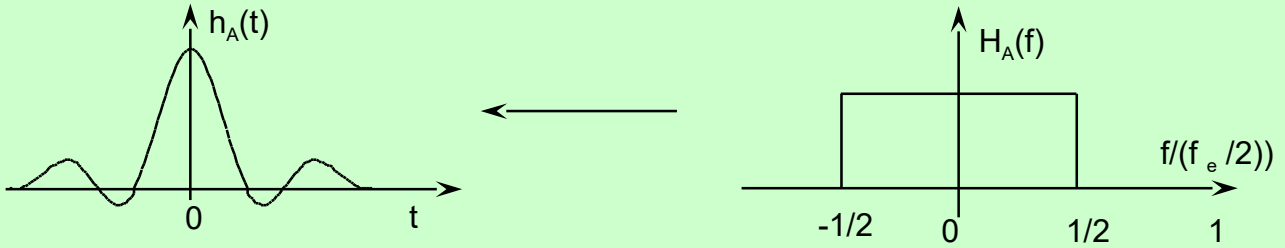
1. Choix de la réponse fréquentielle

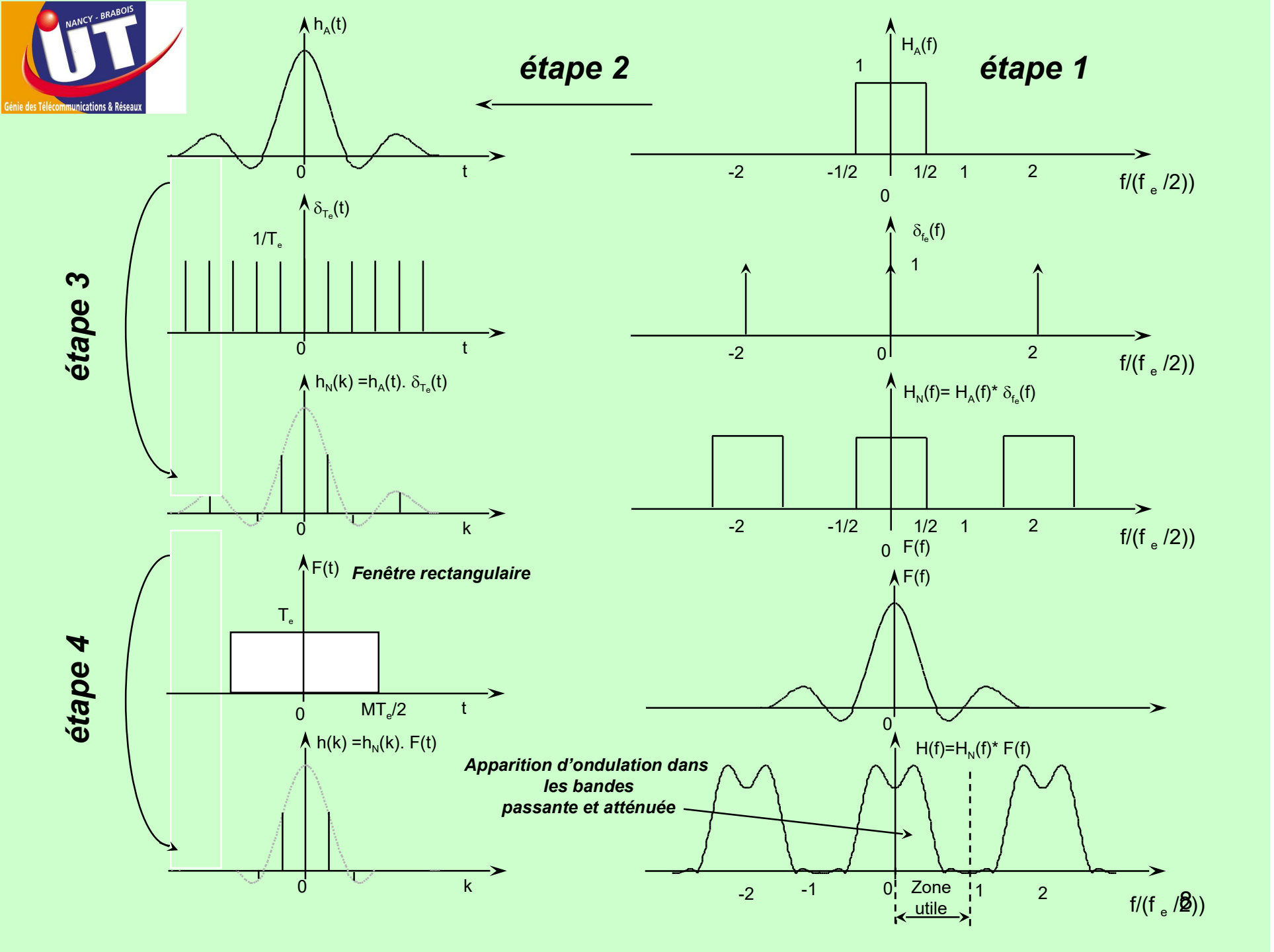
$$H_A(f)=\begin{cases}1 & \text{si } |f|<\dfrac{f_e}{4}\\ 0 & \text{si } |f|>\dfrac{f_e}{4}\end{cases}$$



2. Transformée de Fourier inverse

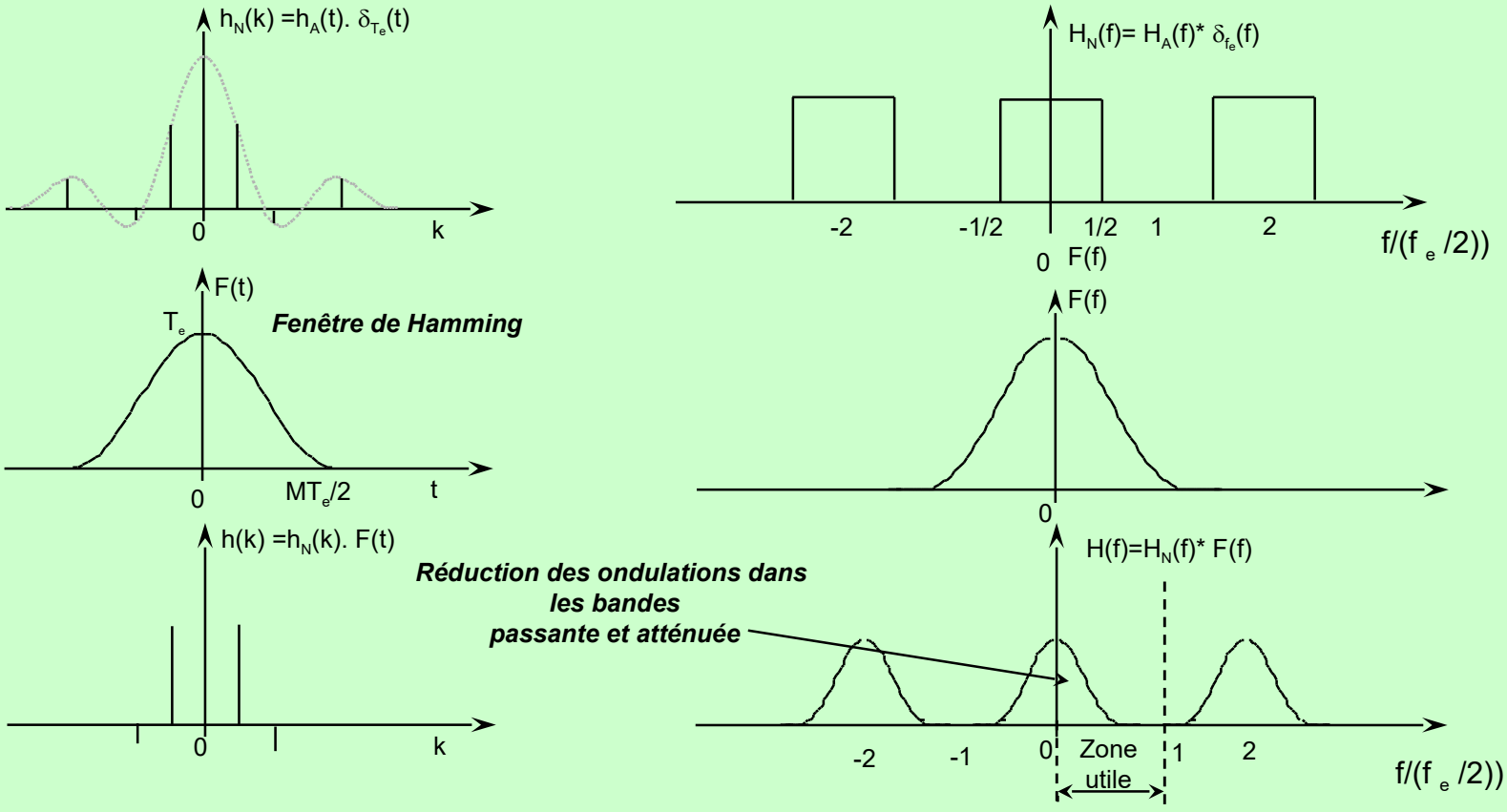
$$h_A(t)=\mathbb{F}^{-1}(H_A(f))=\int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} H_A(f)\,e^{j2\pi ft}df=\int_{-f_c}^{f_c} 1.\,e^{j2\pi ft}df=\frac{\sin(2\pi f_c t)}{\pi t}=2f_c\,\mathrm{sinc}(2\pi f_c t)$$




étape 1
étape 2
étape 3
étape 4
$h_A(t)$
$H_A(f)$
$\delta_{T_e}(t)$
$1/T_e$
$\delta_{f_e}(f)$
$h_N(k) = h_A(t).\ \delta_{T_e}(t)$
$H_N(f) = H_A(f) * \delta_{f_e}(f)$
F(t)
Fenêtre rectangulaire
T_e
$MT_e/2$
F(f)
$h(k) = h_N(k).\ F(t)$
$H(f) = H_N(f) * F(f)$
Apparition d'ondulation dans les bandes passante et atténuée
Zone utile
f/(f e /2))
t
k
0
1
-2
-1/2
1/2
-1
2

Réduction des ondulations- Fenêtrage

Pour diminuer les ondulations en bandes passante et atténuée, on peut choisir une autre fenêtre (Hanning, Hamming, ...) (cf analyse spectrale et TFD)



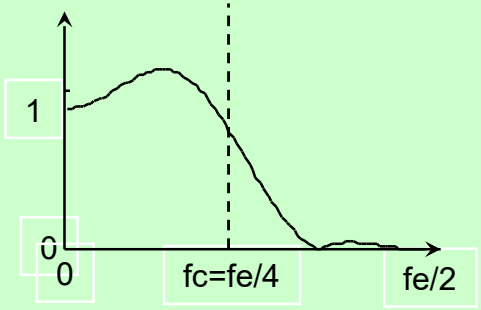
Exemple de synthèse sous Matlab : *fir1*

ordre M=8

Fenêtre **rectangulaire**

num=fir1(8,0.5,boxcar((9))

h(4) = h(-4) = 0.0000
h(3) = h(-3) = -0.1148
h(2) = h(-2) = 0.0000
h(1) = h(-1) = 0.3443
h(0) = 0.5409

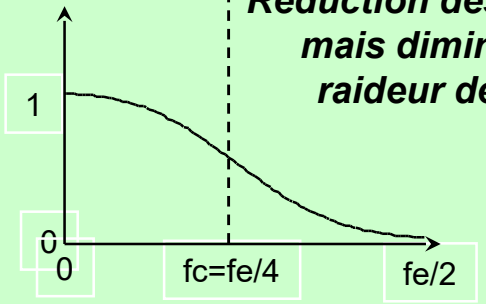


ordre M=8

Fenêtre de **hamming**

num=fir1(8,0.5,hamming((9))

h(4) = h(-4) = 0.0000
h(3) = h(-3) = -0.0227
h(2) = h(-2) = 0.0000
h(1) = h(-1) = 0.2740
h(0) = 0.4974



Réduction des ondulations mais diminution de la raideur de coupure

Méthode pratique : utilisation pratique de la méthode

Etape préliminaire : Spécifier la réponse fréquentielle désirée du filtre $H_N(f)$.

Normaliser toutes les fréquences caractéristiques du filtre :

Dans notre cas, on normalisera par rapport à la demi-fréquence d'échantillonnage pour être compatible avec les procédures de la boîte à outil "Signal processing" de Matlab.

Utilisation pratique de la méthode

1ère étape: Spécifier la réponse fréquentielle désirée du filtre $H_N(f)$.

Il faudra faire attention aux fréquences de coupure à prendre en compte. Afin d'avoir de bons résultats lors de la synthèse, ce ne sont pas les fréquences de coupure du filtre idéal qu'il faut utiliser mais il faut déplacer celles-ci afin de les centrer dans la zone de transition :

- pour un ***passe-bas***, augmenter f_c de la demi-zone de transition,

- pour un ***passe-haut***, diminuer f_c de la demi-zone de transition,

- pour un ***passe-bande***, diminuer la première f_c de la demi-zone de transition et augmenter la seconde de la demi zone de transition,

- pour un ***réjecteur de bande***, faire l'inverse.

Utilisation pratique de la méthode

2ème étape : Obtenir la réponse impulsionnelle idéale $h_N(k)$ du filtre numérique désiré par transformée de Fourier inverse, les échantillons de la réponse impulsionnelle étant en fait les coefficients du filtre.

Type de filtre	$h_N(k), k \neq 0$	$h_N(0)$
Passe-bas	$f_c \frac{\sin(k\pi f_c)}{k\pi f_c}$	f_c
Passe-haut	$-f_c \frac{\sin(k\pi f_c)}{k\pi f_c}$	$1 - f_c$
Passe-bande	$f_2 \frac{\sin(k\pi f_2)}{k\pi f_2} - f_1 \frac{\sin(k\pi f_1)}{k\pi f_1}$	$f_2 - f_1$
Réjecteur de bande	$f_1 \frac{\sin(k\pi f_1)}{k\pi f_1} - f_2 \frac{\sin(k\pi f_2)}{k\pi f_2}$	$1 - (f_2 - f_1)$

N.B. : Afin de simplifier la synthèse, il est conseillé de choisir un nombre de coefficients ***impair****, autrement dit un ordre* ***pair***

N.B. 2 : Les fréquences sont normalisées par rapport à $f_e/2$

(comme dans Matlab).

Utilisation pratique de la méthode

3ème étape : Sélectionner une fenêtre qui satisfait les spécifications requises pour déterminer le nombre de coefficients du filtre en fonction de la largeur de la transition souhaitée.

Type de fenêtre	Δf, largeur de transition (en fréquence réduite)	Ondulation en bande passante A_p (dB)	Atténuation du 1er lobe secondaire (dB)	Atténuation en bande atténuée A_a (dB)
Rectangulaire	1.8/N	0.7416	13	21
Hanning	6.2/N	0.0546	31	44
Hamming	6.6/N	0.0194	41	53
Blackman	11/N	0.0017	57	74
Kaiser	5.86/N (β=4.54)	0.0274		50
	8.64/N (β=6.76)	0.00275		70
	11.42/N (β=8.96)	0.000275		90

N.B. 1 : les fréquences sont normalisées par rapport à $f_e/2$ (comme dans Matlab).

N.B. 2 : N = M + 1 : nombre de coefficients.

Utilisation pratique de la méthode

4ème étape : Obtenir les valeurs de f_k pour la fenêtre choisie et les valeurs vraies des coefficients h_k comme étant le résultat du produit :

$$h(k) = h_N(k)\, f(k)$$

N.B. h_k sera calculée pour chaque valeur de k variant entre $-\frac{N-1}{2}$ et $\frac{N-1}{2}$

Exemple

Obtenir les coefficients d'un filtre RIF passe-haut respectant :

Fréquence de coupure : f_c=4 kHz

Largeur de transition : Δf=1 kHz

Atténuation en bande atténuée : A_a> 40 dB

Fréquence d'échantillonnage : f_e=20 kHz

Solution de l'exemple

- ***Etape préliminaire : fréquences normalisées***

Fréquence d'échantillonnage : f_e=20 kHz donc la fréquence de Nyquist est égale à 20 kHz/2=10kHz

Fréquence de coupure : f_c=4 kHz/10kHz = 0.4

Largeur de transition : Δf=1 kHz/10kHz=0.1

Atténuation en bande atténuée : A_a> 40 dB

- ***1ère étape***: Spécifier la réponse fréquentielle désirée du filtre $H_N(f)$.

- pour un ***passe-haut***, diminuer f_c de la demi-zone de transition,

donc f_c pour la synthèse sera en fait égale à 0,4-(0,1)/2=0,35

- ***2ème étape*** : Obtenir la réponse impulsionnelle idéale $h_N(k)$ du filtre numérique désiré

Type de filtre	$h_N(k), k \neq 0$	$h_N(0)$
Passe-haut	$-f_c \frac{\sin(k\pi f_c)}{k\pi f_c}$	$1-f_c$

Solution de l'exemple

3ème étape : Sélectionner une fenêtre qui satisfait les spécifications requises pour déterminer le nombre de coefficients du filtre en fonction de la largeur de la transition souhaitée.

Type de fenêtre	Δf, largeur de transition (en fréquence réduite)	Ondulation en bande passante A_p (dB)	Atténuation du 1er lobe secondaire (dB)	Atténuation en bande atténuée A_a (dB)
Rectangulaire	1.8/N	0.7416	13	21
Hanning	6.2/N	0.0546	31	44
Hamming	6.6/N	0.0194	41	53
Blackman	11/N	0.0017	57	74
Kaiser	5.86/N (β=4.54)	0.0274		50
	8.64/N (β=6.76)	0.00275		70
	11.42/N (β=8.96)	0.000275		90

Au moins 41 dB donc fenêtre de Hanning,

le nbr de coeffts du filtre sera de N=6,2/Δf = 6,2/0.1=62, donc l'ordre sera de 61, on prendra en fait 63 coefficients (impair) donc un ordre 62 (pair).

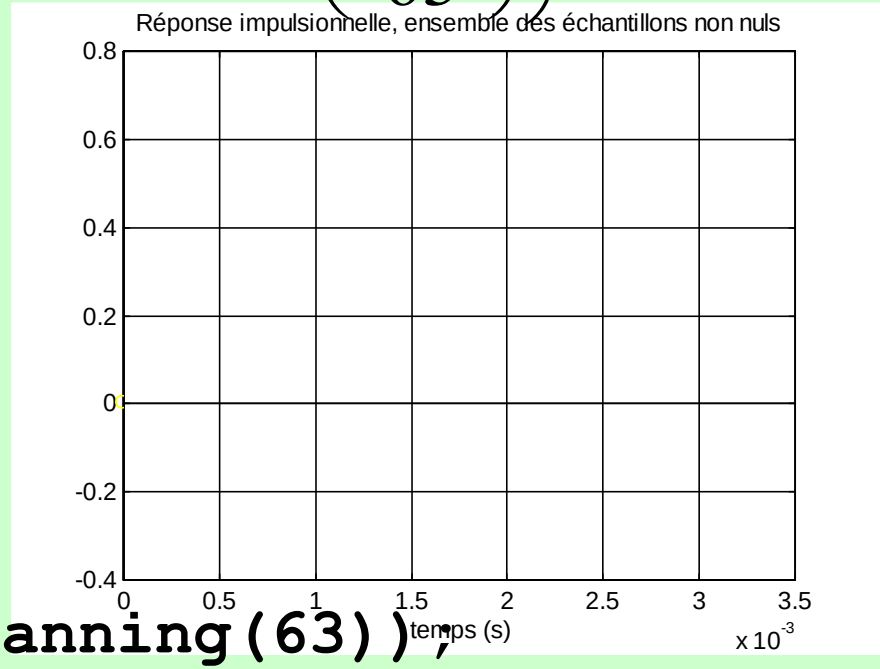
Solution de l'exemple

4ème étape : Obtenir les valeurs de f_k pour la fenêtre choisie et les valeurs vraies des coefficients h_k comme étant le résultat du produit :

$$h(k) = h_N(k)\, f(k) = \left(-f_c \frac{\sin(k\pi f_c)}{k\pi f_c} \right) . \left(0.5 + 0.5\cos\left(\frac{2\pi k}{N} \right) \right)$$

$$= \left(-0.35 \frac{\sin(k\pi * 0.35)}{k\pi * 0.35} \right) . \left(0.5 + 0.5\cos\left(\frac{2\pi k}{63} \right) \right)$$

N.B. h_k sera calculée pour chaque valeur de k variant entre $-\frac{N-1}{2}$ et $\frac{N-1}{2}$ à condition de prendre un nombre de coefficients impair




```
num=fir1(62,0.35,'high',hanning(63));
```

Réponse fréquentielle

