Chapitre 4

Analyse des filtres RIF ou non récursifs

Définition

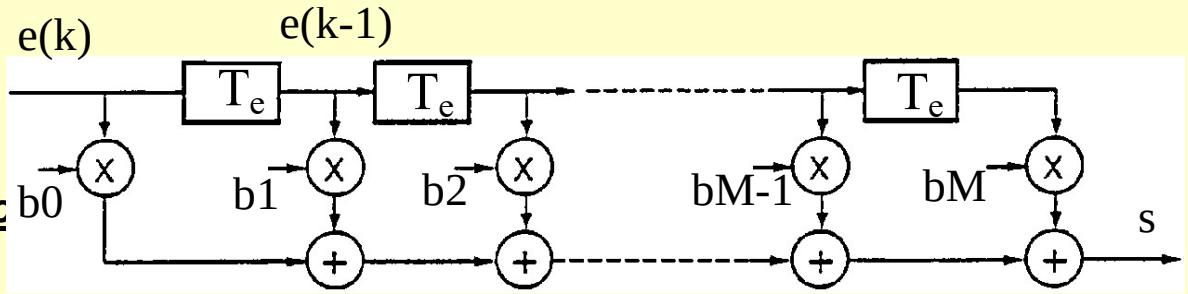
- ***Equation de récurrence***

$$s(k) = b_0 e_k + b_1 e_{k-1} + \ldots + b_M e_{k-M} = \sum_{i=0}^{M} b_i e_{k-i}$$

M

Un filtre RIF d'ordre M possède **N=M+1** coefficients b_i.

- ***Fonctic***

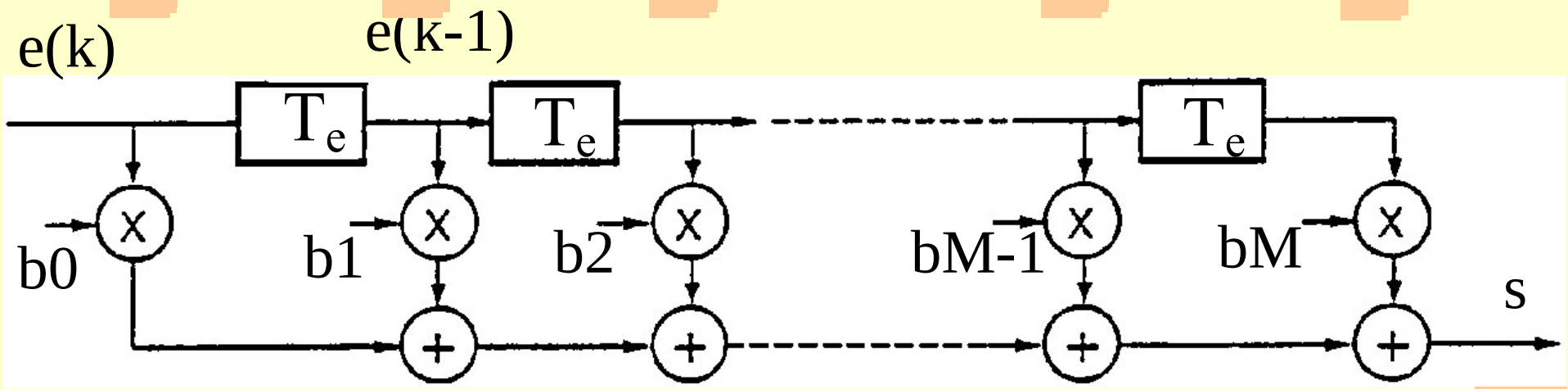


$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} = \sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i} \qquad \text{avec } A(z) = 1$$

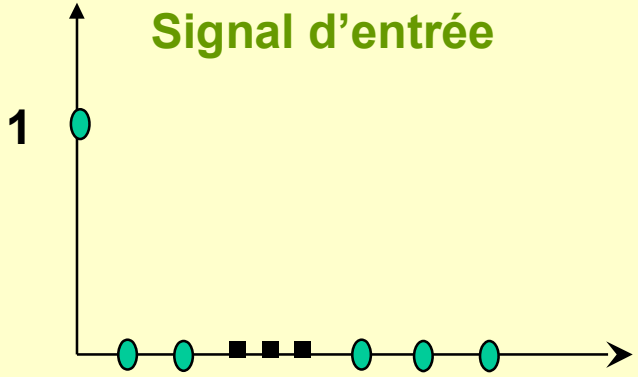
Réponse impulsionnelle

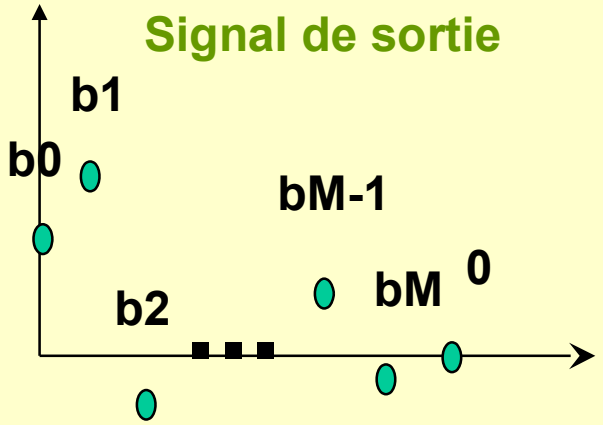
K=M+1, ...

0 0 0 0 0



0





$$s(k) = b_0 e_k + b_1 e_{k-1} + \ldots + b_M e_{k-M} = \sum_{i=0}^{M} b_i e_{k-i}$$

- ***Réponse impulsionnelle (à partir de l'équation de récurrence)***

$$h_k = b_0 \delta_k + b_1 \delta_{k-1} + \ldots + b_M \delta_{k-M}$$

$$\delta(k) = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \neq 0 \\ 1 & \text{pour } k = 0 \end{cases}$$

$$h_0 = b_0 . 1 + b_1 . 0 + \ldots + b_M . 0 = b_0$$

$$\vdots$$

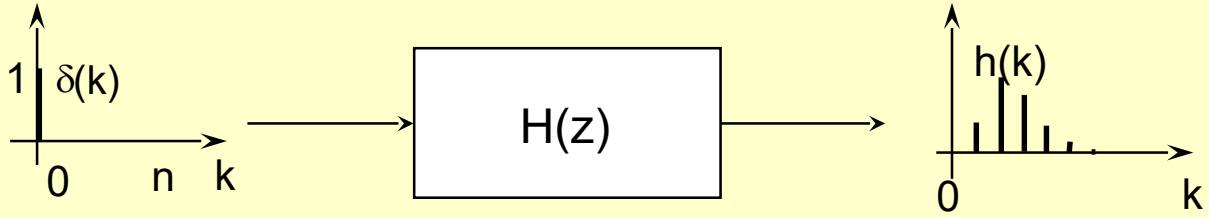
$$h_M = b_0 . 0 + b_1 . 0 + \ldots + b_M . 1 = b_M$$

$$h_j = 0 \quad \text{si} \quad j > M$$

Coefficients du filtre = valeurs de la réponse impulsionnelle du filtre.

Coefficients en nombre limité => la réponse impulsionnelle = 0 pour j>M

Réponse impulsionnelle finie => filtre à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF)



- ***Réponse impulsionnelle (à partir de la fonction de transfert)***

$$S(z)=H(z).E(z),\ \text{ici}\ E(z)=1$$ ***(transf. de l'impulsion)***

Transformée en Z du signal d'entrée

Fonction de transfert

Transformée en Z du signal de sortie

Donc S(z)=H(z), par conséquent la réponse impulsionnelle s_k est égale à la transformée inverse de la fonction de transfert H(z) (similitude de la démarche avec l'étude en Laplace pour les systèmes continus)

Il reste alors à calculer $Z^{-1}(H(z))$ ***!!!***

$$s(k) = b_0 e_k + b_1 e_{k-1} + \ldots + b_M e_{k-M} = \sum_{i=0}^{M} b_i e_{k-i}$$

- ***Réponse indicielle***

$$d_k = b_0 \Gamma_k + b_1 \Gamma_{k-1} + \ldots + b_M \Gamma_{k-M}$$

$$\Gamma(k) = \begin{cases} 0 & \text{pour } k < 0 \\ 1 & \text{pour } k \geq 0 \end{cases}$$

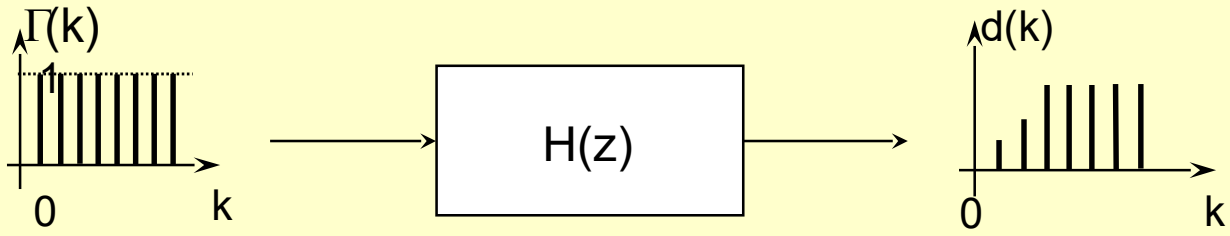
$$d_0 = b_0 . 1 + b_1 . 0 + \ldots + b_M . 0 = b_0$$

$$\vdots$$

$$d_M = b_0 . 1 + b_1 . 1 + \ldots + b_M . 1 = b_0 + \ldots + b_M$$

$$d_j = d_M \quad \text{si} \quad j > M$$

Valeur finale de la réponse indicielle = somme des coefficients du filtre



Réponse fréquentielle

- ***Fonction de transfert***

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}$$

- ***Réponse fréquentielle***

$$z = e^{j2\pi f T_e}$$

$$H(f) = \sum_{i=0}^{M} b_i \; e^{-j2\pi i f T_e}$$

Tracé de IH(f)I et Arg(H(f))

réponse fréquentielle : périodique de période f_e

zone utile du filtre : [0, f_e/2]

Exemple

Soit le filtre numérique décrit par l'équation de récurrence :

Déterminer :

$$s_n = \frac{1}{2} e_n + \frac{1}{2} e_{n-1}$$

a) l'ordre du filtre

b) la fonction de transfert en z,

c) la réponse impulsionnelle,

d) la réponse indicielle,

e) la réponse fréquentielle,
Préciser la (ou les) fréquence(s) de coupure et la zone utile.

f) le type du filtre (passe-bas, passe-haut, …).

Solution

$$s_n = \frac{1}{2}e_n + \frac{1}{2}e_{n-1}$$

Fonction de transfert

$$S(z) = \frac{1}{2}E(z) + \frac{1}{2}E(z)z^{-1} \quad \text{d'où} \quad H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1},$$

Etude fréquentielle

$$\text{H(j}\omega\text{)} : \quad H(j\omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\omega T_e} = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega T_e/2} + e^{-j\omega T_e/2}\right)e^{-j\omega T_e/2} = \cos\left(\frac{\omega T_e}{2}\right)e^{-j\omega T_e/2}$$

$$|H(j\omega)| = \left|\cos\left(\frac{\omega T_e}{2}\right)\right|$$

$$\arg(H(j\omega)) = 0 - \frac{\omega T_e}{2}$$

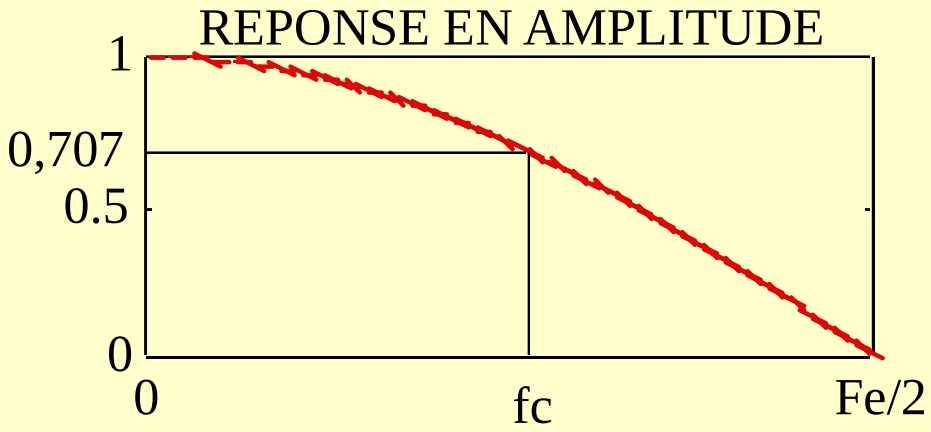
Lorsque cos(ωT_e/2) est à partie réelle positive

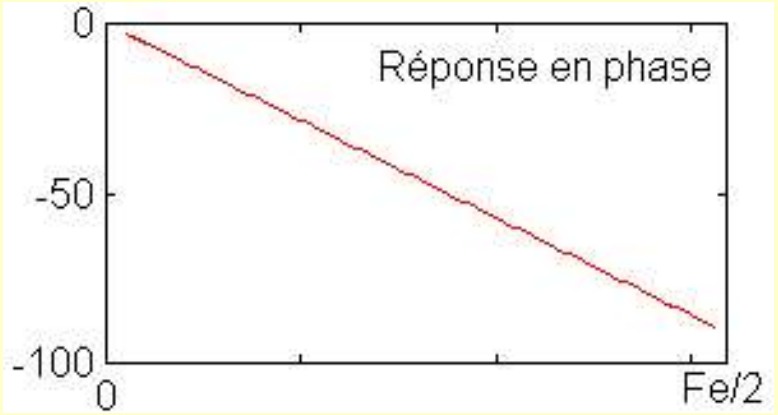
$$\arg(H(j\omega)) = \pi - \frac{\omega T_e}{2}$$

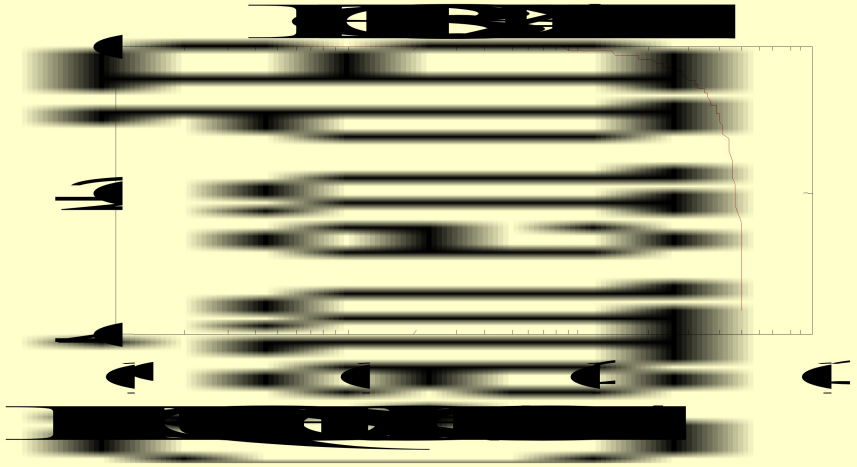
Lorsque cos(ωT_e/2) est à partie réelle négative

Solution

$$s_n = \frac{1}{2}e_n + \frac{1}{2}e_{n-1}$$







Exemple

Soit le filtre numérique décrit par l'équation de récurrence :

Déterminer :

$$s_n = \frac{1}{2} e_n + \frac{1}{2} e_{n-2}$$

a) l'ordre du filtre

b) la fonction de transfert en z,

c) la réponse impulsionnelle,

d) la réponse indicielle,

e) la réponse fréquentielle,
Préciser la (ou les) fréquence(s) de coupure et la zone utile.

f) le type du filtre (passe-bas, passe-haut, …).

Solution

$$s_n = \frac{1}{2}e_n + \frac{1}{2}e_{n-2}$$

Fonction de transfert

$$S(z) = \frac{1}{2}E(z) + \frac{1}{2}E(z)z^{-2} \quad \text{où} \quad H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-2},$$

Etude fréquentielle

$$\text{H(j}\omega\text{)} : \; H(j\omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j2\omega T_e} = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega T_e} + e^{-j\omega T_e}\right)e^{-j\omega T_e} = \cos\left(\frac{2\omega T_e}{2}\right)e^{-j\omega T_e}$$

$$\left|H(j\omega)\right| = \left|\cos\left(\frac{2\omega T_e}{2}\right)\right|$$

$$\arg\left(H(j\omega)\right) = 0 - \omega T_e$$

Lorsque cos(ωT_e) est à partie réelle positive

$$\arg\left(H(j\omega)\right) = \pi - \omega T_e$$

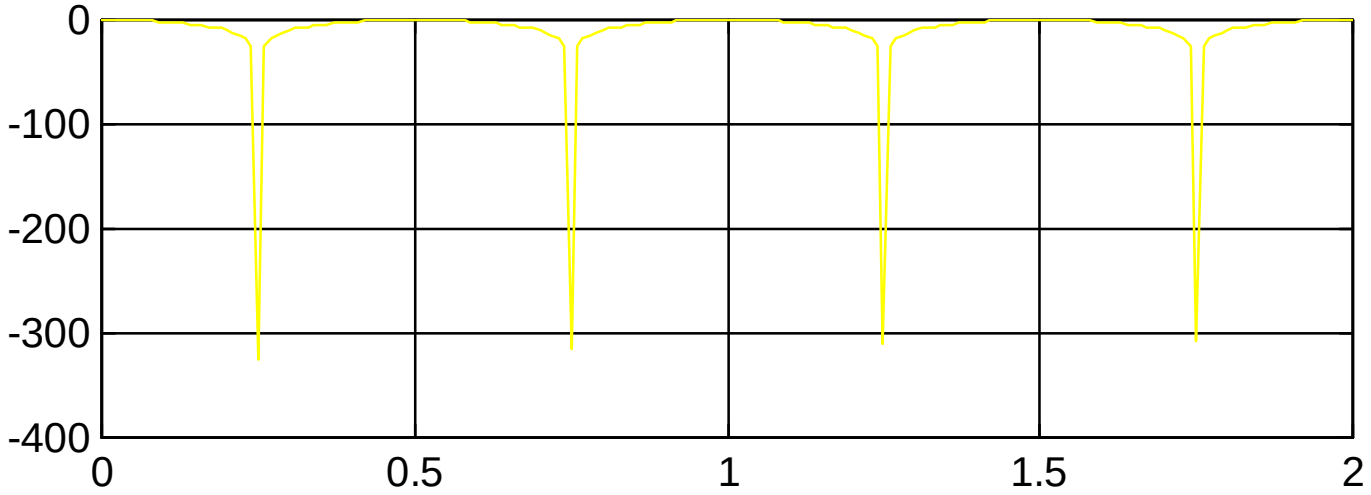
Lorsque cos(ωT_e) est à partie réelle négative

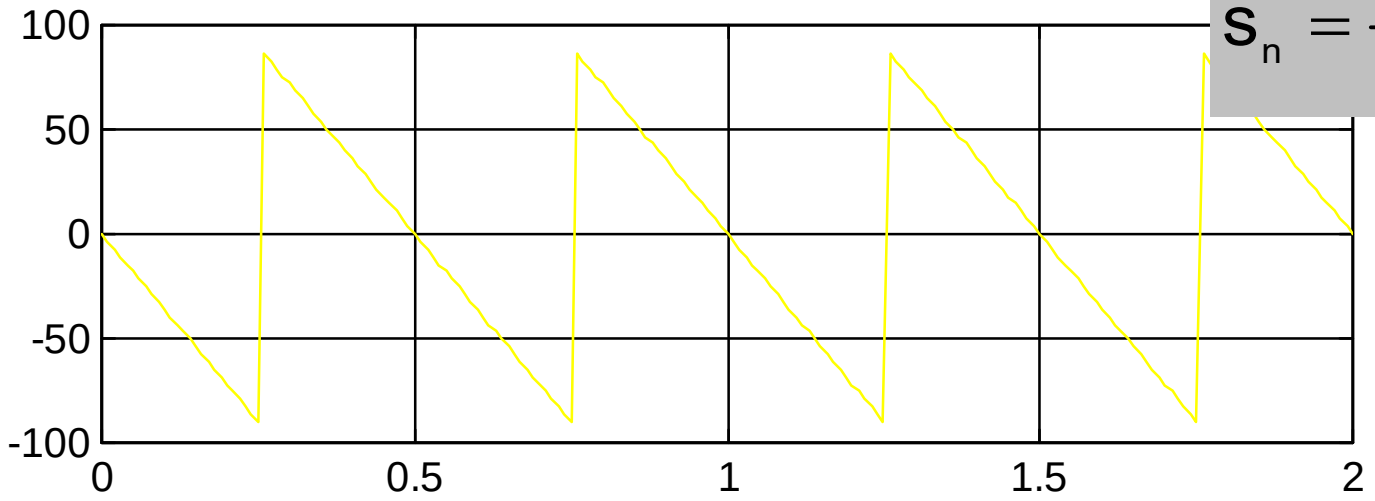
```
freqz([.5 0 .5],1,0:.01:2,1)
```

Fonction de transfert (num et den)

Vecteur fréquence

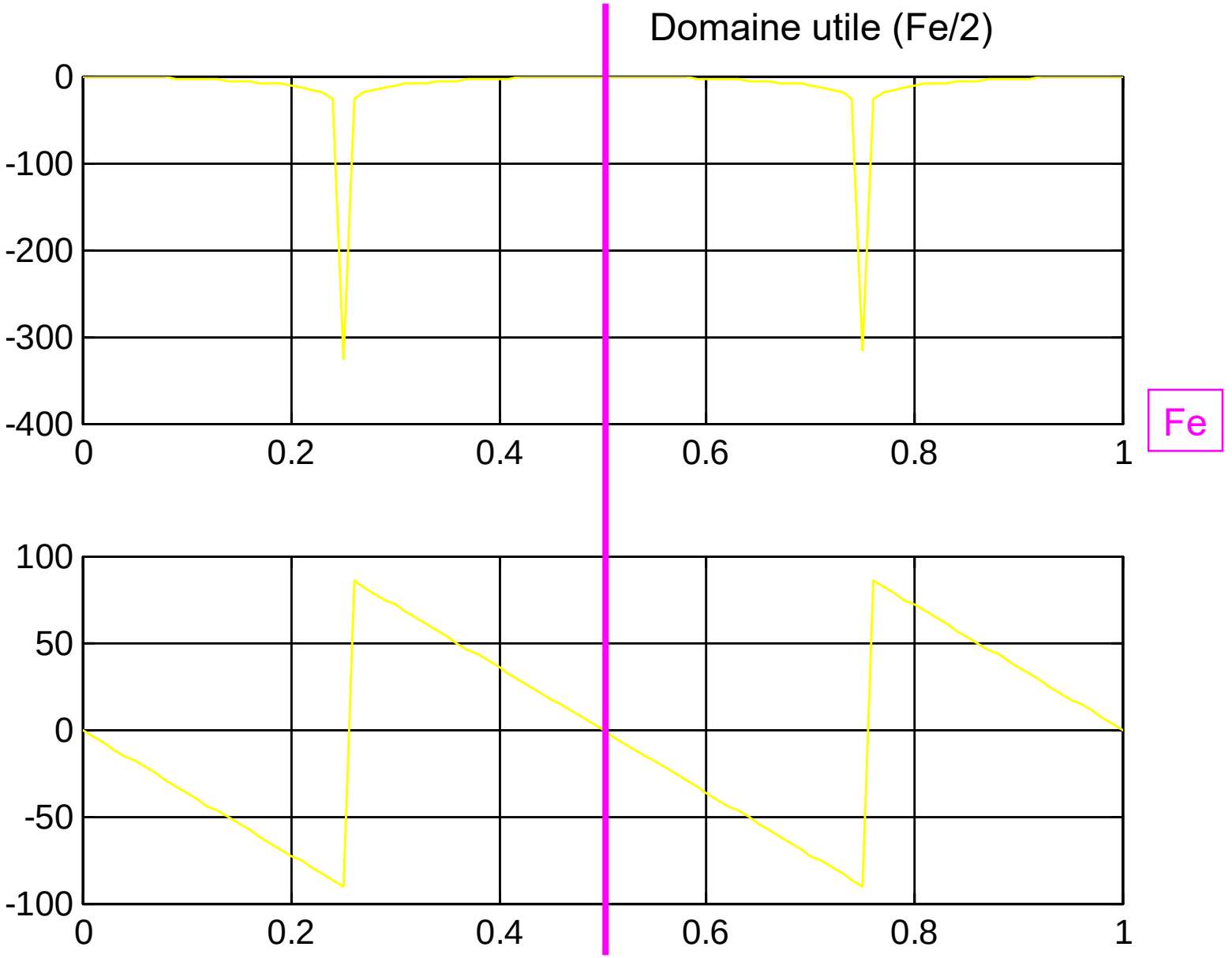
Période d'échantillonnage





$$s_n = \frac{1}{2} e_n + \frac{1}{2} e_{n-2}$$

```
freqz([.5 0 .5],1,0:.01:1,1)
```

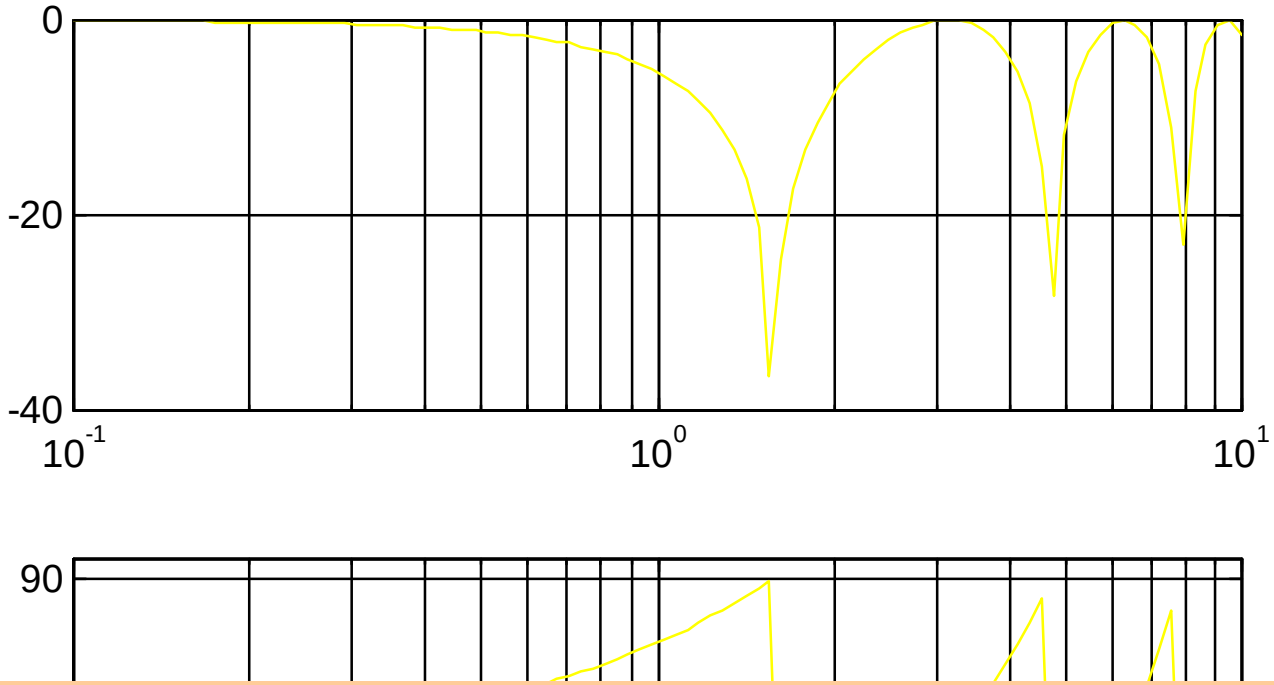


```
dbode([.5 0 .5],1,1,logspace(-1,1,100))
```

Fonction de transfert (num et den)

Période d'échantillonnage

Vecteur fréquence



LOGSPACE(d1, d2) generates a row vector of 50 logarithmically equally spaced points between decades 10^d1 and 10^d2. If d2 is pi, then the points are between 10^d1 and pi.

LOGSPACE(d1, d2, N) generates N points.

```
dbode([.5 0 .5],1,1,logspace(-1,1,100))
```

Fonction de transfert (num et den)

Période d'échantillonnage

Vecteur fréquence

