Chapitre 1 :

Les signaux à temps discrets

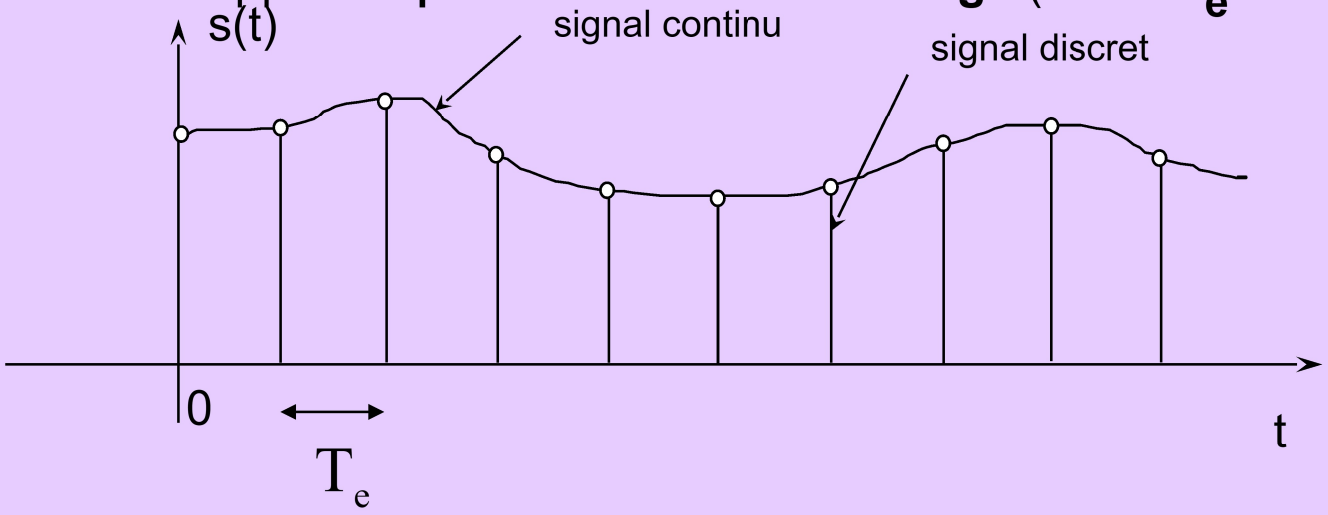
(rappels)

Introduction

Les signaux physiques existant dans la nature sont en général des signaux de type continu et il sera nécessaire, lorsque l'on voudra les faire transiter sur un réseau, de les convertir en signaux discrets.

Cette conversion porte le nom ***d'échantillonnage***.

Echantillonner un signal consiste donc à prendre des échantillons de celui-ci à des instants régulièrement espacés. La période entre deux échantillons s'appellent **période d'échantillonnage** (notée $\mathbf{T_e}$ ou Δ)



Introduction

Lorsqu'on veut échantillonner un signal continu s(t), deux problèmes se posent :

- dans le domaine temporel, quelle est la perte éventuelle d'information et existe-t-il une fonction d'interpolation qui permette de reconstituer le signal continu original de manière univoque à partir de la suite numérique ?

Le théorème d'échantillonnage répond à cette question.

- ***dans le domaine des amplitudes du signal***, se pose le problème de la taille numérique des nombres de la série. En effet, du fait de leur manipulation sur un calculateur, les quantités numériques sont forcément codées sur un nombre fini d'éléments binaires.

Il s'agit de l'opération de quantification.

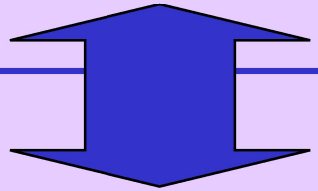
⟵ *Non traité dans ce cours*

Représentation mathématique

Domaine analogique

Equations différentielles

$$\dot{x} - ax = 0$$



Domaine numérique

Equations de récurrence (suites numériques)

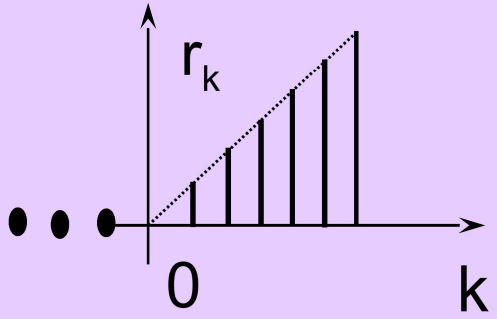
$$x_{k+1} - ax_k = 0$$

Signaux discrets particuliers

Suites de nombres

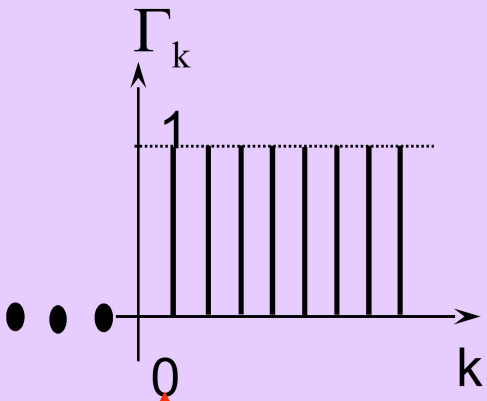
- La rampe unitaire $r_k = r(kT_e)$

$$r_k = \begin{cases} 0 \ \ pour \ \ k < 0 \\ kT_e \ \ pour \ \ k \geq 0 \end{cases}$$



- L'échelon unitaire $\Gamma_k = \Gamma(kT_e)$

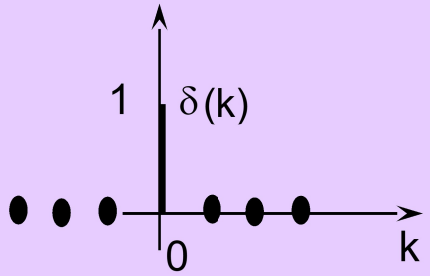
$$\Gamma_k = \begin{cases} 0 \ \ pour \ \ k < 0 \\ 1 \ \ pour \ \ k \geq 0 \end{cases}$$



- L'impulsion de Dirac $\delta_k = \delta(kT_e)$

$$\delta_k = \begin{cases} 0 \ \ pour \ \ k \neq 0 \\ 1 \ \ pour \ \ k = 0 \end{cases}$$

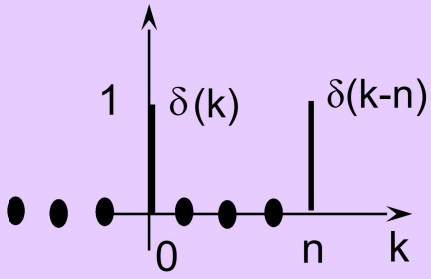




- L'impulsion de Dirac retardée

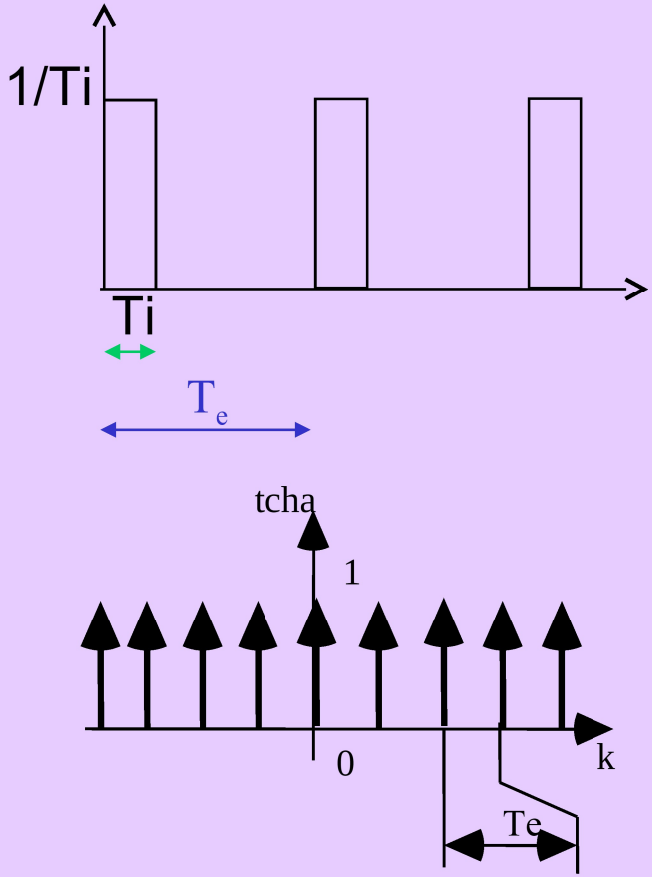
$$\delta_{k-n} = \delta\left((k-n)T_e\right)$$

$$\delta_{k-n} = \begin{cases} 0 \ \ pour \ \ k-n \neq 0, k \neq n \\ 1 \ \ pour \ \ k-n = 0, k = n \end{cases}$$



Peigne de Dirac

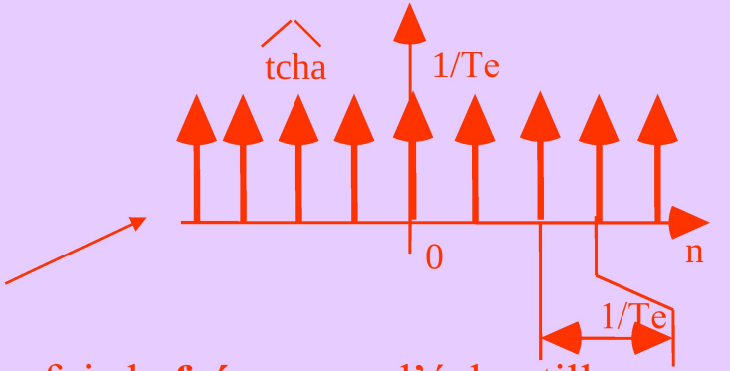
k fois la **période** d'échantillonnage



Peigne : domaine temporel

- Suite d'impulsions
- Signal permettant de traiter mathématiquement

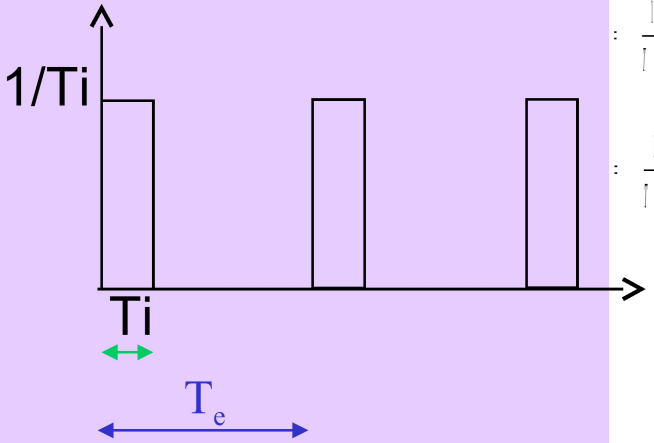
et graphiquement les problèmes d'échantillonnage



n fois la **fréquence** d'échantillonnage

Spectre du peigne

Spectre du peigne de Dirac



$$x(t) = \delta(t) = \lim_{T_i \to 0} \frac{1}{T_i} \text{ pendant la durée } T_i$$

$$c_n = \frac{1}{T_e}\int_0^{T_e} x(t)\, e^{-j n \omega_e t}\, dt = \frac{1}{T_e}\int_0^{T_e} \delta(t)\, e^{-j n \omega_e t}\, dt$$

$$= \frac{1}{T_e} \lim_{T_i \to 0} \left(\int_0^{T_i} \frac{1}{T_i} e^{-j n \omega_e t}\, dt + \int_{T_i}^{T_e} 0 \cdot e^{-j n \omega_e t}\, dt \right)$$

$$= \frac{1}{T_e} \lim_{T_i \to 0} \left[\frac{e^{-j n \omega_e t}}{T_i (-j n \omega_e)} \right]_0^{T_i} = \frac{1}{T_e} \lim_{T_i \to 0} \left[\frac{e^{-j n \omega_e T_i} - 1}{T_i (-j n \omega_e)} \right]$$

$$= \frac{1}{T_e} \lim_{T_i \to 0} \left[\frac{\left(1 + \frac{-j n \omega_e T_i}{1!}\right) - 1}{T_i (-j n \omega_e)} \right] = \frac{1}{T_e}$$

Le calcul ci-dessus est vrai à condition que $n \neq 0$. Il faut refaire le calcul pour $n = 0$:

$$c_0 = \frac{1}{T_e}\int_0^{T_e} x(t)\, dt = \frac{1}{T_e}\int_0^{T_e} \delta(t)\, dt = \frac{1}{T_e} \lim_{T_i \to 0} \int_0^{T_i} \frac{1}{T_i}\, dt = \frac{1}{T_e} \lim_{T_i \to 0} \left[\frac{T_i}{T_i} \right] = \frac{1}{T_e}$$

Echantillonnage

- ***Notations***

Signal continu	Echantillonnage à la période T_e (ou Δ)	Signal discret, échantillonné numérique
s(t)	⟶	$s_k = s(k) = s(kT_e)$

- ***D'un point de vue mathématique, échantillonner un signal continu revient à le multiplier par un peigne de Dirac.***

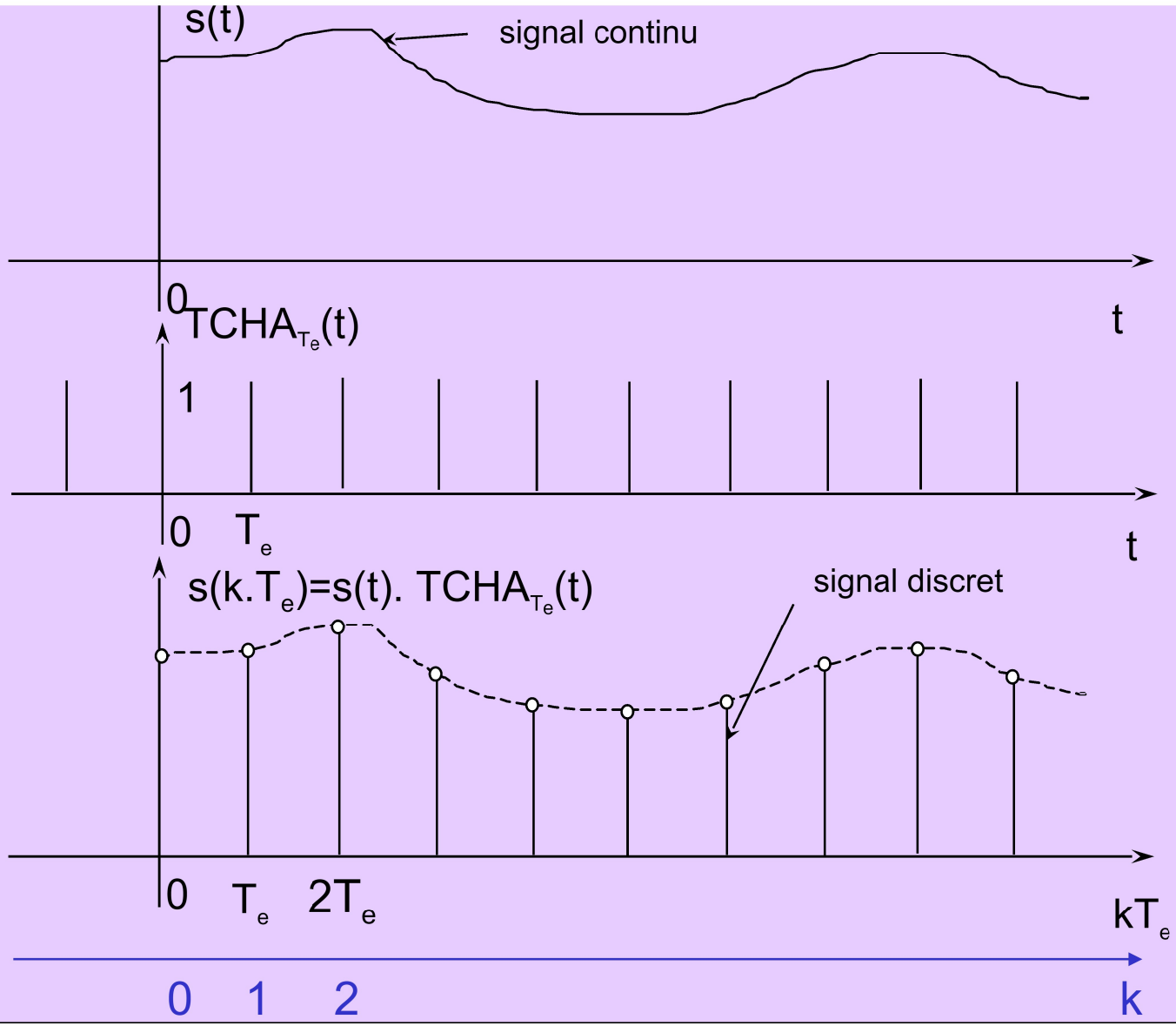
$$s(kT_e) = s(t) \,.\, TCHA_{Te}(t) = s(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$$

$$s(kT_e) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t)\delta(t - kT_e)$$

$$s(kT_e) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e)\delta(t - kT_e)$$

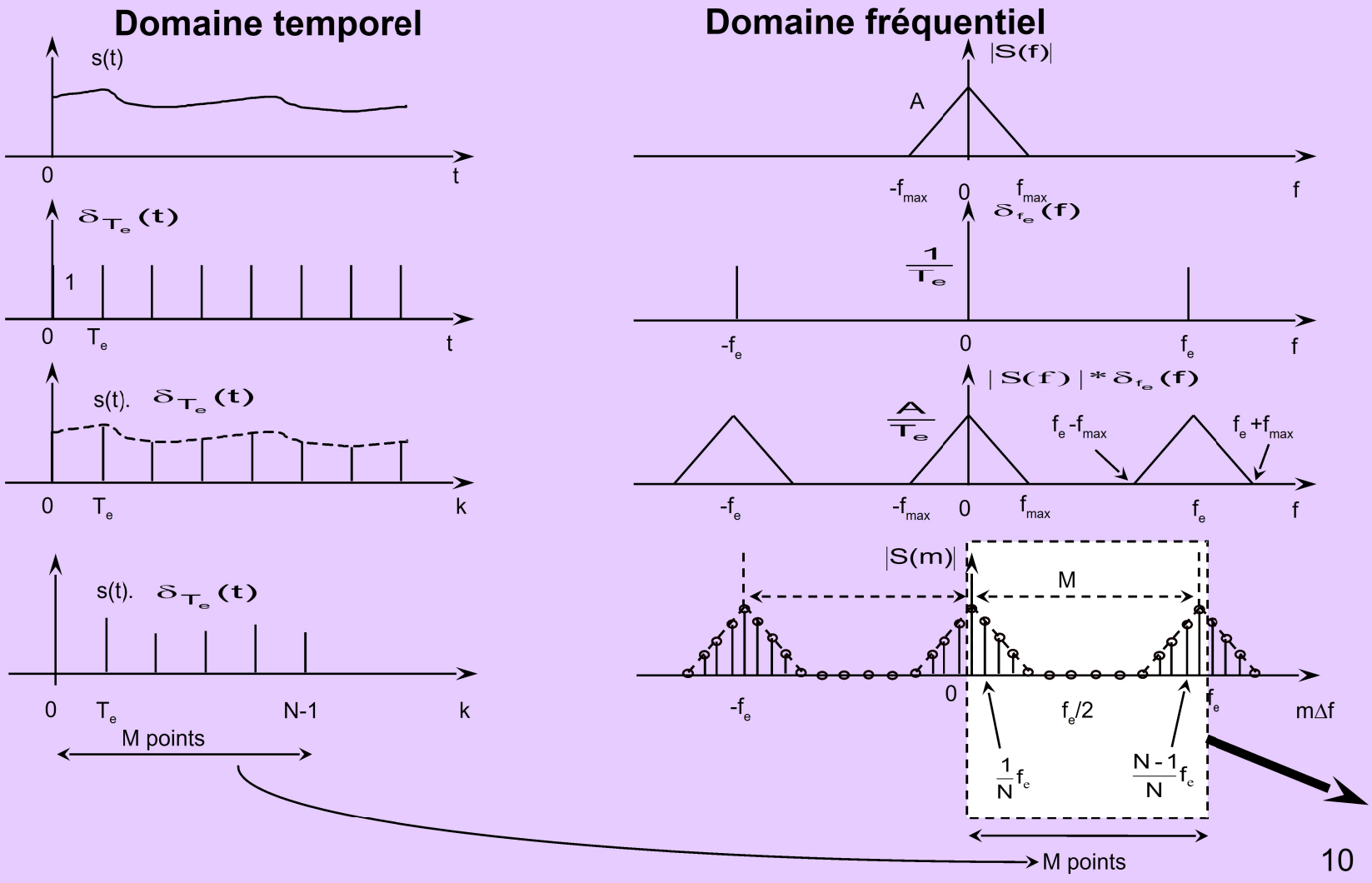
Illustration graphique de l'échantillonnage

- ***D'un point de vue mathématique, échantillonner un signal continu revient à le multiplier par un peigne de Dirac.***

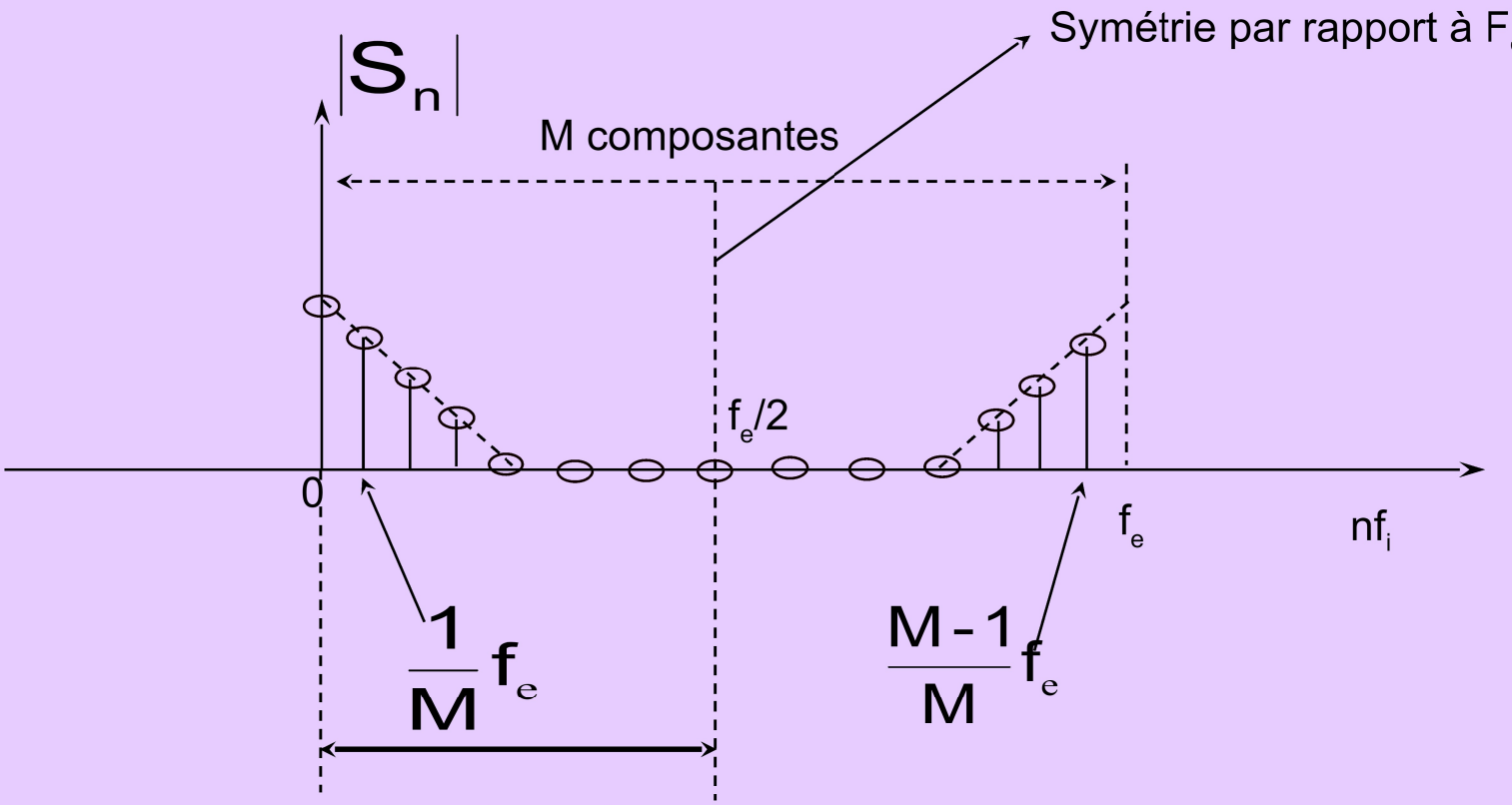


Partie utile du spectre d'un signal discret

Le spectre d'un signal échantillonné correspond au spectre du signal continu périodisé tous les f_e



Partie utile d'un spectre obtenu par TFD



Partie utile

$[0 ; f_e/2]$

Rôle du fenêtrage

Signal échantillonné ⟶ spectre périodique

Spectre échantillonné ⟶ signal périodique

Signal réellement analysé : constitué de la juxtaposition de morceaux de signal de durée MT_e.

On a ainsi enregistré une période du signal, la mise bout à bout reconstitue le signal sur l'infini. Si le signal n'était pas périodique ou que la durée d'observation ne correspond pas à un multiple entier de périodes, il y aura des ***discontinuités*** à chaque raccordement. Ces discontinuités en début et fin d'enregistrement sont sources de ***fuites spectrales***.

Pour éviter cela, il faut ***diminuer l'influence des extrémités*** de l'enregistrement. C'est le rôle des fenêtres.

Dans le cas où on conserve les échantillons du signal sur une durée MT_e, cela revient à mutiplier le signal par une ***fenêtre rectangulaire***.

Il existe d'autres fenêtres de profil varié (***triangulaire, Hanning, Hamming, Blackman, Kaiser***, ...) qui permettent de ***réduire l'effet des fuites spectres.***

Caractéristiques des principales fenêtres

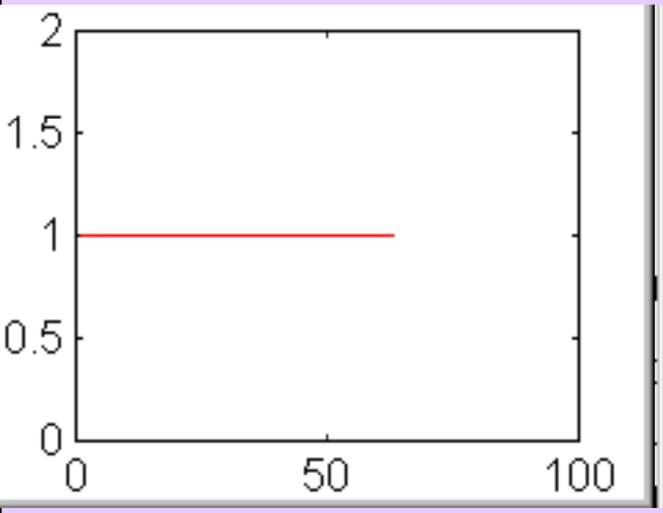
Fenêtre rectangulaire

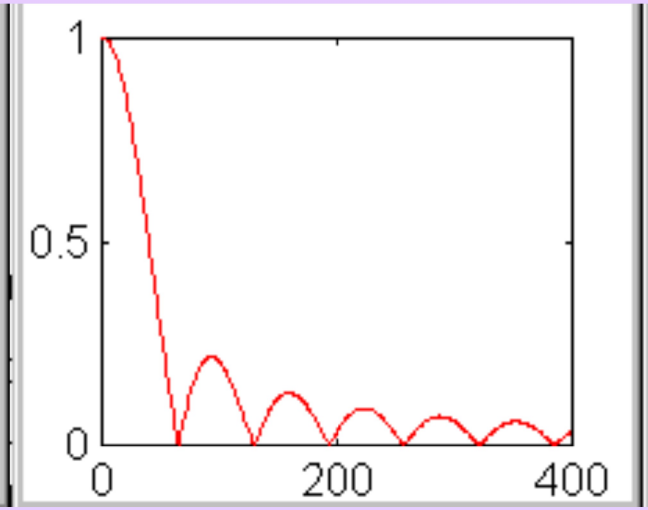
Cette fenêtre est définie par :

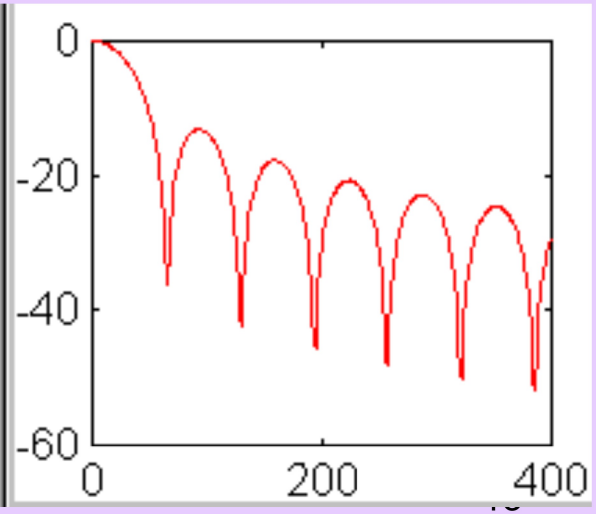
$$\begin{cases} f_n = 1 & pour \quad 0 \le n \le N-1 \\ f_n = 0 & ailleurs \end{cases}$$

On peut également considérer cette fenêtre comme étant le cas particulier de la fenêtre de Hamming généralisée pour $\alpha = 1$ (cf. fenêtre de Hamming).
Son expression fréquentielle est :

$$W_R(e^{j.2.\pi.f}) = e^{-j.\pi.(N-1).f} . \frac{\sin(\pi.N.f)}{\sin(\pi.f)}$$







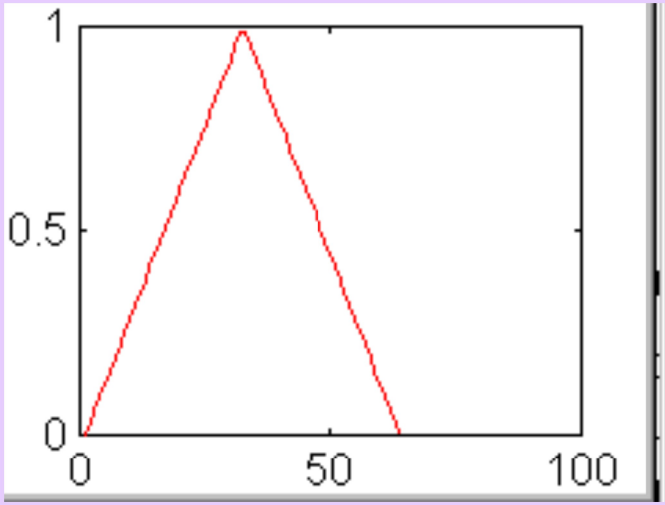
Fenêtre triangulaire ou de Bartlett

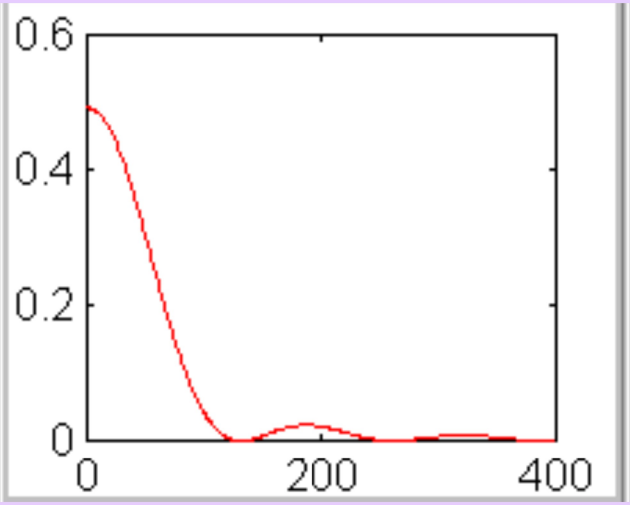
Cette fenêtre est définie par :

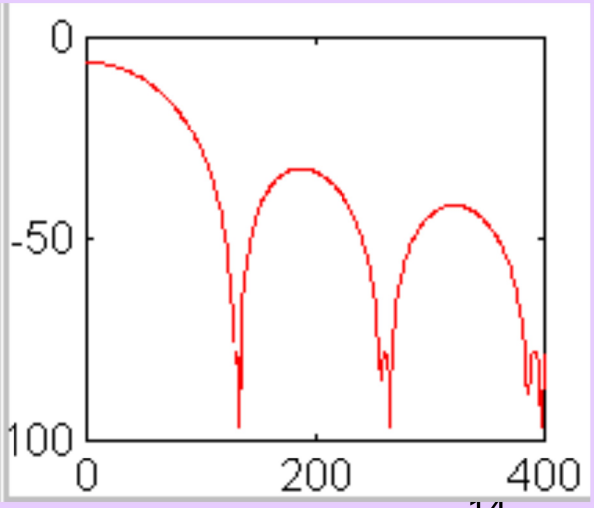
$$\begin{cases} f_n = \dfrac{n}{N/2} & pour \quad 0 \le n \le N/2 \\ f_{N-n} & pour \quad N/2 \le n \le N-1 \end{cases}$$

Son expression fréquentielle est :

$$W_T(e^{j.2.\pi.f}) = e^{-j.2.\pi(N/2-1).f} . \left(\frac{\sin(\pi . \frac{N}{2} . f)}{\sin(\pi . f)} \right)^2$$







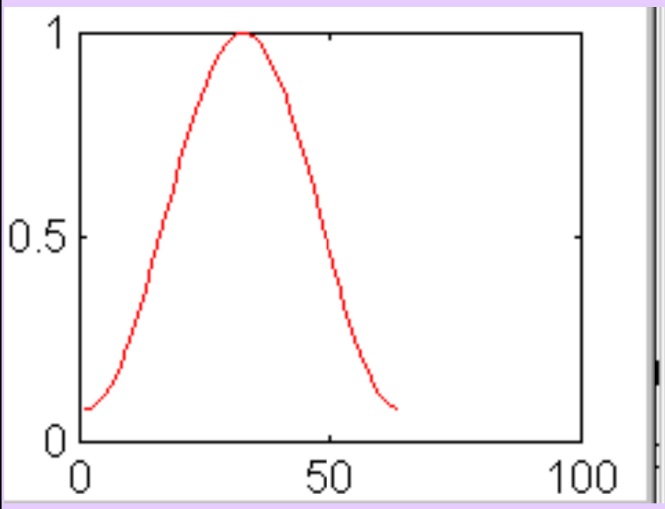
Fenêtre de Hamming

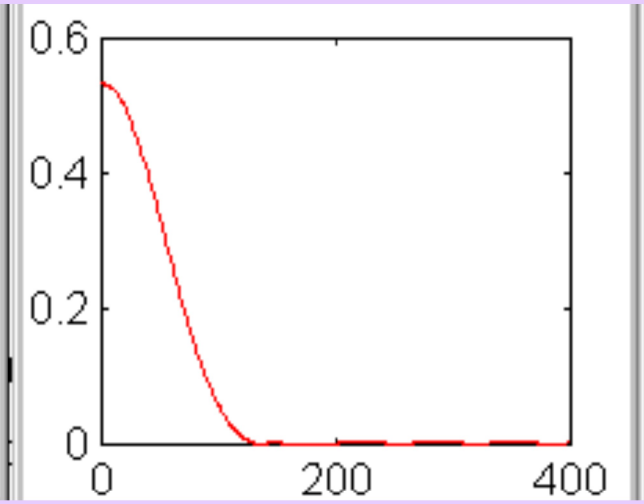
La fenêtre de Hamming généralisée a pour équation :

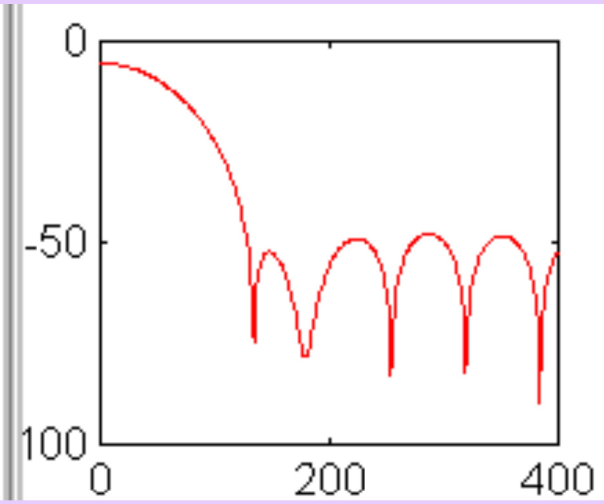
$$\begin{cases} f_n = \alpha + (1-\alpha).\cos\left(\dfrac{2.\pi.n}{N}\right) & pour \quad 0 \le n \le N-1 \\ f_n = 0 & ailleurs \end{cases}$$

La fenêtre de Hamming proprement dite est le cas particulier de la fenêtre généralisée pour $\alpha = 0{,}54$. Les fenêtres de la famille Hamming se caractérisent par un pic central de largeur double de la fenêtre rectangulaire mais une atténuation des oscillations sensiblement plus importante. La représentation fréquentielle de la fenêtre de Hamming généralisée a pour équation :

$$W_{Hg}\left(e^{j.2.\pi.f}\right) = \alpha.W_R + \frac{1-\alpha}{2}.\left[W_R\left(e^{j.2.\pi.(f-1/N)}\right) + W_R\left(e^{j.2.\pi.(f+1/N)}\right)\right]$$







Fenêtres de Hamming, Hann, Blackman, Kaiser, ...