



Traitement du Signal

El-hadi DJERMOUNE, Hugues GARNIER,
Jean-Marc THIRIET
Université Henri Poincaré, Nancy
IUT de Nancy-Brabois
Département Génie des Télécommunications et Réseaux

Module de TDS 2A

- 8 séances de cours → 16H00
  - *3 pour l'étude des systèmes continus*
  - *1 pour l'étude des signaux aléatoires*
  - *4 pour l'étude des systèmes numériques*
- 8 séances de TD → 16H00
  3 sys. cont., 1 sign. aléat., 4 sys. num.
- 6 séances de TP → 24H00
  2 sys. cont., 1 sign. aléat., 3 sys. num.
  - Logiciel de simulation Matlab/Simulink
  - Utilisation d'un DSP (Digital Signal Processor / Processeur de traitement numérique du signal)

Evaluation

- 2 devoirs de 2H00 (1 comptabilisé en Elec. et 1 en TdS)
- 1 oral individuel de TP de 10-15 mn

Notions à revoir (supposées connues !)

- Module du TDS 1A
  - Transformées de Fourier, échantillonnage (Shannon)
  - Transformée de Laplace et en Z ...
- Mathématiques :
  - Nombres complexes, suites, décomposition en éléments simples, ...
- Electronique :
  - Filtrage analogique, Diagramme de Bode, ...

Plan indicatif

I. Systèmes continus / Filtrage analogique

II. Systèmes bouclés / PLL

III. Signaux aléatoires et notions de corrélation

Electronique

IV. Signaux discrets / Rappels transformée en Z

V. Systèmes discrets / Filtrage numérique

TdS

Systèmes continus

- Définition
  - Un système continu linéaire invariant dans le temps possédant une entrée et une sortie est régi par une équation différentielle ordinaire à coefficients constants :

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + \ldots + a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = b_0 e(t) + b_1 \frac{de(t)}{dt} + \ldots + b_n \frac{d^m e(t)}{dt^m}$$

  - $n \geq m$, $a_n = 1$
  - n est l'ordre du système
  - Systèmes d'ordre supérieur à 2 peuvent se décomposer en sous-systèmes du 1er et 2nd ordre, d'où l'intérêt particulier pour l'étude de ces systèmes de base

Outils mathématiques utiles

Pour le traitement des systèmes continus

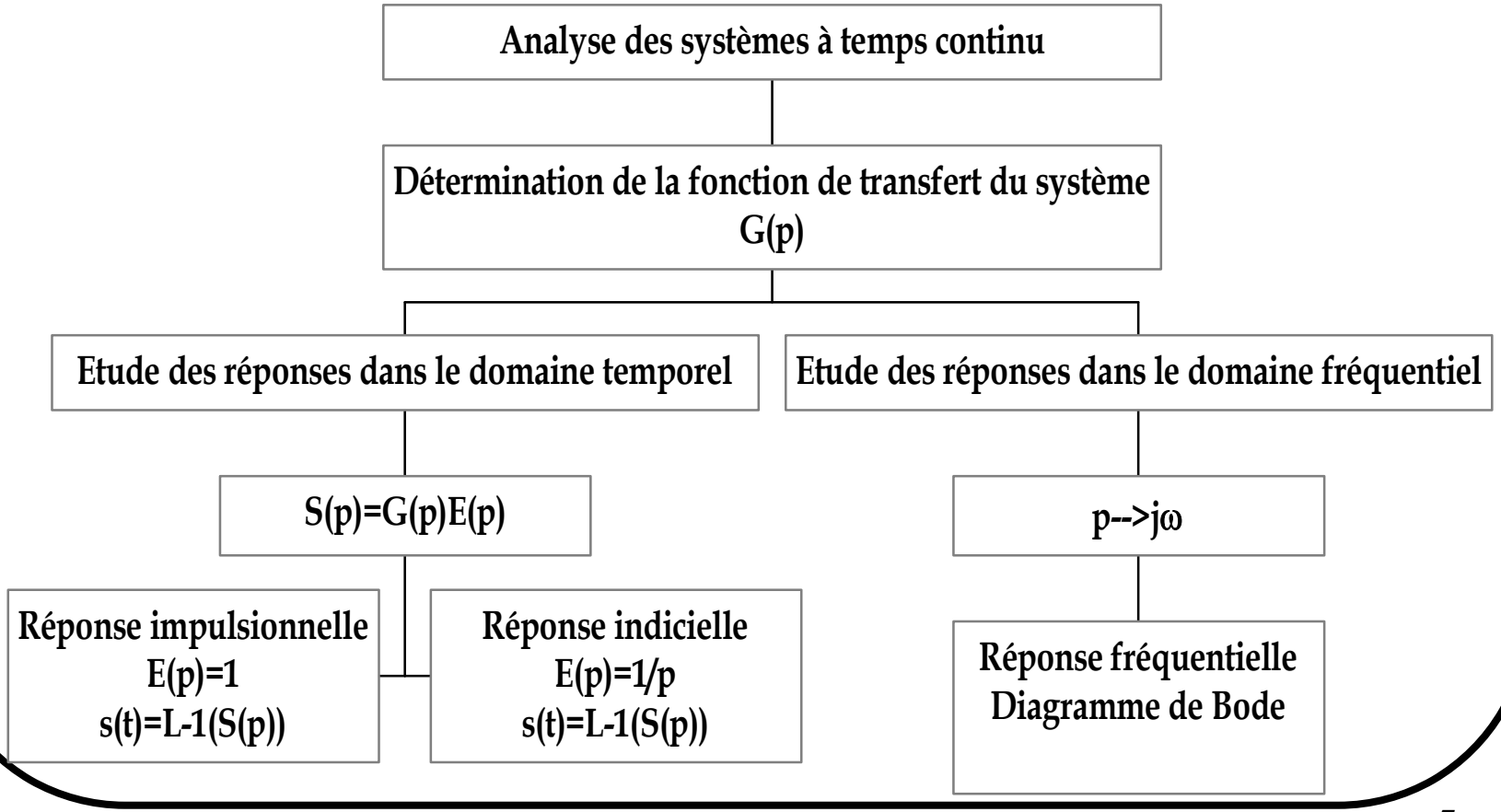
➡ **Transformée de Laplace**

Pour le traitement des systèmes numériques

Transformée en Z

Intérêt de la transformée de Laplace :

Outil mathématique facilitant l ***'analyse*** des systèmes continus



La transformée de Laplace



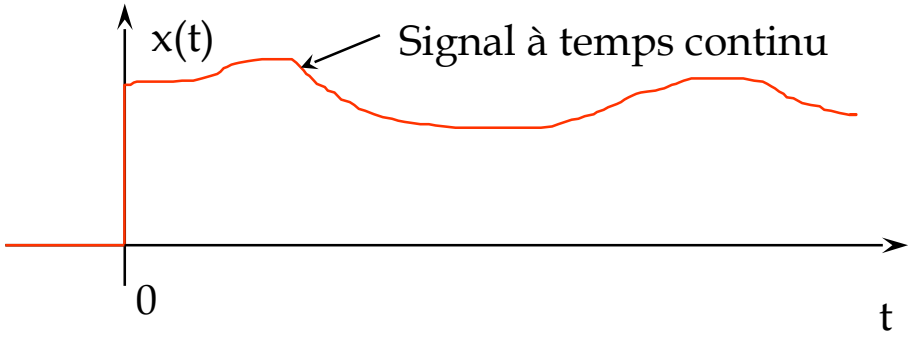
Pierre-Simon LAPLACE

- 23 mars 1749 - 5 mars 1827
- Grand savant Français
- A profondément influencé les mathématiques, l'astronomie, la physique et la philosophie des sciences de son siècle
- A proposé une méthode permettant de résoudre facilement les éq. diff. ordinaires à coef. constants

Définitions

- Soit un signal à temps continu x(t) causal, la transformée de Laplace de x(t) est définie par :

$$\mathcal{L}(x(t)) = X(p) = \int_0^{+\infty} x(t)\, e^{-pt}\, dt$$



où
- p est la variable de Laplace (parfois notée s)
- p est complexe : s= σ+jω

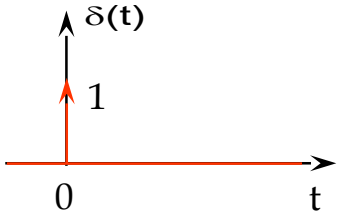
- La transformée de Laplace inverse est définie par :

$$\mathcal{L}^{-1}(X(p)) = x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(p)\, e^{pt}\, dp$$

Transformée de Laplace de signaux-test

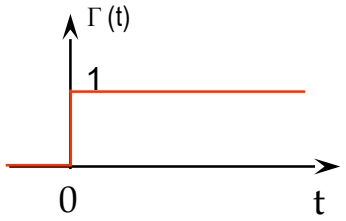
- ***Impulsion de Dirac***

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$$



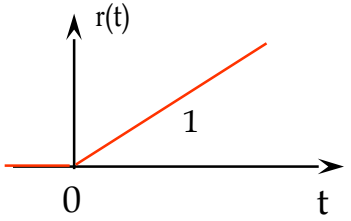
- ***Echelon unité***

$$\mathcal{L}(\Gamma(t)) = \frac{1}{p}$$



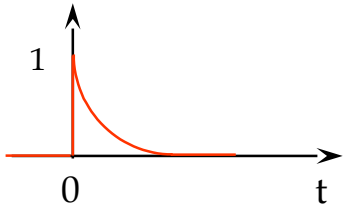
- ***Rampe unité***

$$\mathcal{L}(r(t)) = \frac{1}{p^2}$$



- ***Exponentielle décroissante***

$$\mathcal{L}\left(e^{-\alpha t}\right) = \frac{1}{p+\alpha}$$



Propriétés de la transformée de Laplace

- ***Linéarité et superposition***

$$\mathcal{L}(a\,x(t)) = a\,X(p)$$
$$\mathcal{L}(a\,x(t) + b\,y(t)) = a\,X(p) + b\,Y(p)$$

- ***Dérivation par rapport au temps***

$$\mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = pX(p) - x(0)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right) = p^n X(p) - p^{n-1}x(0) - p^{n-2}\dot{x}(0) - \ldots - px^{(n-1)}(0) - x^{(n)}(0)$$

Propriétés de la transformée de Laplace

- ***Produit de convolution temporel***

  Le produit de convolution, noté x(t)*y(t)

  est défini par : $x(t) * y(t) = \int_0^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau) d\tau$

$$\mathcal{L}(x(t) * y(t)) = X(p).Y(p)$$

- ***Théorème du retard***

$$\mathcal{L}(x(t-t_0) = e^{-pt_0}\, X(p)$$

Inversion de la transformée de Laplace

- Le problème consiste à partir de la transformée de Laplace X(p) à retrouver le signal original x(t).

$$\mathcal{L}^{-1}(X(p)) = x(t)$$

- ***Méthode :*** *Décomposition en éléments simples et utilisation de tables*

$$X(p) = \frac{c_1}{p - p_1} + \ldots + \frac{c_n}{p - p_n}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c_1}{p - p_1}\right] + \ldots + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c_n}{p - p_n}\right]$$

$$x(t) = c_1 e^{p_1 t} + \ldots + c_n e^{p_n t}$$

c_i : scalaire réel ou complexe

Fonction de transfert

Soit l'équation différentielle exprimant la relation entre le signal d'entrée e(t) et le signal de sortie s(t) d'un système :

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + \ldots + a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = b_0 e(t) + b_1 \frac{de(t)}{dt} + \ldots + b_n \frac{d^m e(t)}{dt^m}$$

En appliquant la transformée de Laplace aux 2 membres de l'équation et en utilisant : $L\left(\frac{d^i x(t)}{dt^i}\right) = p^i X(p)$ en supposant les CI nulles

$$\left(a_0 + a_1 p + \ldots + a_n p^n\right) S(p) = \left(b_0 + b_1 p + \ldots + b_m p^m\right) E(p)$$

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + \ldots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \ldots + a_n p^n} = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j \, p^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i \, p^i}$$

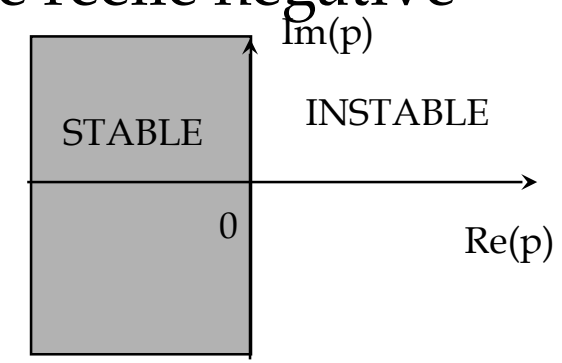
Analyse de la stabilité

- Soit un système à temps continu décrit par :

$$G(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{b_0+b_1p+b_2p^2+\ldots+b_mp^m}{a_0+a_1p+a_2p^2+\ldots+a_np^n}=\frac{\sum_{j=0}^{m} b_j\,p^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i\,p^i}$$

- Le système est stable si tous ses pôles p_i : racine du dénominateur de G(p) sont à partie réelle négative

$$Re(p_i)<0$$



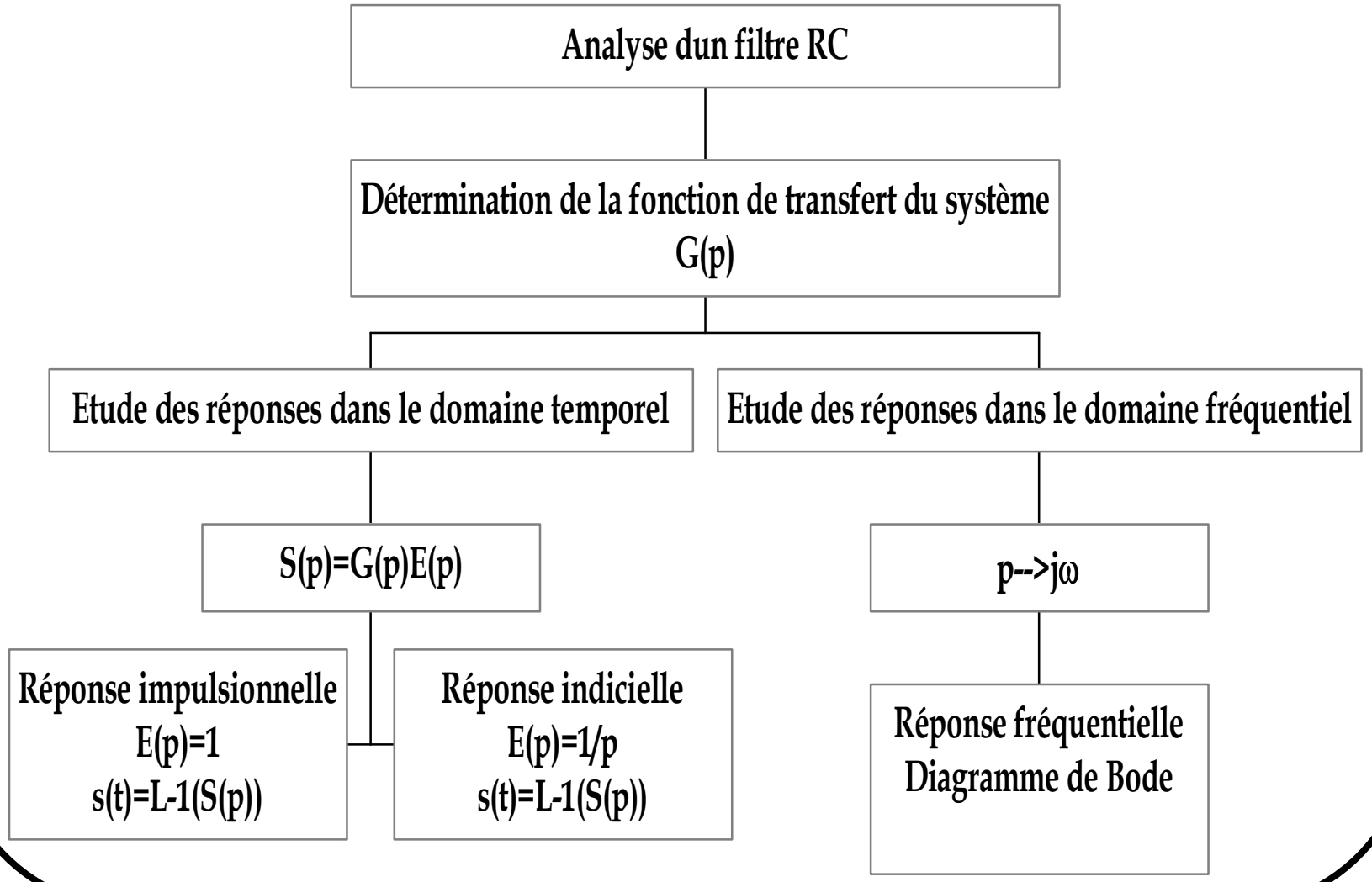
Domaine continu

Exemples :

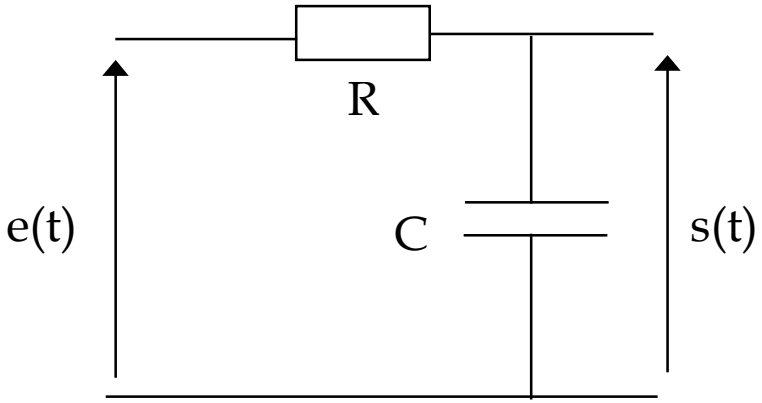
$$X_1(p)=\frac{p^2}{p^2+p-2}=\frac{p^2}{(p-1)(p+2)}$$

$$X_2(p)=\frac{10p-1}{p^2+2p+1}=\frac{10p-1}{(p+1)^2}$$

Exemple : Analyse d'un filtre RC



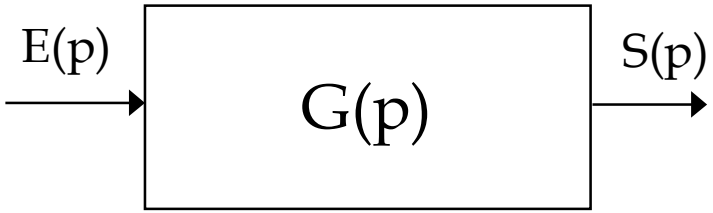
Détermination de la fonction de transfert



$s(t) = g(t) * e(t)$ g(t) rép. imp.

$$RC\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t) \quad \text{(éq. diff.)}$$

G(p) ?



$$S(p) = G(p)\,E(p)$$

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + RC\,p}$$

Détermination de G(p) de circuits électriques : méthode des impédances opérationnelles

- Déterminons la fonction de transfert des 3 éléments passifs de base.

$$u(t) = R\,i(t) \quad \Rightarrow \quad U(p) = R\,I(p)$$

$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad I(p) = Cp\,U(p)$$

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad U(p) = Lp\,I(p)$$

- Ces relations peuvent être mises sous le forme générale :

$U(p)=Z(p)\ I(p)$ avec Z(p) l'impédance opérationnelle

$$u(t) = R(t)i(t) \quad \Rightarrow \quad Z(p) = R$$

$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad Z(p) = \frac{1}{Cp}$$

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad Z(p) = Lp$$

Détermination de G(p) de circuits électriques : méthode des impédances opérationnelles

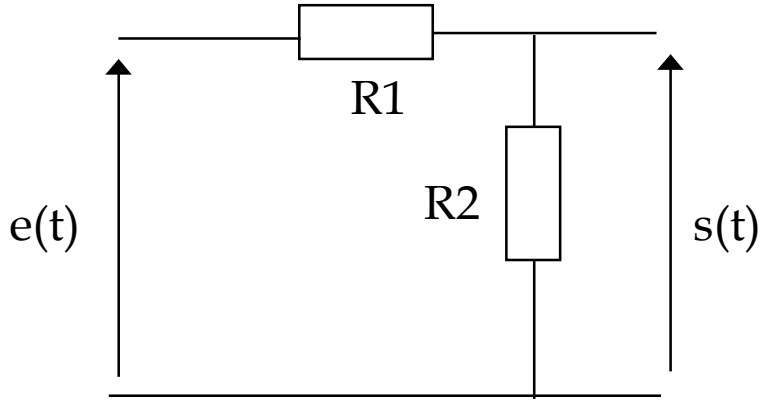
- Tous les théorèmes établis dans le cas des réseaux résistifs :
  - lois de Kirchhoff,
  - théorème de Millman,
  - théorème de superposition,
  - théorème de Thevenin,
  - Pont diviseur de tension …

  peuvent s'appliquer en considérant les impédances opérationnelles.

- Détermination aisée de la fonction de transfert de circuits électriques

Méthode des impédances opérationnelles
Exemples

- <u>Atténuateur parfait</u>



Pont diviseur de tension

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{Z2(p)}{Z1(p) + Z2(p)}$$

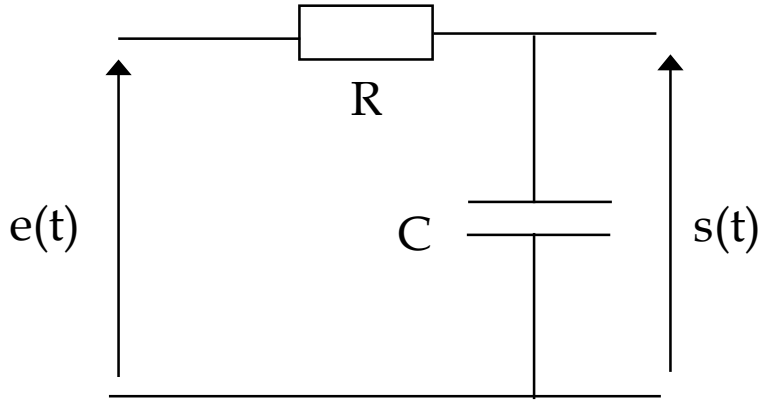
$$Z1(p) = R1$$

$$Z2(p) = R2$$

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{R2}{R1 + R2}$$

Méthode des impédances opérationnelles
Exemples

- Filtre RC



Pont diviseur de tension

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{Z2(p)}{Z1(p) + Z2(p)}$$

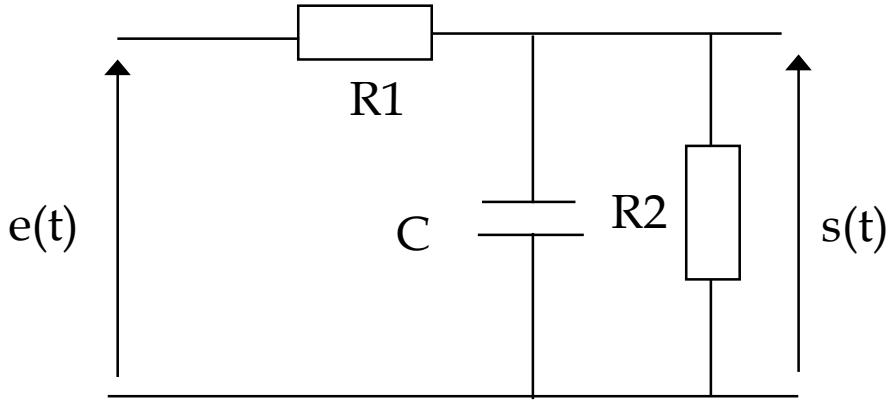
$$Z1(p) = R$$

$$Z2(p) = \frac{1}{Cp}$$

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + RCp}$$

Méthode des impédances opérationnelles
Exemples

- Atténuateur réel



Pont diviseur de tension

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{Z2(p)}{Z1(p) + Z2(p)}$$

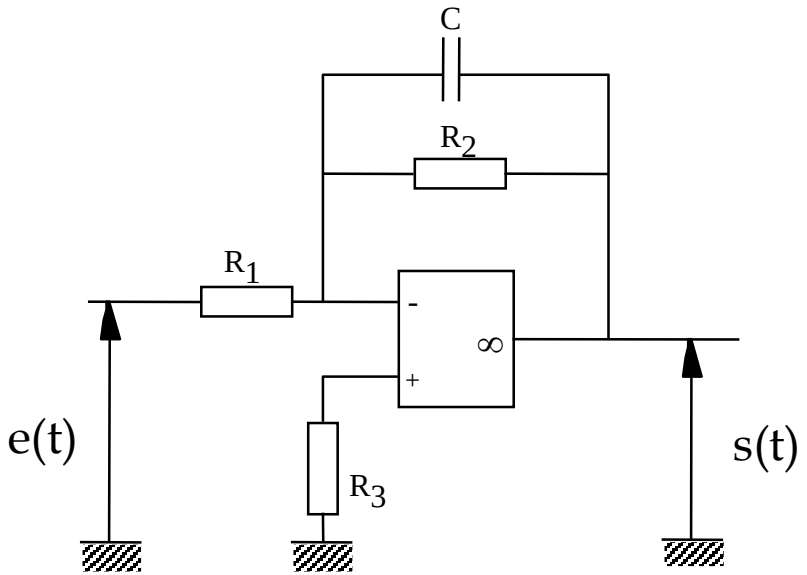
$$Z1(p) = R1$$

$$Z2(p) = \frac{R2}{1 + R2Cp}$$

$$G(p) = \frac{R2}{R1 + R2 + R1R2Cp}$$

Méthode des impédances opérationnelles
Exemples

- <u>Montage à amplificateur opérationnel</u>



Inverseur

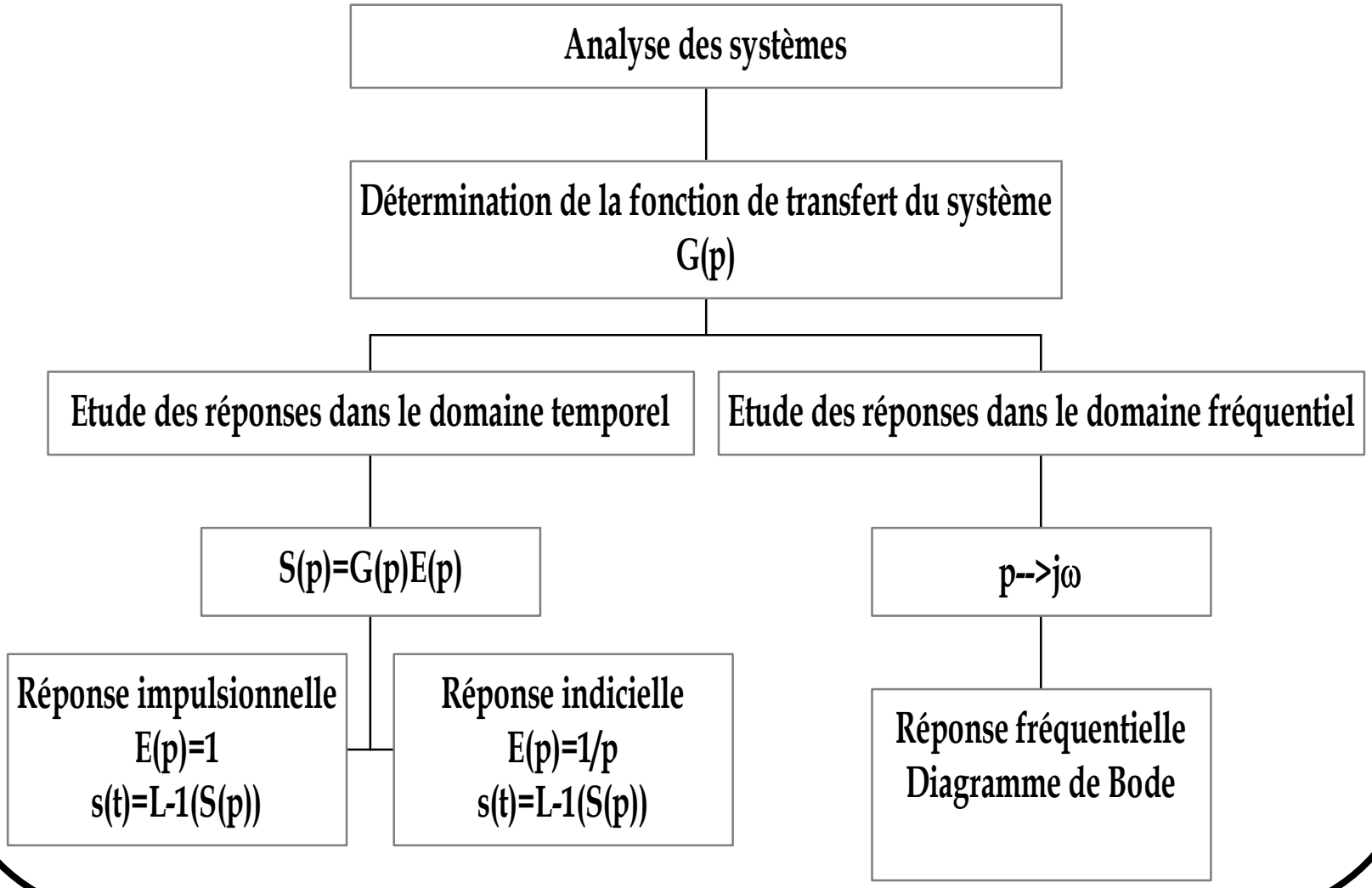
$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = -\frac{Z2(p)}{Z1(p)}$$

$$Z1(p) = R_1$$

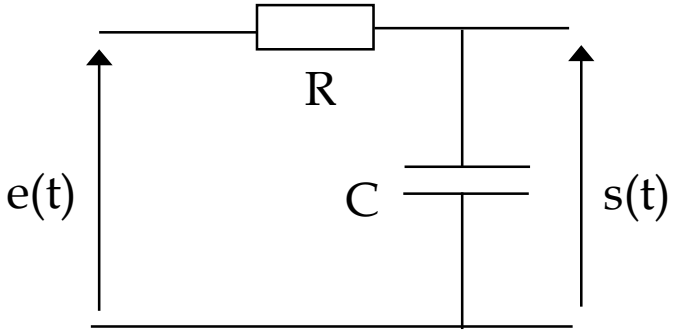
$$Z2(p) = \frac{R_2}{1 + R_2 C p}$$

$$G(p) = -\frac{R_2 / R_1}{1 + R_2 C p}$$

Analyse des systèmes continus



Analyse dans le domaine temporel
Détermination de la réponse indicielle d'un filtre RC



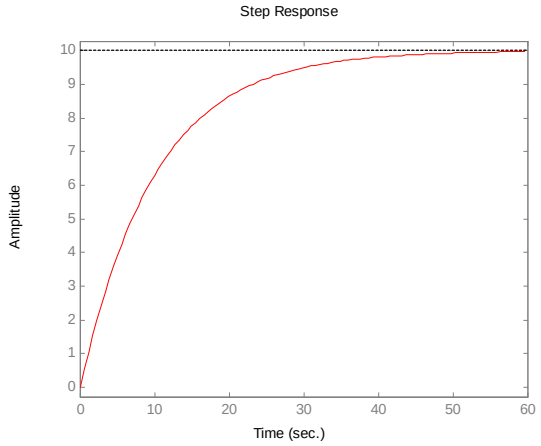
$$RC\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=e(t)$$

$$e(t)=\Gamma(t) \text{ et } s(0)=0$$

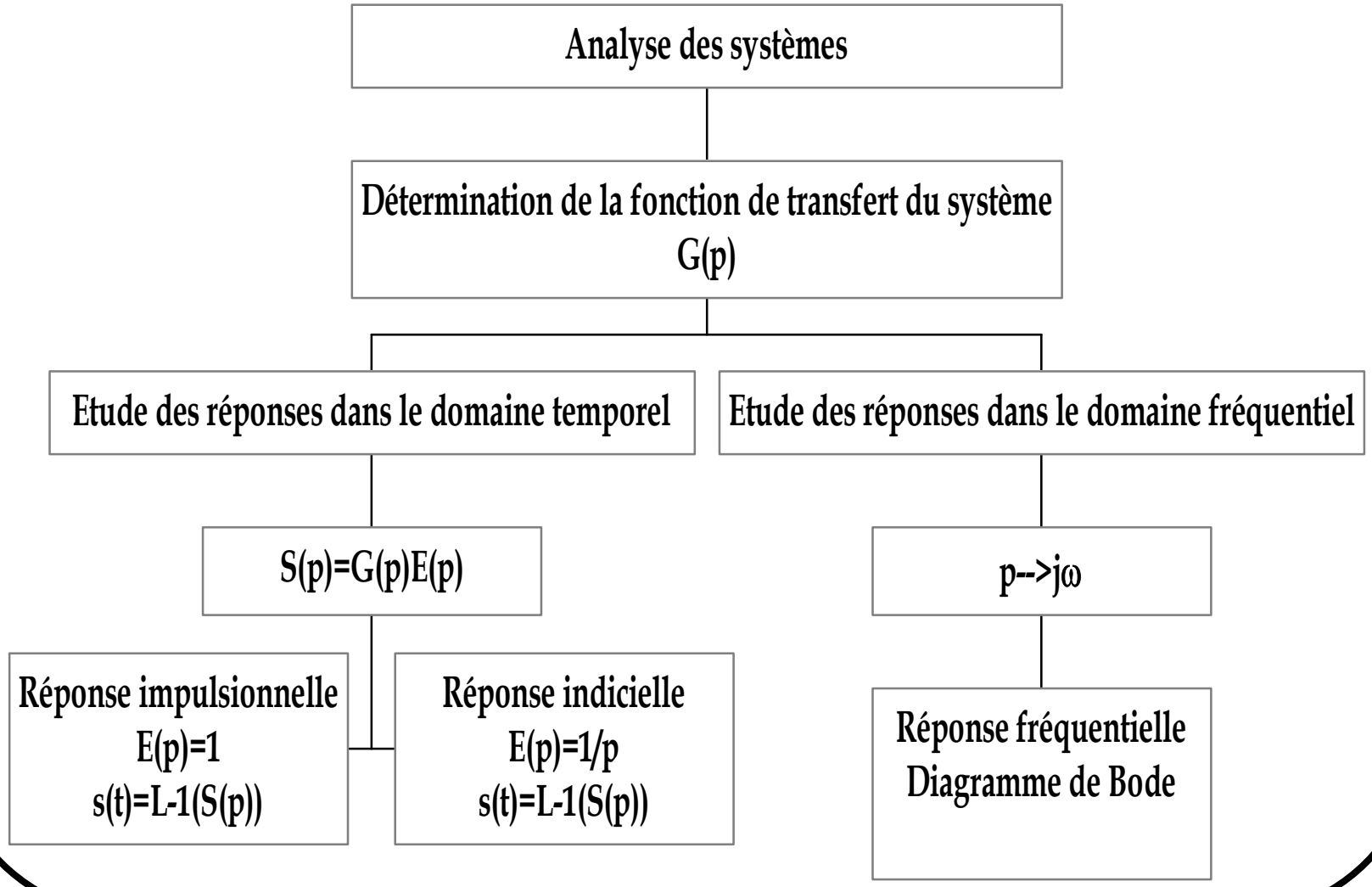
$$G(p)=\frac{1}{1+RCp}$$

$$S(p)=G(p)E(p) \quad \text{avec} \quad E(p)=\frac{1}{p}$$

$$s(t)=\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$



Analyse des systèmes continus



Analyse dans le domaine fréquentiel

- On envoie en entrée une sinusoïde de fréquence f_0

$$e(t) = E\sin(2\pi f_0 t)$$

- La sortie en régime permanent est :

$$s(t) = S\sin(2\pi f_0 t + \varphi)$$

C'est une sinusoïde de même fréquence f_0 que l'entrée mais avec une amplitude et une phase différentes.

- On fait varier la fréquence f_0, l'évolution :

du gain $|G(j\omega)| = \left|\frac{S(j\omega)}{E(j\omega)}\right|$

et de la phase $\varphi(\omega)$

en fonction de la fréquence constituent la réponse fréquentielle du système

Diagramme de BODE

La représentation dans le plan de Bode de G(j ω) consiste à tracer :

$G_{dB} = 20\log(|G(j\omega)|)$

module de G(jω), exprimé en décibels (dB), en fonction de la pulsation ω portée sur une échelle logarithmique,

$\varphi(\omega)=Arg(G(j\omega))$

argument de G(jω), exprimé en degré (ou rad), en fonction de la pulsation ω portée sur une échelle logarithmique.

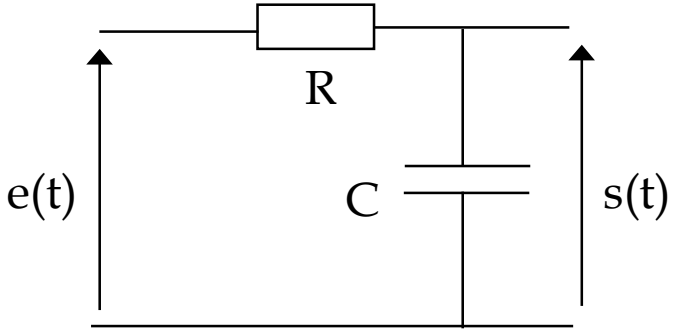
- Intérêt : cascade de systèmes = produit $F_1(j\omega)$ $F_2(j\omega)$ = somme sur diag. Bode (propriétés des logarithmes) de chacun des termes du produit.
- Exemple :

soit $F(p) = F1(p)\ F2(p)$ alors $F_{dB} = F1_{dB} + F2_{dB}$

et $Arg(F(j\omega))=Arg(F1(j\omega)) +Arg(F2(j\omega))$

- les diagrammes asymptotiques permettent d'avoir très rapidement, et sans calcul, l'allure du diagramme de Bode.

Analyse dans le domaine fréquentiel
Détermination de la réponse fréquentielle d'un filtre RC



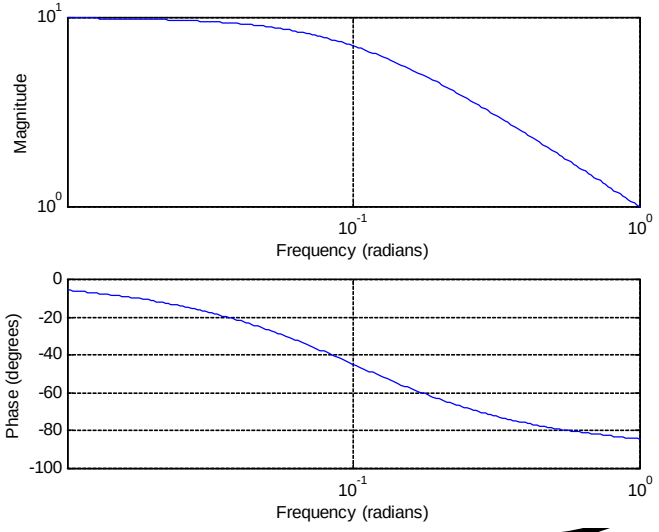
$$RC\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=e(t)$$

$$G(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{1}{1+RC\,p}$$

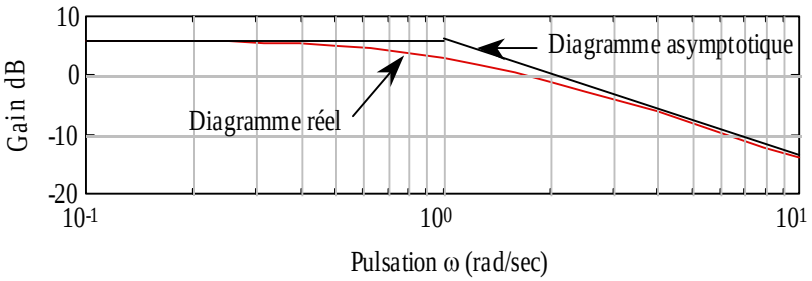
On pose $p=j\omega$ $\quad G(j\omega)=\left|G(j\omega)\right|e^{jArg(G(j\omega))}$

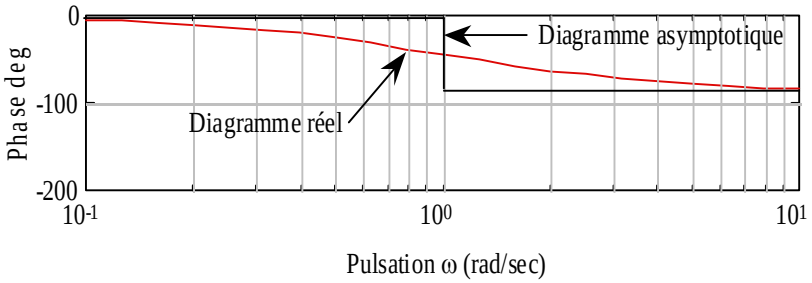
$$\left|G(j\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$$

$$Arg(G(j\omega))=-Arc\tan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$



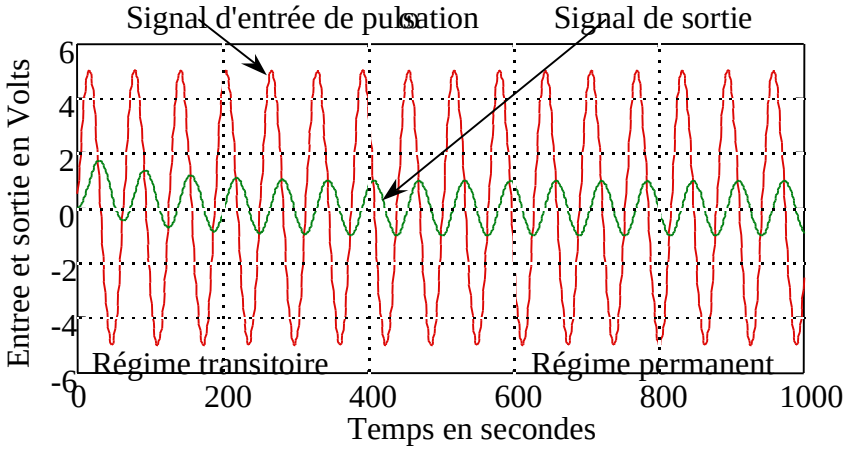
Réponse fréquentielle

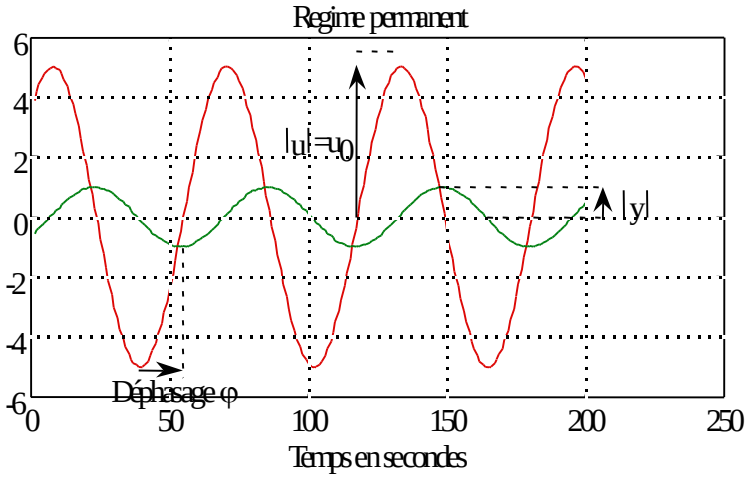




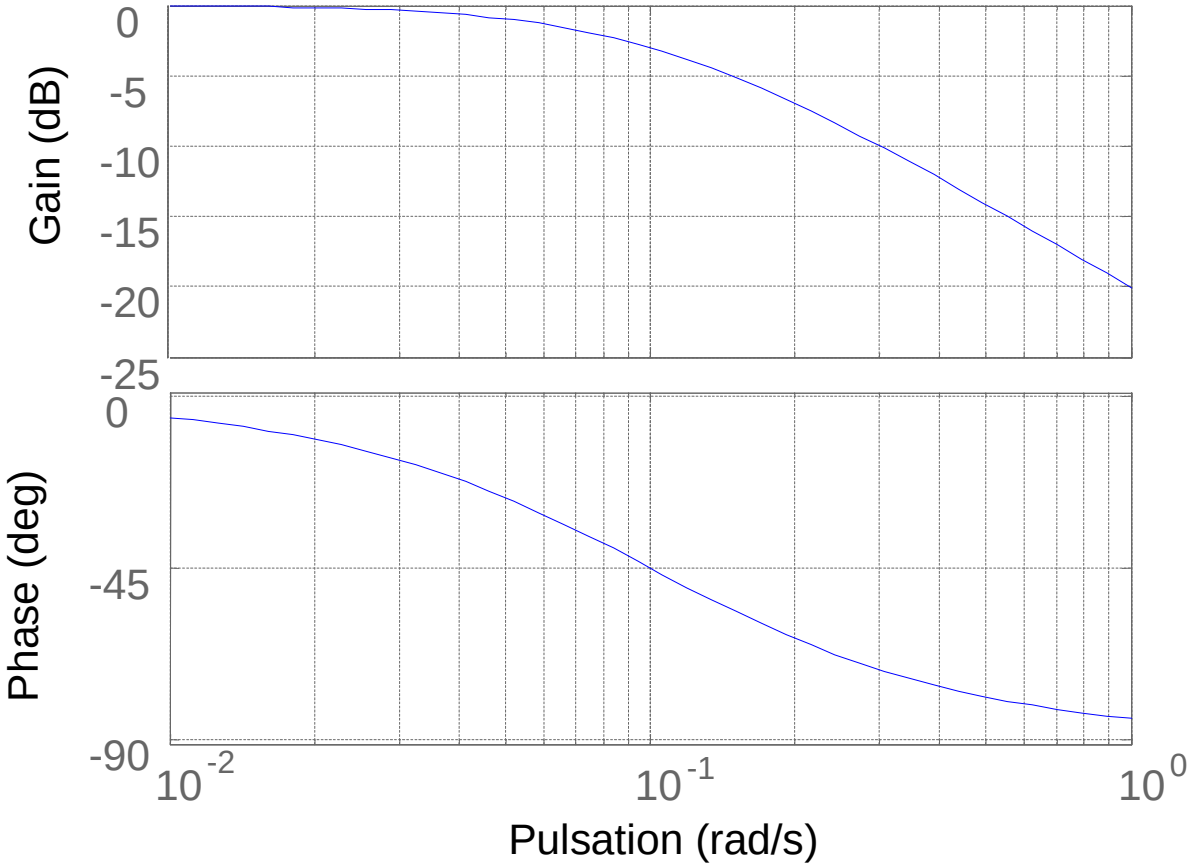
$$G_{dB} = 20\log_{10}|G(j\omega)|$$

$$\varphi(\omega)$$





Analyse d'un diagramme de Bode



Déterminer les caractéristiques du système représenté sur ce diagramme de Bode : ordre, gain, pulsation de coupure, type de filtre

Analyse d'un diagramme de Bode

$$G_{dB} = 20\log_{10}|G(j\omega)|$$

$$G_{dB} = 20\log_{10}\left|\frac{S(j\omega)}{E(j\omega)}\right|$$

$$\text{d'où} \quad \left|\frac{S(j\omega)}{E(j\omega)}\right| = 10^{\left(\frac{G_{dB}}{20}\right)}$$

$$|S(j\omega)| = 10^{\left(\frac{G_{dB}}{20}\right)}|E(j\omega)|$$

$$\varphi(\omega) = \text{Arg}(G(j\omega))$$

$$s(t) = |S(j\omega_0)|\sin(\omega_0 t + \varphi(\omega_0))$$

pour $\omega_0 = 0.1\ \text{rad/s} \quad G_{dB} = -3\text{dB}$

$$\text{d'où} \quad \left|\frac{S(j\omega_0)}{E(j\omega_0)}\right| = 10^{\left(\frac{-3}{20}\right)} = 0.7079$$

$$|S(j\omega_0)| = 0.7079|E(j\omega)|$$

$$\varphi(\omega_0) = -45° = -\frac{\pi}{2}$$

$$s(t) = 0.7079\sin(\omega_0 t - \frac{\pi}{2})$$

Analyse d'un diagramme de Bode

