Systèmes du 2ème ordre

- Systèmes décrits par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du 2ème ordre

$$a_2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 \frac{d^2u(t)}{dt^2} + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

$$G(p) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$$

Systèmes du 2ème ordre de type passe-bas

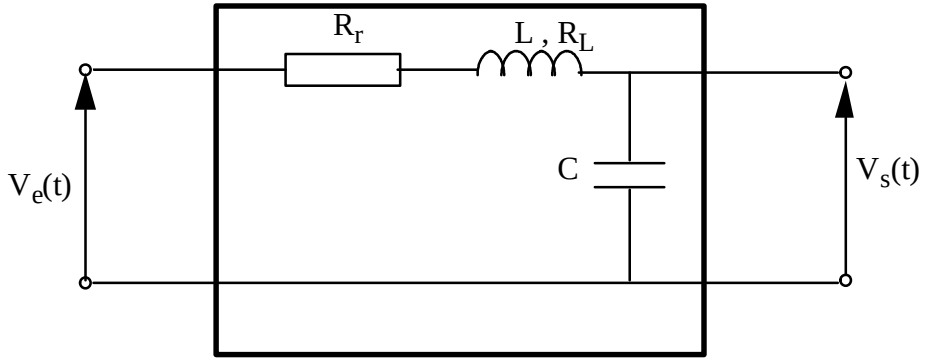
- Systèmes décrits par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du 2ème ordre

$$a_2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

- Gain statique K
- Pulsation propre non amortie ω_0
- Coefficient d'amortissement z

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2z}{\omega_0} p + 1}$$

Systèmes du 2ème ordre de type passe-bas – Exemple classique



C = 1 μF

L = 1 H
R_L = 350 Ω

$$G(p) = \frac{1}{LCp^2 + (R_r + R_L)Cp + 1} = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2z}{\omega_0}p + 1}$$

- Gain statique K=1
- Pulsation propre non amortie $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- Coefficient d'amortissement $z = \frac{1}{2}(R_r + R_L)\sqrt{\frac{C}{L}}$

Classes de systèmes du 2ème ordre

- 3 cas distincts dépendant des pôles de la fonction de transfert. Le discriminant est donné par :

$$\Delta = \frac{4z^2}{\omega_0^2} - \frac{4}{\omega_0^2} = \frac{4}{\omega_0^2}\left(z^2 - 1\right)$$

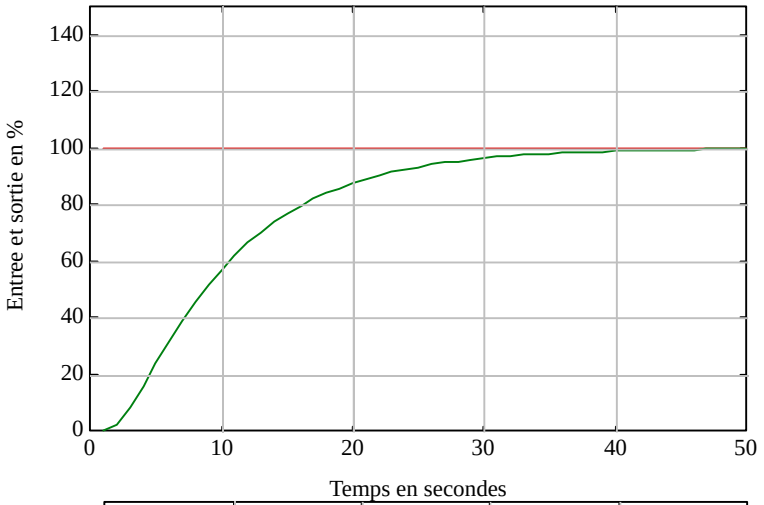
1er cas	$\Delta > 0$	$z > 1$	Système apériodique	2 pôles réels négatifs
2ème cas	$\Delta = 0$	$z = 1$	Système critique	1 pôle double réel négatif
3ème cas	$\Delta < 0$	$0 < z < 1$	Système pseudo-périodique	2 pôles complexes conjugués

- $z=0$ système purement oscillant (à la pulsation ω_0)
- $z < 0$ systèmes instables non physiques

2ème ordre - Réponses indicielles

- Système apériodique

$$y(t) = K\left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{\frac{-t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{\frac{-t}{T_2}}\right)$$

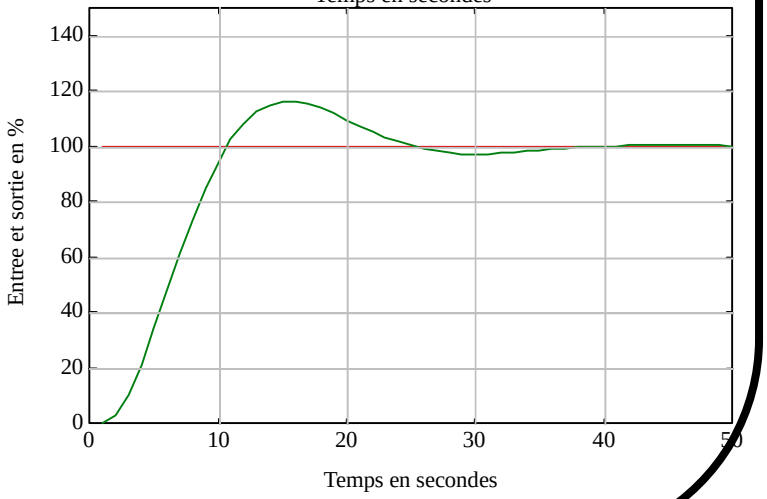


- Système pseudo-périodique

$$y(t) = K\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} e^{-z\omega_0 t} \sin\left(\omega_0 t\sqrt{1 - z^2} + \varphi\right)\right)$$

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - z^2}$$

$$\cos\varphi = -z$$



2ème ordre Relations caractéristiques

- Temps du 1er dépassement

$$t_{D1} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - z^2}}$$

- Pseudo-période

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - z^2}}$$

- Taux de dépassement

$$D_1\% = 100 e^{-\frac{\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}$$

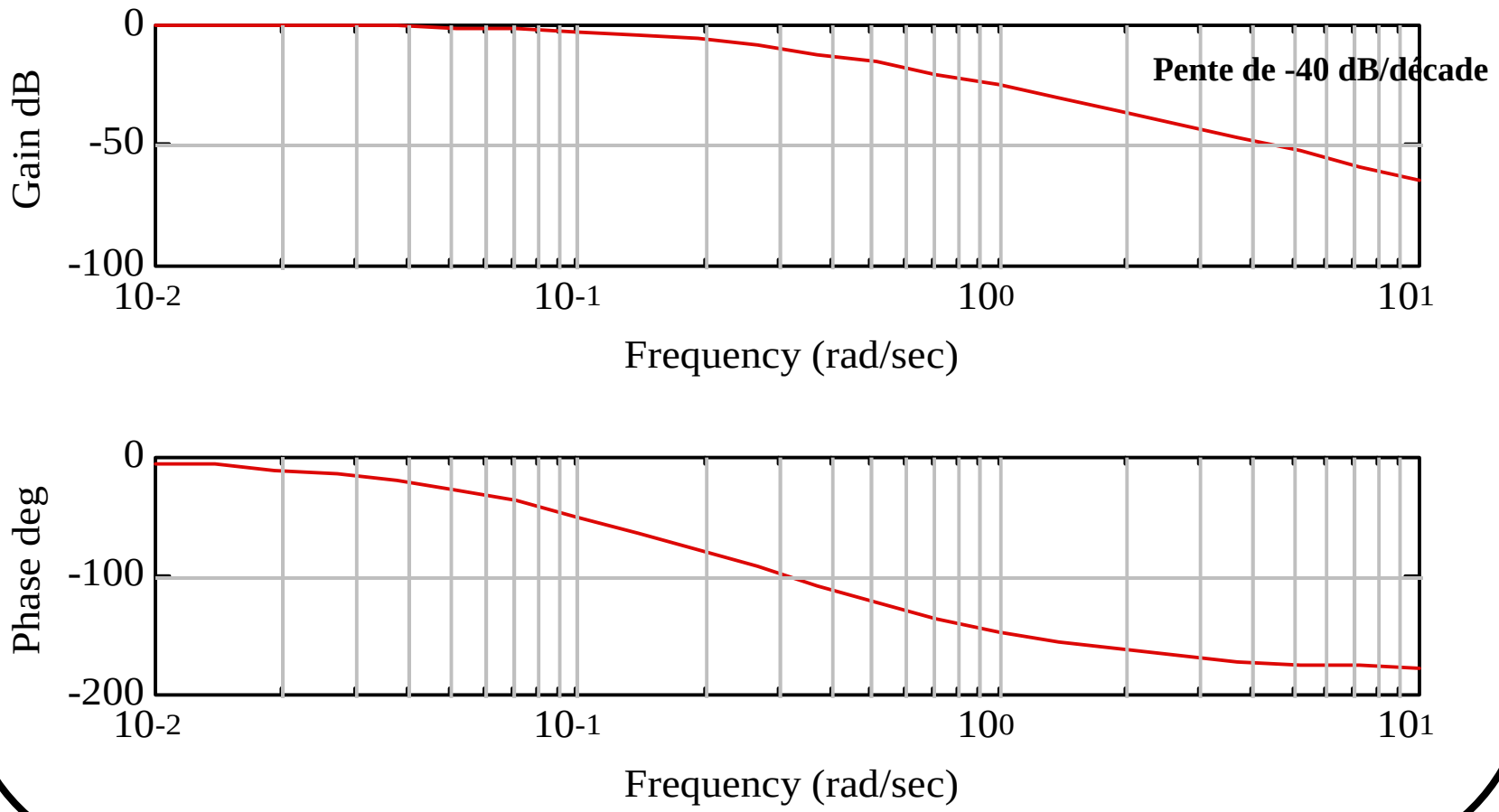
- Pseudo-pulsation

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - z^2}$$

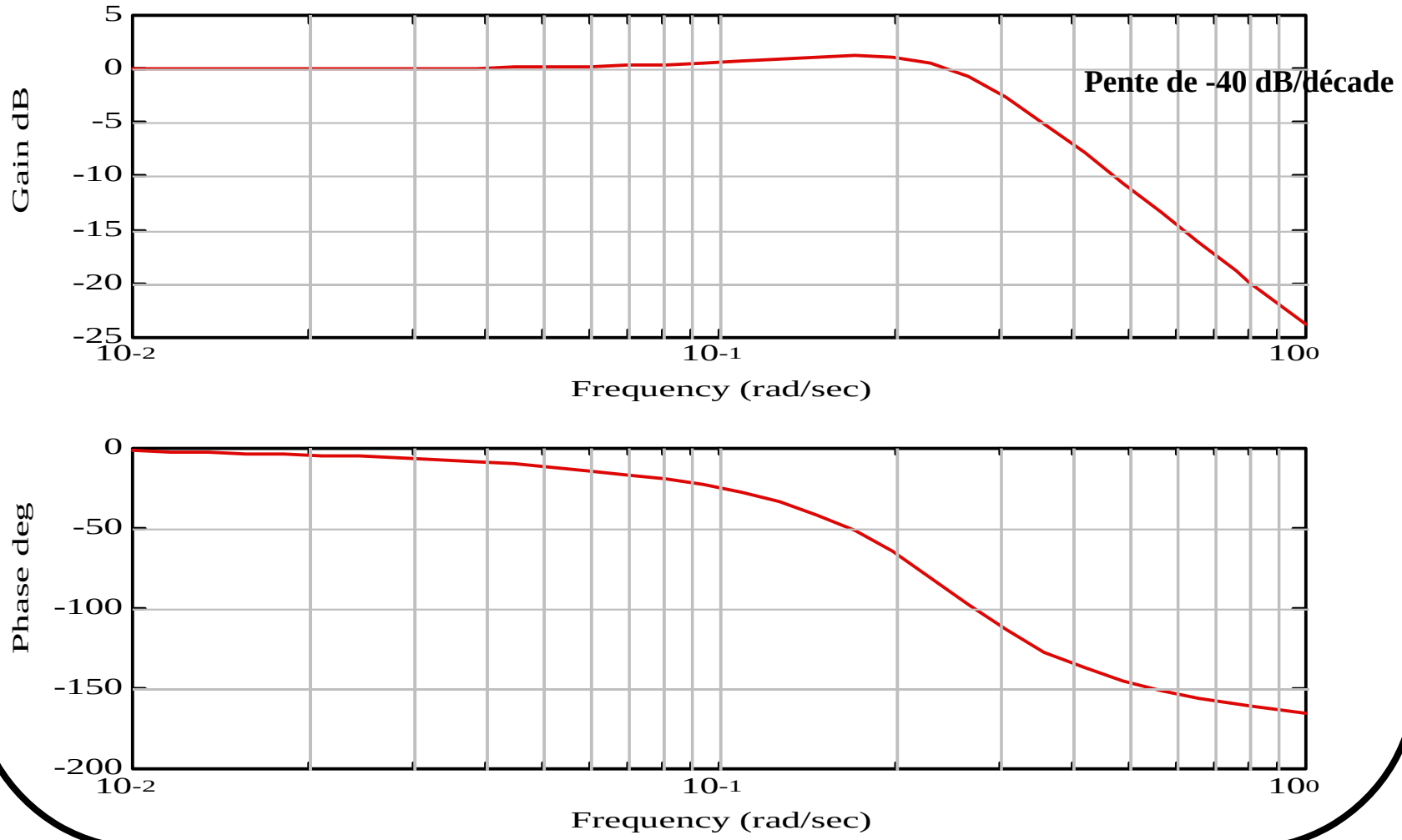
- Pulsation de résonance

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2z^2}$$

Diag. Bode - 2ème ordre apériodique



Bode 2ème ordre pseudo-périodique



Bande passante
Fréquence de coupure

- **Pulsation de coupure ω_c** à -3db : fréquence à laquelle un système de type passe-bas présente une amplitude inférieure de 3 dB à celle du régime continu
  - Système du 1er ordre $\omega_c = 1/T$
  - Système du second ordre

$$\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2z^2} < \omega_p = \omega_0\sqrt{1-z^2} < \omega_0 < \omega_c$$

- la fréquence de coupure caractérise la **bande passante** d'un système passe-bas

  une bande passante élevée correspond à une constante de temps faible (systèmes rapides)

Diagramme de Bode asymptotique des filtres de base du 2ème ordre

- Filtres de base
  - Filtre passe-bas du 2ème ordre :

$$G(p) = \frac{1}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2z}{\omega_0}p + 1}$$

  - Filtre amplificateur HF du 2ème ordre :

$$G(p) = \frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2z}{\omega_0}p + 1$$

Diagramme de Bode asymptotique des filtres de base

- Filtre passe-bas du 2ème ordre

$$G(p) = \frac{1}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2z}{\omega_0}p + 1}$$

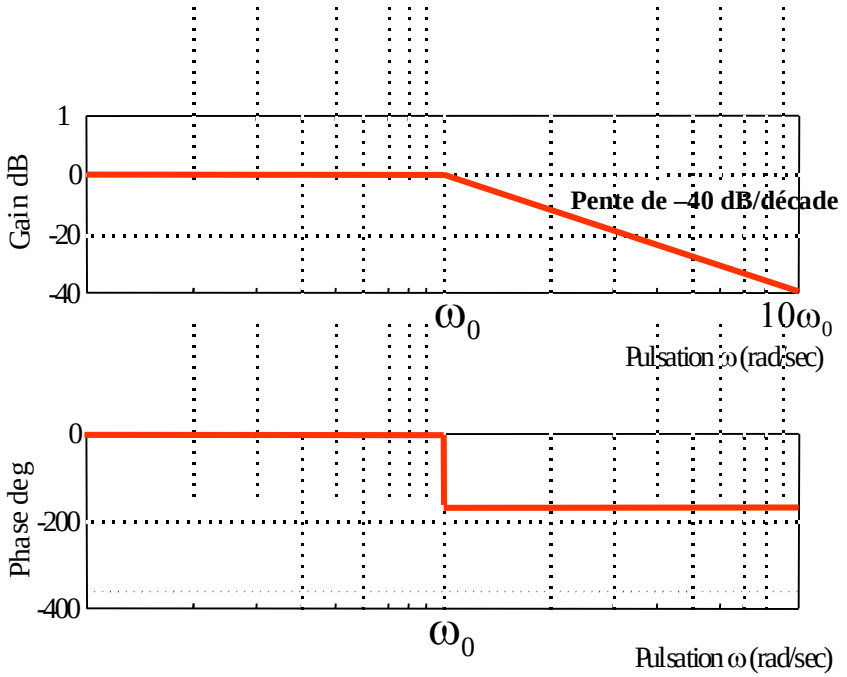


Diagramme de Bode asymptotique des filtres de base

- Filtre amplificateur HF du 2ème ordre

$$G(p) = \frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2z}{\omega_0} p + 1$$

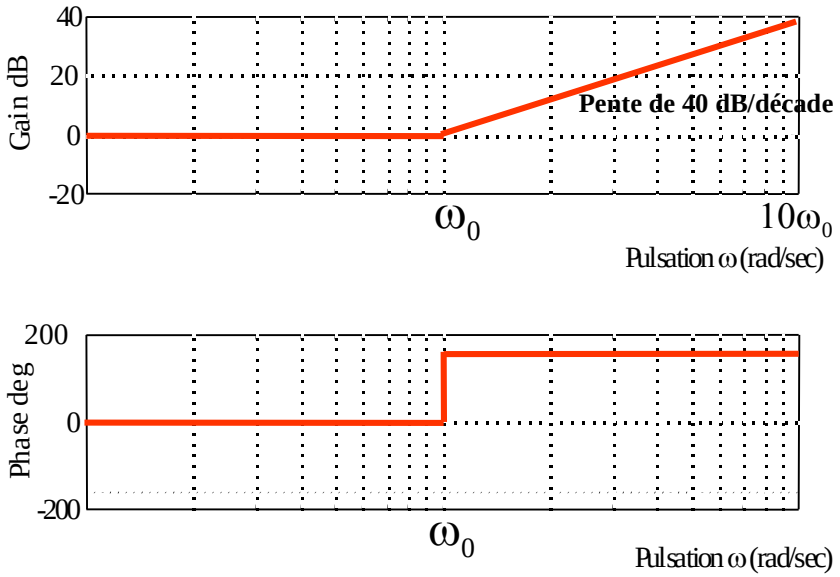


Diagramme de Bode asymptotique tracé rapide

- Tracer le diagramme de Bode asymptotique du filtre suivant :

$$G(p) = p\frac{1+10p}{0.01p^2+0.2p+1}$$

$$G(p) = p\times\left(1+\frac{p}{0.1}\right)\times\left(\frac{1}{\left(\frac{p}{10}\right)^2+2\frac{p}{10}+1}\right)$$
$$= G_1(p)\times G_2(p)\times G_3(p)$$

$$\omega_{c1} = 1\,\text{rad/sec}$$
$$\omega_{c2} = 0.1\,\text{rad/sec}$$
$$\omega_{c3} = 10\,\text{rad/sec}$$

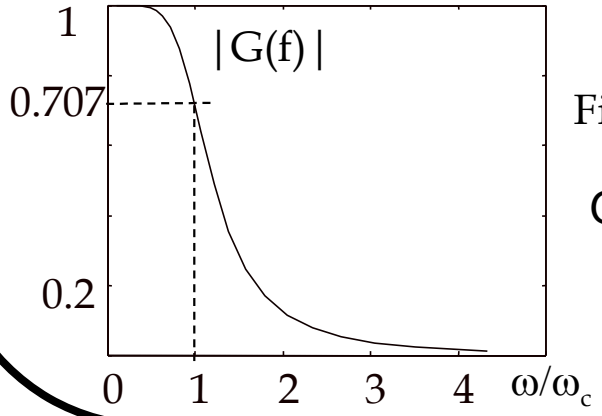
$$G(dB) = G_1(dB) + G_2(dB) + G_3(dB)$$
$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$$

Caractéristiques des filtres analogiques de Butterworth

- Réponse fréquentielle en amplitude ***plate*** dans la bande passante

$$G(p) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(p - p_i)} \qquad |G(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n}}$$

$$G(p) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n/2} \frac{1}{p^2 + 2\cos((2i-1)\pi/2n)p + 1} & \text{pour n pair} \\ \frac{1}{p+1}\prod_{i=1}^{(n-1)/2} \frac{1}{p^2 + 2\cos(i\pi/n)p + 1} & \text{pour n impair} \end{cases}$$

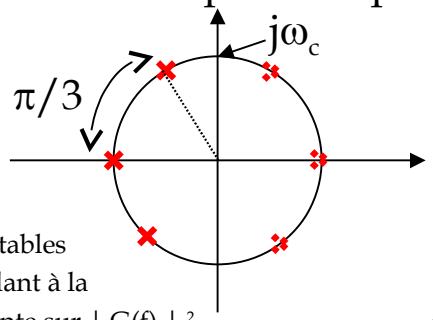


n=3

Filtre passe-bas du 3ème ordre

$$G(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2+p+1)}$$

Plan complexe en p



✖ Pôles stables répondant à la contrainte sur | G(f) | ²

Information sur les TP de TdS

- TP 1 – Initiation à Matlab (synthèse d'une gamme musicale)
- TP 2 – Filtrage analogique. Applications à des signaux audio-numériques
- TP3 – Signaux aléatoires et corrélation