

Université Joseph Fourier - Grenoble
IUT de Grenoble
Département RESEAUX et TELECOMMUNICATIONS



1ère année

MODULE M4

Transformée de Laplace

Tables de transformées des signaux usuels

--

Prise de notes partielle

--

Enoncés de TD

Jean-Marc THIRIET

Année 2011-2012

Tables de transformée de Laplace des signaux usuels

domaine temporel	Domaine symbolique
$\delta(t)$	1
$\Gamma(t)$	$\frac{1}{p}$
$r(t)$	$\frac{1}{p^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p + \alpha}$
$\sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$
$\cos \omega_0 t$	$\frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$
$\frac{A t^{n-1} e^{-\alpha t}}{(n-1)!}$	$\frac{A}{(p + \alpha)^n}$
$t \sin \omega_0 t$	$\frac{2 \omega_0 p}{(p^2 + \omega_0^2)^2}$
$t \cos \omega_0 t$	$\frac{p - \omega_0}{(p^2 + \omega_0^2)^2}$
$t e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$
$\sin(\omega_0 t + \phi)$	$\frac{p \sin \phi + \omega_0 \cos \phi}{p^2 + \omega_0^2}$
$\cos(\omega_0 t + \phi)$	$\frac{p \cos \phi - \omega_0 \sin \phi}{p^2 + \omega_0^2}$

--	--

Chap. 1 – Définition de la transformée – transformées simples

1.1 Systèmes analogiques

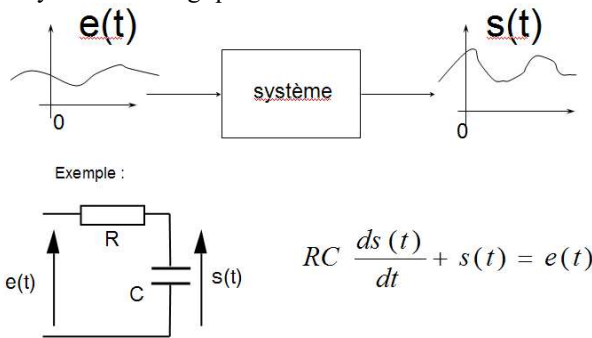


Figure 1.1 : Exemple de système : relation entre entrée et sortie



- 23 mars 1749 – 5 mars 1827
- Grand savant français
- Mathématiques, Astronomie, Physique, Philosophie des Sciences
- Transformée de Laplace : méthode permettant de résoudre facilement les équations différentielles ordinaires à coefficients constants

Figure 1.2 : Transformée de Laplace, Pierre-Simon de Laplace

1.2 Intérêt de la transformée de Laplace

- Outil mathématique facilitant l'analyse des systèmes à temps continu
- Démarche méthodologique (outil mathématique) permettant de résoudre « facilement » des équations différentielles
 - en transformant les équations différentielles en équations polynomiales.

Démarche :

1. Transformation de Laplace
2. Résolution du problème (Ex : étude des réponses temporelles et fréquentielles d'un système)
3. Transformation de Laplace inverse

1.3 Définition de la Transformée de Laplace

Soit un signal à temps continu causal $s(t)$, sa transformée de Laplace s'écrit :

$$L\{s(t)\} = S(p) = \int_0^{+\infty} s(t)e^{-pt} dt$$

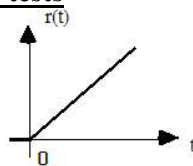
La transformée inverse de Laplace s'écrit dans le cas général : $L^{-1}\{S(p)\} = s(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} S(p)e^{pt} dp$

$L\{s(t)\} = S(p)$ On appelle $S(p)$ la transformée de Laplace de $s(t)$.

1.4 Transformée de Laplace des signaux-tests

- **La rampe unitaire $r(t)$**

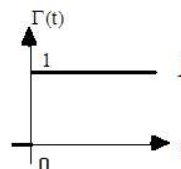
$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ t & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$



$$L\{r(t)\} = \frac{1}{p^2}$$

- **L'échelon unitaire $\Gamma(t)$**

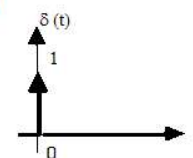
$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$



$$L\{\Gamma(t)\} = \frac{1}{p}$$

- **L'impulsion de Dirac $\delta(t)$**

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \neq 0 \\ 1 & \text{pour } t = 0 \end{cases}$$



$$L\{\delta(t)\} = 1$$

- **L'exponentielle décroissante**

$$L\{e^{-\alpha t}\} = \frac{1}{p + \alpha}$$

Chap. 2 – Transformées complexes

2.2 Détermination de la Transformée de Laplace par identification à des fonctions et utilisation des tables

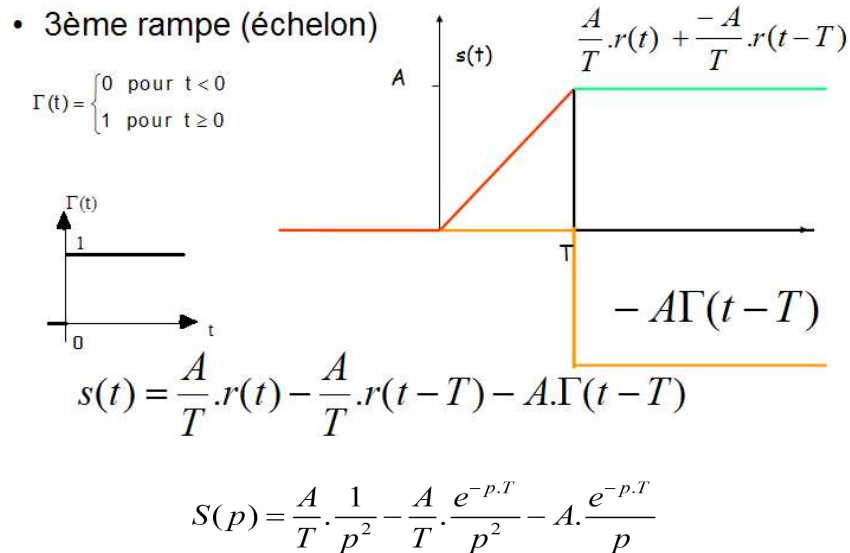


Figure 2.1 : Transformée d'une fonction donnée sous forme graphique

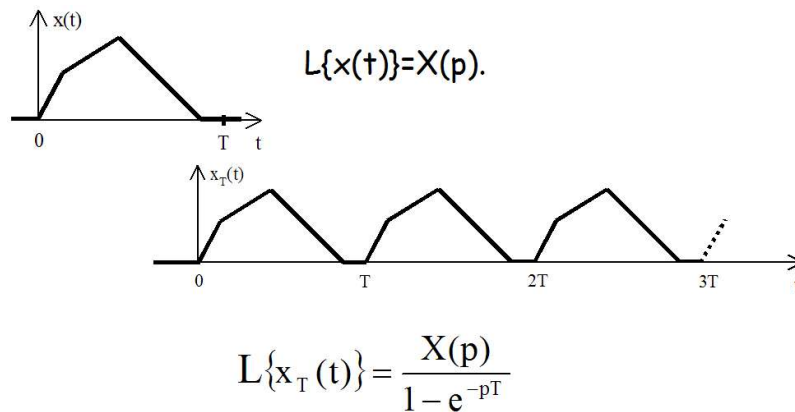


Figure 2.2 : Transformée de Laplace d'un signal périodique

Chap. 3 – Transformées inverses et résolutions d'équations différentielles

3.1 Inversion de la Transformée de Laplace

La transformée inverse de Laplace s'écrit dans le cas général :

$$L^{-1}\{S(p)\} = s(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} S(p) e^{pt} dp$$

Voir aussi page 2 la décomposition en éléments simples

3.2 Résolution d'équations différentielles par utilisation de la transformée de Laplace

- Dans le cas où l'ordre de l'équation différentielle est supérieur à 2, la résolution d'équations différentielles devient compliquée. Il est préférable dans ce cas d'utiliser une procédure utilisant la transformée de Laplace.
- La procédure de résolution est alors la suivante :
 - 1. Appliquer la transformée de Laplace aux 2 membres de l'équation différentielle en $x(t)$
 - 2. Calculer $X(p)$ en utilisant la table de transformée et les propriétés de la transformée de Laplace
 - 3. Décomposer $X(p)$ en éléments simples puis utiliser la table de transformée pour obtenir $x(t)$ par transformée inverse

Chap. 4 – Etude d'un système analogique – système du premier ordre

4.1 Etude d'un système analogique – Fonction de transfert

- Soit l'équation différentielle exprimant la relation entre le signal d'entrée $e(t)$ et le signal $s(t)$ d'un système :

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = b_0 e(t) + b_1 \frac{de(t)}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m}$$

- En supposant les CI nulles, appliquer la transformée de Laplace aux 2 membres de l'équation en utilisant :

$$L\left\{\frac{d^i x(t)}{dt^i}\right\} = p^i \cdot X(p)$$

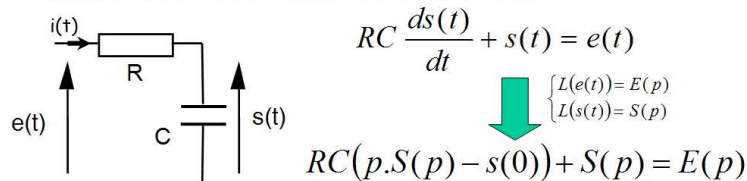
$$(a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n) S(p) = (b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m) E(p)$$

Fonction de transfert

$$G(p) = \left[\frac{S(p)}{E(p)} \right]_{C_I=0} = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j p^j}{\sum_{i=0}^n a_i p^i}$$

Figure 4.1 : Relation entre transformée de Laplace et équation différentielle et fonction de transfert

- Déterminer la fonction de transfert associée à un circuit RC



On suppose que les conditions initiales sont nulles, on peut alors écrire

$$(RCp + 1).S(p) = E(p)$$

Or $S(p) = G(p).E(p)$ d'où $G(p) = \left[\frac{S(p)}{E(p)} \right]_{C_I=0} = \frac{1}{1 + RCp}$.

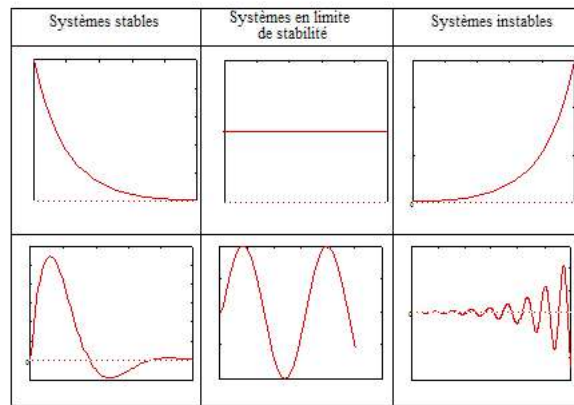
Figure 4.2 : Relation entre transformée de Laplace et équation différentielle – Fonction de transfert (exemple)

4.2 Stabilité d'un système à temps continu

- Définition

- Un système est stable si sa réponse à une entrée bornée dans le temps est elle-même bornée dans le temps

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = 0$$

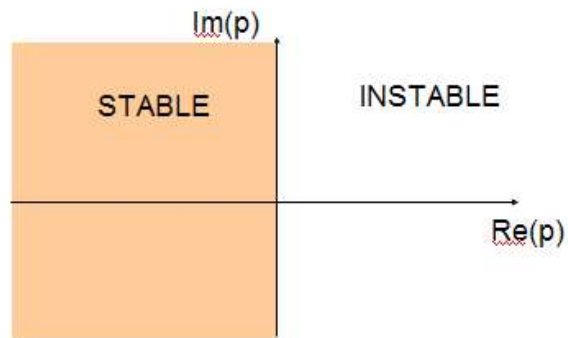


- Soit un système à temps continu décrit par :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j p^j}{\sum_{i=0}^n a_i p^i}$$

- Le système est stable si tous les pôles p_i : racine du dénominateur de $G(p)$ sont à partie réelle négative

$$\text{Re}(p_i) < 0$$



- Outil mathématique facilitant l'analyse des systèmes à temps continu

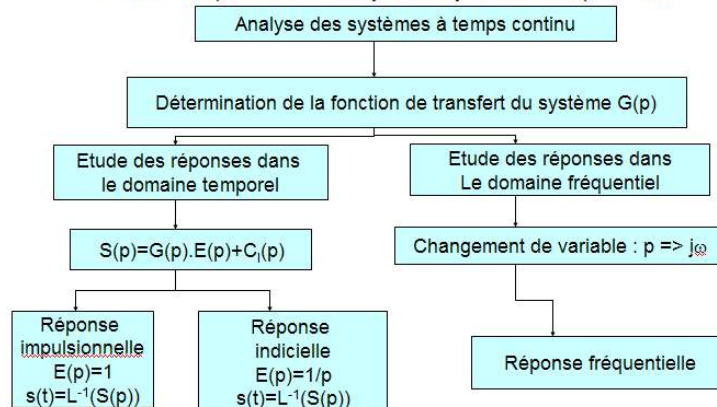


Figure 4.3 : Utilisation de la transformée de Laplace pour l'étude des systèmes

4.3 Analyse des systèmes du premier ordre

Equation générale d'un système du premier ordre

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds}{dt} = b_0 e(t) + b_1 \frac{de}{dt}$$

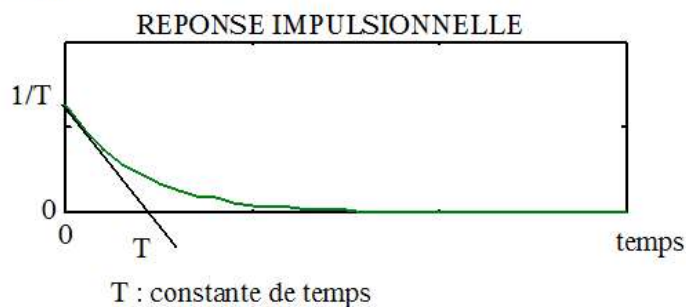
En respectant les propriétés et tables de transformée de Laplace, les équations précédentes deviennent :

$$a_0 S(p) + a_1 (pS(p) - s(0)) = b_0 E(p) + b_1 (pE(p) - e(0))$$

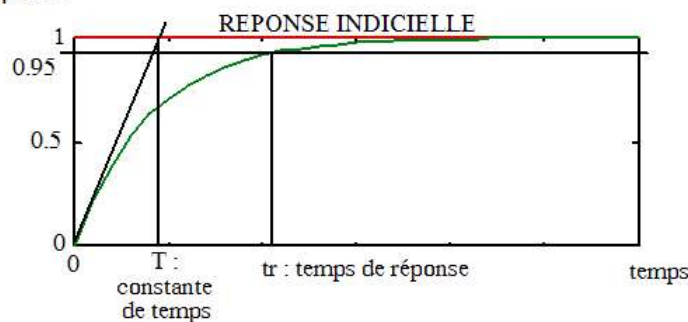
On suppose que les **conditions initiales sont nulles**, on peut alors écrire

$$G(p) = \left[\frac{S(p)}{E(p)} \right]_{C_I=0} = \frac{b_0 + b_1 p}{a_0 + a_1 p}$$

- Le signal d'entrée est $x(t) = \delta(t)$, dans le domaine symbolique $X(p) = 1$.
 - La sortie $Y(p) = G(p).X(p) = G(p)$
- En décomposant en éléments simples et en utilisant les transformées inverses de Laplace, on pourra exprimer la réponse impulsionnelle dans le domaine temporel.



- Le signal d'entrée est $x(t) = \Gamma(t)$, dans le domaine symbolique $X(p) = 1/p$.
La sortie $Y(p) = G(p).X(p) = \frac{G(p)}{p}$
- En décomposant en éléments simples et en utilisant les transformées inverses de Laplace, on pourra exprimer la réponse indicielle dans le domaine temporel.



Eude asymptotique

- **quand ω tend vers $+\infty$, G tend vers 0 donc G_{dB} tend vers $-\infty$.** On remarque que si ω tend vers $+\infty$, $G_{dB} \approx 20 \cdot \log \frac{1}{T \cdot \omega} = -20 \cdot \log T - 20 \cdot \log \omega$ qui est l'équation d'une droite en $\log \omega$ de coefficient directeur -20 et passant par le point $\omega = 1/T$. Cette droite est asymptote à la courbe réelle.
- Pour $\omega_2 = 10 \cdot \omega_1$, ce qui représente une décade, on a :
- $G_{dB2} - G_{dB1} = -20 \cdot \log \omega_2 + 20 \cdot \log \omega_1 = 20 \cdot (-\log(10 \cdot \omega_1) + \log \omega_1) = 20 \cdot (-\log(10) - \log(\omega_1) + \log(\omega_1)) = -20 \log 10 = -20 \text{ dB}$. On dit que cette droite est une droite de coefficient -20 dB/décade. Une pente de 20 ou -20 dB par décade caractérise un premier ordre. La valeur $\omega_c = 1/T$ s'appelle la pulsation de coupure. C'est la valeur pour laquelle l'atténuation est de -3 dB autrement dit la valeur pour laquelle l'amplitude du signal est divisée par $\sqrt{2}$ car $20 \cdot \log(1/\sqrt{2}) \approx -3 \text{ dB}$.

- **quand ω tend vers 0, G tend vers 1 donc G_{dB} tend vers 0.** On a donc une asymptote horizontale.

- Etude de la phase :

$$\varphi = \arg(G(j\omega)) = \arg(1) - \arg(1 + jT\omega)$$

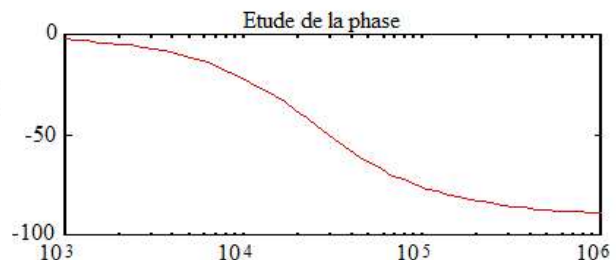
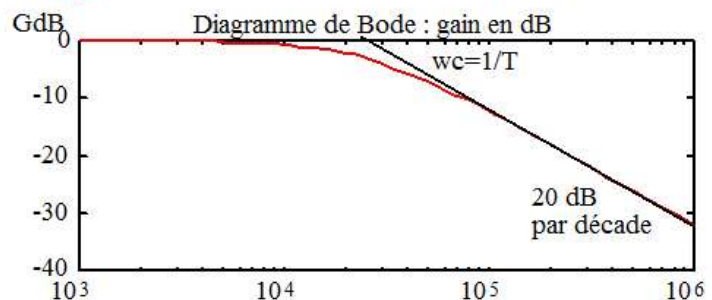
$$\text{Arctg}(0) - \text{Arctg}(T\omega) = 0 - \text{Arctg}(T\omega)$$

$$\text{quand } \omega = 0 \quad \left| \quad \text{quand } \omega = 1/T \right.$$

$$\varphi = 0 \quad \left| \quad \varphi = 0 - \text{Arctg}(1) = 0 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{quand } \omega \rightarrow +\infty$$

$$\varphi = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$



Chap. 5 – Etude des systèmes du second ordre

5.1 Analyse des systèmes du second ordre

- Systèmes décrits par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du 2ème ordre

$$a_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_0 e(t)$$

$$G(p) = \frac{b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$$

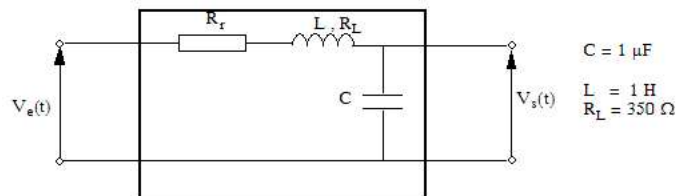
Fonction de transfert à écrire sous la forme

$$G(p) = \frac{K \omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2}$$

Autre forme possible :

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2z}{\omega_0} p + 1}$$

- Gain statique K
- Pulsation propre non amortie ω_0
- Coefficient d'amortissement z



$$G(p) = \frac{1}{LCp^2 + (R_r + R_L)Cp + 1} = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2z}{\omega_0} p + 1}$$

- Gain statique $K=1$
- Pulsation propre non amortie $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- Coefficient d'amortissement $z = \frac{1}{2}(R_r + R_L)\sqrt{\frac{C}{L}}$

5.2 2ème ordre - Réponses indicielles

- Système apériodique

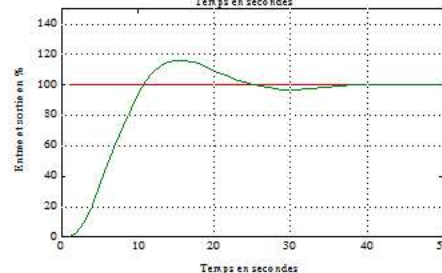
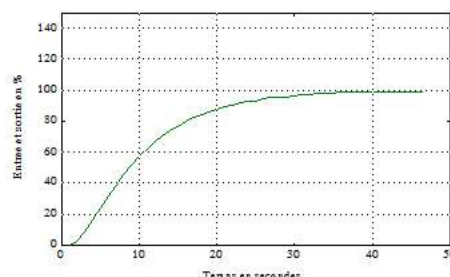
$$y(t) = K \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$$

- Système pseudo-périodique

$$y(t) = K \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_0 t} \sin(\omega_0 t \sqrt{1-z^2} + \varphi) \right)$$

$$\sin \varphi = \sqrt{1-z^2}$$

$$\cos \varphi = -z$$



5.3 2ème ordre - Relations caractéristiques

• Temps du 1er dépassement

$$t_{D1} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - z^2}}$$

• Pseudo-période

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - z^2}}$$

• Taux de dépassement

$$D_1 \% = 100 e^{-\frac{\pi z}{\sqrt{1 - z^2}}}$$

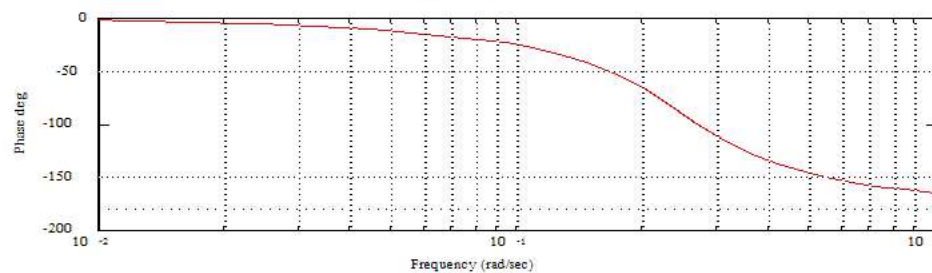
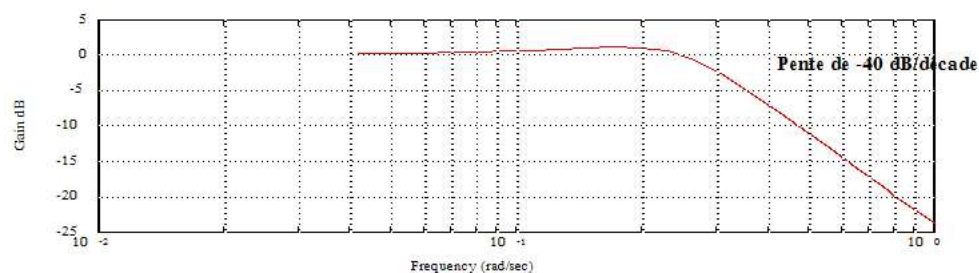
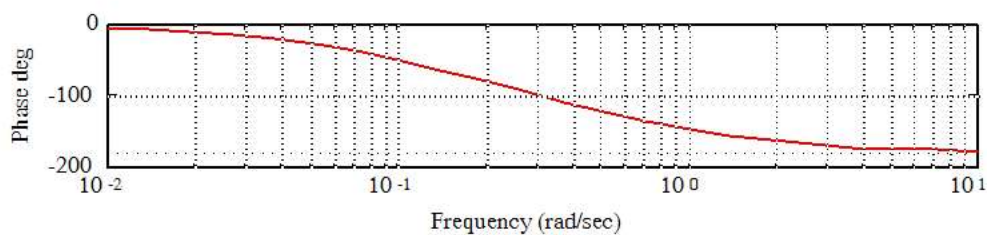
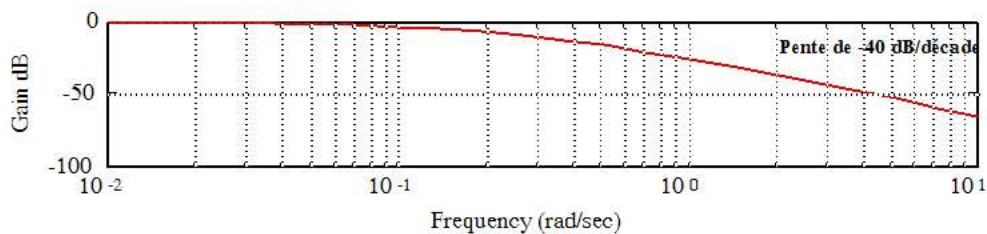
• Pseudo-pulsation

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - z^2}$$

• Pulsation de résonance

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2z^2}$$

5.4 2ème ordre – Réponse fréquentielle – Diagramme de Bode



• **Pulsation de coupure** ω_c à -3dB : fréquence à laquelle un système de type passe-bas présente une amplitude inférieure de 3 dB à celle du régime continu

- Système du 1er ordre $\omega_c = 1/T$
- Système du second ordre

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2z^2} < \omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - z^2} < \omega_0 < \omega_c$$

• la fréquence de coupure caractérise la **bande passante** d'un système passe-bas

une bande passante élevée correspond à une constante de temps faible (systèmes rapides)

- Filtres de base

– Filtre passe-bas du 2ème ordre :

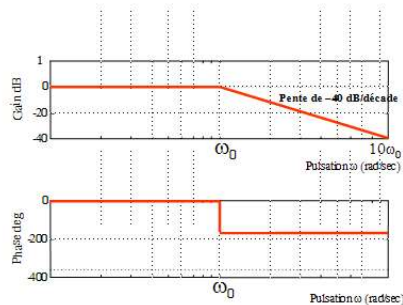
$$G(p) = \frac{1}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2z}{\omega_0} p + 1}$$

– Filtre amplificateur HF du 2ème ordre :

$$G(p) = \frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2z}{\omega_0} p + 1$$

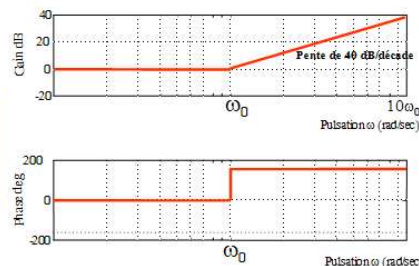
- Filtre passe-bas du 2ème ordre

$$G(p) = \frac{1}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2z}{\omega_0} p + 1}$$



- Filtre amplificateur HF du 2ème ordre

$$G(p) = \frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2z}{\omega_0} p + 1$$



TD 1 : Propriétés des transformées de Laplace – Transformées simples

Ex 1.1 A PREPARER

1.1.a Déterminer la transformée de Laplace de $s(t) = e^{-at}$, en utilisant la formule générale.

1.1.b Déterminer la transformée de Laplace de $r(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ t & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$, en utilisant la formule générale.

Ex 1.2

Déterminer la transformée de Laplace de $r(t-t_0)$ sans utiliser la formule générale, et en utilisant le résultat démontré dans l'exercice 1.1.b et les propriétés de la transformée de Laplace.

Ex 1.3

Déterminer la transformée de Laplace de $s(t) = \sin(\omega_0 t)$, sans utiliser la formule générale, et en utilisant le résultat démontré dans l'exercice 1.1.a.

Ex 1.4 :

Démontrer que : $L\left\{\frac{d^2 s(t)}{dt^2}\right\} = p^2 S(p) - ps(0) - \dot{s}(0)$, connaissant $L\left\{\frac{ds(t)}{dt}\right\}$

Ex 1.5 :

Déterminer la transformée de Laplace de $s(t) = \sin(\omega_0 t).e^{-\alpha t}$

Ex 1.6 :

Déterminer la transformée de Laplace de $s(t) = \omega_0 t \sin(\omega_0 t).e^{-\alpha t}$

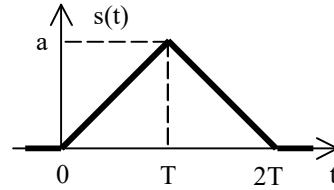
On utilisera deux méthodes pour résoudre cet exercice :

- En partant de la transformée de Laplace de $t \cdot \sin(\omega_0 t)$
- En partant des résultats de l'exercice 1.5

TD 2 : Transformées de Laplace complexes – théorème des valeurs limites

Ex 2.1 A PREPARER:

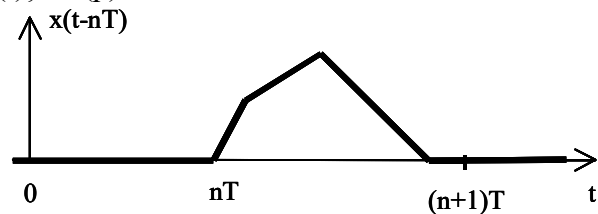
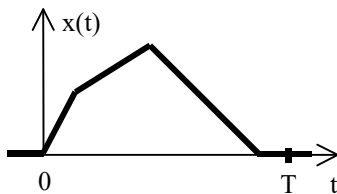
Déterminer la transformée de Laplace du signal dont l'évolution temporelle est représentée ci-contre :



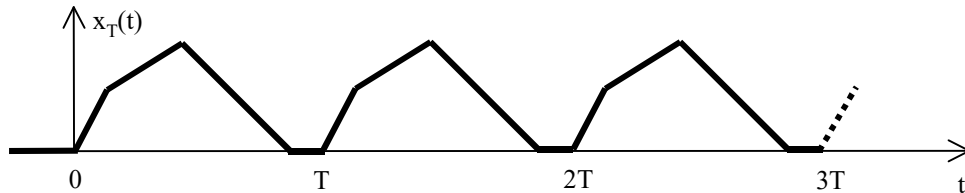
Ex 2.2 :

Soit le signal $x(t)$ nul pour $t < 0$ et pour $t > T$, et quelconque pour $0 < t < T$.

Supposons connue sa transformée de Laplace $L\{x(t)\} = X(p)$.



1. Soit $x(t-nT)$ le signal correspondant à $x(t)$ retardé de nT . Calculer $L\{x(t-nT)\}$
2. On s'intéresse au signal périodique $x_T(t)$ défini par : $x_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(t-nT)$



Calculer $L\{x_T(t)\}$.

3. Démontrer que $L\{x_T(t)\} = \frac{X(p)}{1 - e^{-pT}}$ en partant de la formule de la somme de la série géométrique : $\sum_{n=0}^N a^n = \frac{1 - a^{N+1}}{1 - a}$.

Ex 2.3 :

Déterminer, si elle existe, la valeur finale du signal $s(t)$ ayant pour transformée de Laplace :

$$S(p) = \frac{K}{p^3 + 2p^2 + p}.$$

Ex 2.4

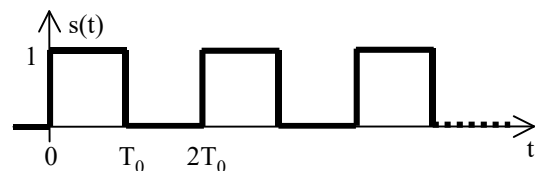
Déterminer, si elle existe, la valeur initiale du signal $s(t)$, sachant que sa transformée de Laplace est

$$S(p) = \frac{\omega_0}{(p + \alpha)^2 + \omega_0^2}.$$

Ex 2.5 :

Déterminer la transformée de Laplace du signal en créneau dont l'évolution temporelle est représentée ci-dessous :

On pourra astucieusement utiliser les résultats obtenus dans l'exercice 2.2.



TD 3 : Transformée inverse de Laplace – résolution d'équations différentielles

Ex 3.1:

Déterminer les signaux originaux ayant pour transformée de Laplace :

A PREPARER 3.1.1. $S_1(p) = \frac{10}{p^2 + 10p + 16}$

3.1.2 $S_2(p) = \frac{1}{(p+2)^3(p+3)}$

3.1.3 $S_3(p) = \frac{p+4}{p^2 + 16}$

Ex 3.2 :

Trouver la solution de l'équation différentielle suivante, pour $t > 0$:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 6 \frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = e^{-7t} \Gamma(t) \quad \text{avec } \dot{y}(0) = y(0) = 0 .$$

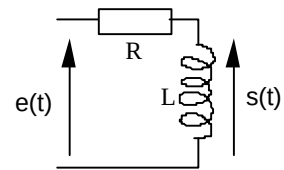
Ex 3.3 :

Exercice facultatif $S_4(p) = \frac{20}{(p^2 + 6p + 25)(p+1)}$

TD 4 : Utilisation de la transformée de Laplace pour l'étude des systèmes à temps continu

Ex 4.1 : Etude d'un système du premier ordre

On considère le montage analogique ci-contre :



- 1) Etablir l'équation différentielle qui lie les tensions $e(t)$ et $s(t)$.
- 2) Etablir l'expression de l'équation donnant $S(p)$ en fonction de $E(p)$ et des conditions initiales.
- 3) Déterminer la fonction de transfert $G(p)$ de ce système.

4) Analyse dans le domaine temporel - Réponse indicielle

$e(t)$ est une tension continue A appliquée à l'instant $t = 0$. Etablir l'expression de la réponse indicielle $s(t)$ lorsque $s(0)$ et $e(0)$ sont quelconques.

En supposant $s(0) = e(0) = 0$, représenter la réponse indicielle de ce filtre, pour $t \geq 0$.

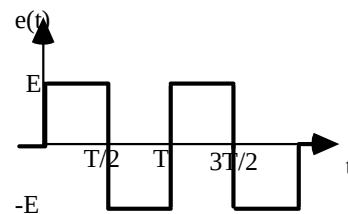
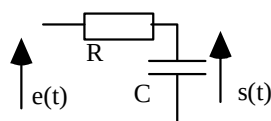
Question subsidiaire : 5) Analyse dans le domaine fréquentiel - Réponse fréquentielle

Déterminer $G(j\omega)$, son module et son argument. Tracer la réponse fréquentielle en amplitude et en phase. En déduire le type de filtrage réalisé et préciser la fréquence de coupure.

en ordonnée, mesuré en dB (sur l'échelle linéaire).

Ex 4.2 ENTRAÎNEMENT : on considère le montage suivant où $e(t)$ est une tension rectangulaire appliquée à l'instant $t = 0$:

- 1) Etablir l'équation différentielle liant les tensions $e(t)$ et $s(t)$. En déduire la fonction de transfert en Laplace.



- 2) Le condensateur étant initialement déchargé, établir l'expression de $s(t)$ entre les instants $t = 0$ et $t = T/2$, puis entre les instants $t = T/2$ et $t = T$ et enfin entre les instants $t = T$ et $t = 3T/2$ en considérant que $\tau = RC \ll T/2$. On considérera ici le signal en créneau comme étant la somme d'échelons retardés.

- 3) Donner l'expression de $s(t)$ entre T et $3T/2$ en calculant directement et en tenant compte des conditions initiales. (facultatif)

- 4) Représenter l'allure de la tension $s(t)$.

On se servira de la transformée de Laplace pour résoudre ce problème.

TD 5 : Utilisation de la transformée de Laplace pour l'étude des systèmes à temps continu

Ex 5.1 : Etude d'un système du second ordre

On branche en série un condensateur $C = 3 \mu\text{F}$, une résistance $R = 8 \text{ k}\Omega$ et une inductance $L = 25 \text{ mH}$. Cet ensemble est soumis à une tension $u(t)$ et traversé par un courant $i(t)$.

1) Etablir **l'équation différentielle** qui lie $u(t)$ à $i(t)$. En déduire la fonction de transfert en Laplace, les conditions initiales seront bien sûr considérées comme nulles, lors du calcul de la fonction de transfert. Donnez cette fonction de transfert **en fonction de R, C et L**, il n'est pas nécessaire ici de la mettre sous la forme standard (fonction de K, z et ω_0).

2) $u(t)$ est une tension continue d'amplitude A appliquée à l'instant $t = 0$.

a) Donner l'expression de $I(p)$, en fonction de $U(p)$ et de R, L et C.

b) Afin de calculer $i(t)$, nous allons devoir calculer le discriminant du dénominateur de $I(p)$. Précisez quels sont les cas de figure possibles, en fonction du signe de ce discriminant.

c) Vérifier, à l'aide des valeurs numériques, que dans notre cas, le discriminant est positif, et que nous avons donc deux pôles réels, que l'on peut appeler α_1 et α_2 .

d) Donner l'expression du courant $i(t)$ en supposant que le condensateur est initialement déchargé, en fonction de α_1 et α_2 , et ensuite en fonction des valeurs numériques.

--	--



M4 : Transformée de Laplace

N.B. : L'usage des calculatrices est autorisé

Aucun document autorisé

Soin, propreté et clarté seront appréciés par le correcteur

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque

Barème approximatif : 1: 4 points - 2 : 3 points - 3 : 2 points - 4 : 5 points - 5 : 6 points - (total sur 20)

1. Soit le signal à temps continu représenté sur la figure 1.

- 1.1. Ecrire l'expression mathématique du signal $x(t)$, comme une composition de signaux usuels (type échelon, rampe).
- 1.2. En déduire $X(p)$, la transformée de Laplace du signal $x(t)$.

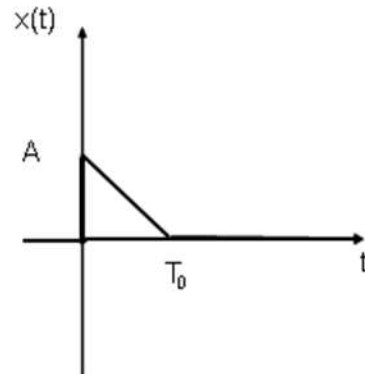


Figure 1

2. Calculer la transformée de Laplace de l'échelon $\Gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$, à partir de la formule générale de la transformée de Laplace $L\{s(t)\} = S(p) = \int_0^{+\infty} s(t)e^{-pt} dt$, en expliquant la démarche utilisée.

On supposera si nécessaire que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{-pt}) = 0$

3. Calculer dans chaque cas la valeur initiale et la valeur finale de $s(t)$:

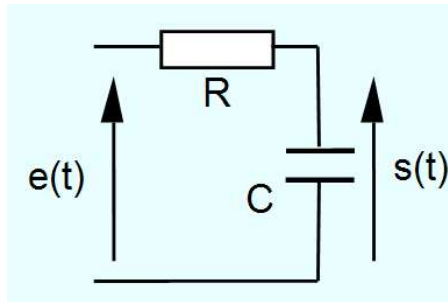
3.a
$$S(p) = \frac{5}{(p^2 + 3p + 2)}$$

3.b
$$S(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p+3)}$$

4. Déterminer les signaux originaux ayant pour transformée de Laplace :

4.a
$$S(p) = \frac{5}{(p^2 + 3p + 2)}$$

4.b
$$S(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p+3)}$$



On considère le montage analogique ci-dessus

1) Etablir l'équation différentielle qui lie les tensions $e(t)$ et $s(t)$.

2) Calculer la fonction de transfert de ce système : $G(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$.

On supposera naturellement que les conditions initiales sont nulles.

3) Déterminer le(s) pôle(s) de $G(p)$. Peut-on tirer des conclusions sur la valeur de ce(s) pôle(s) ?

4) *Analyse dans le domaine temporel - Réponse indicielle*

$e(t)$ est une tension continue A appliquée à l'instant $t = 0$. Etablir l'expression littérale de la réponse indicielle $s(t)$ lorsque les conditions initiales $s(0) = \dot{s}(0) = 0$.

5) *Analyse dans le domaine temporel - Réponse impulsionnelle*

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \neq 0 \\ 1 & \text{pour } t = 0 \end{cases}$$

$e(t)$ est une impulsion . Etablir l'expression littérale de la réponse impulsionnelle $s(t)$ lorsque les conditions initiales $s(0) = \dot{s}(0) = 0$.