

MODULE M4

Transformation de Laplace

Etude des systèmes analogiques

2008-2009

Jean-Marc THIRIET

jean-marc.thiriet@ujf-grenoble.fr

Organisation du cours (1/2)

- Cours magistral :
 - 5 séances de 1,5 H pour la partie « Laplace »
 - 5 séances de 1,5 H pour la partie « matrices »
- TD
 - 5 séances de 1,5 H pour la partie « Laplace »
 - 5 séances de 1,5 H pour la partie « matrices »
- Evaluation :
 - 1 Examen sur le cours de « Laplace »
 - 1 Examen sur le cours de « matrices »

<http://iut-tice.ujf-grenoble.fr/tice-portail/PORTAIL/index.asp>

- Connexion par
 - DEMO (Groupe de TD)
 - DEMO (numéro d'étudiant)

Organisation du cours (2/2)

- 1. Définition de la transformée – transformées simples
- 2. Transformées complexes
 - Utilisation des tables
 - Constructions graphiques
 - Théorème des valeurs limites
- 3. Transformées inverses et résolutions d'équations différentielles
- 4. Etude d'un système analogique – système du premier ordre
- 5. Etude des systèmes du second ordre

Pré-requis

- Fonctions de trigonométrie
- Intégration, dérivation
 - Sinus, cosinus
 - exponentielle

1. Définition de la transformée - transformées simples

1.1 Systèmes

1.2 Transformée de Laplace

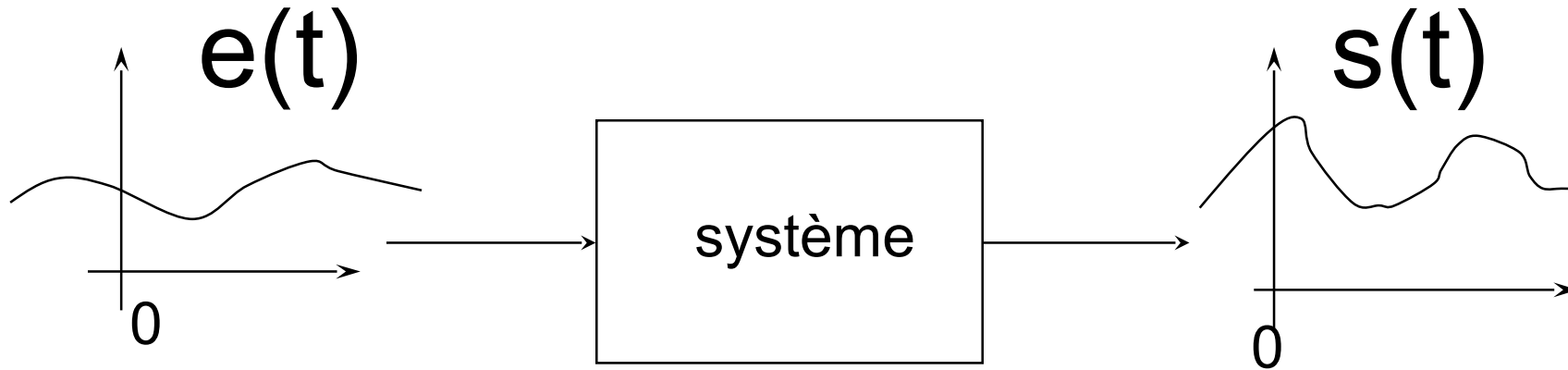
1.3 Définition

1.4 Transformées de fonctions élémentaires

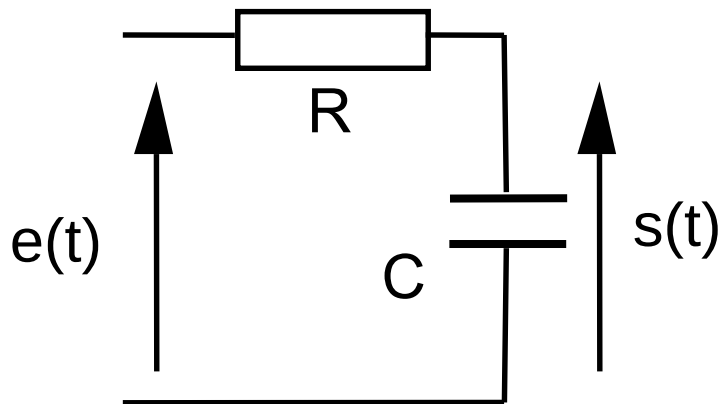
1.1 Systémique : définition d'un système

- Un **système** est un ensemble fonctionnel, circonscrit dans une enveloppe (boîte noire).
Il communique avec l'extérieur à l'aide de signaux.
- Les signaux d'entrée permettent de l'exciter, les signaux de sortie d'observer son comportement.
- Un four (entrée : débit de gaz, sortie : température) est un système *à temps continu* analogique.
- Une loterie (entrée : la mise du joueur en début de partie, sortie : son gain) est un système numérique (*à temps discret*).
- Un voltmètre numérique (entrée : tension à mesurer, sortie : tension affichée) est un système mixte, c'est un système échantillonné.
- Un système **linéaire** est un système pour lequel les relations entre les grandeurs d'entrée et de sortie peuvent se mettre sous la forme d'**équations différentielles linéaires à coefficients constants**. Si le système n'est pas linéaire, il est souvent possible de le linéariser pour de petites amplitudes autour d'un point de fonctionnement

1.1 Exemple de système : relation entre sortie et entrée



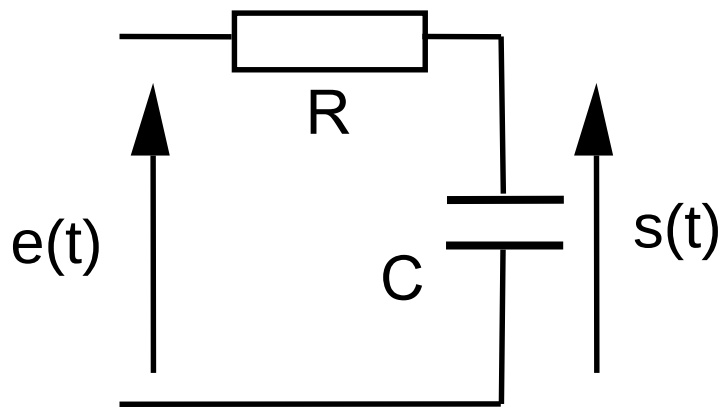
Exemple :



Equation du système = relation mathématique
entre l'entrée $e(t)$ et la sortie $s(t)$

$$RC \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$$

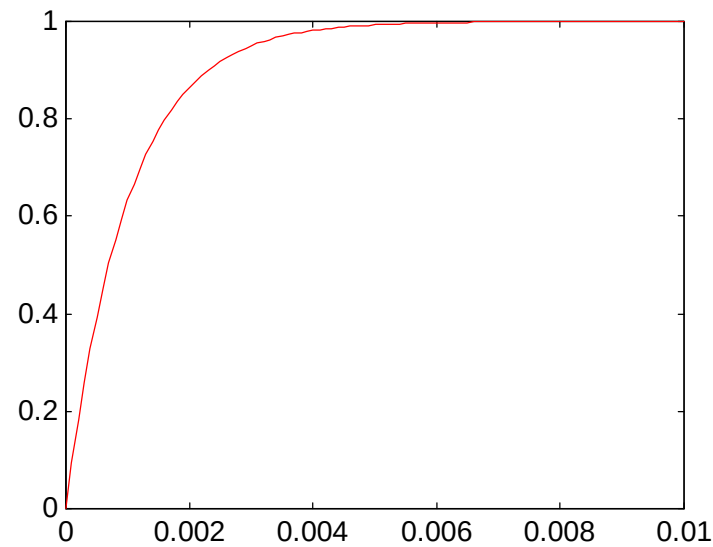
1.1 Analyse dans le domaine temporel : détermination de la réponse indicielle d'un circuit RC



$$RC \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$$

Exemple : pour $t \geq 0$

$$\begin{cases} e(t) = 1 \\ s(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \end{cases}$$



1.1 Systèmes analogiques (systèmes à temps continu)

• Structure (réalisation) des systèmes analogiques

- COM** {
- A l'aide de composants électroniques passifs (sans alimentation, R, L, C) ou actifs (avec une alimentation externe => amplificateurs opérationnels)
 - Systèmes optiques
 - Mais aussi système mécanique, système thermodynamique...

• Les systèmes ***analogiques*** traitent des signaux à temps ***continu***

1.2 Transformée de Laplace

Pierre-Simon LAPLACE



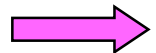
- 23 mars 1749 – 5 mars 1827
- Grand savant français
- Mathématiques, Astronomie, Physique, Philosophie des Sciences
- Transformée de Laplace : méthode permettant de résoudre facilement les équations différentielles ordinaires à coefficients constants

1.2 Intérêt de la transformée de Laplace

- Outil mathématique facilitant l'analyse des systèmes à temps continu
- Démarche méthodologique (outil mathématique) permettant de résoudre « facilement » des équations différentielles
 - en transformant les équations différentielles en équations polynomiales.

Démarche :

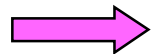
1. Transformation de Laplace



- On passe du domaine temporel au domaine de Laplace (on dit aussi **domaine symbolique**)

2. Résolution du problème (Ex : étude des réponses temporelles et fréquentielles d'un système)

3. Transformation de Laplace inverse



- On revient du domaine symbolique au domaine temporel, après avoir fait les calculs

1.3 Définition de la Transformée de Laplace

Soit un signal à temps continu **causal** $s(t)$, sa transformée de Laplace s'écrit :

$$L\{s(t)\} = S(p) = \int_0^{+\infty} s(t) e^{-pt} dt$$

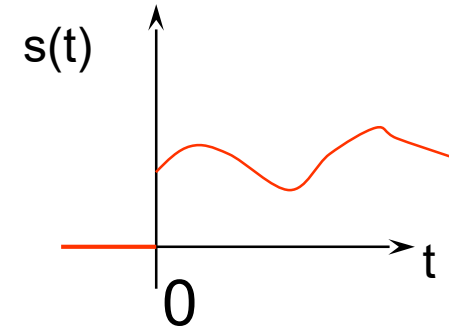
p est la variable de Laplace (parfois notée s).

p est une variable complexe :

$$p = \sigma + j\omega; \{\sigma, \omega\} \in \mathbb{R}^2$$

La transformée de Laplace inverse s'écrit :

$$L^{-1}\{S(p)\} = s(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} S(p) e^{pt} dp$$



1.3 Transformée de Laplace

- La transformée de Laplace définie précédemment prend le nom de transformée de Laplace monolatère. Il existe en effet une transformée de Laplace **bilatère** définie par :

$$L\{s(t)\} = S(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-pt} dt$$

- Il existe une relation entre la transformée de Laplace bilatère et la transformée de Fourier d'un signal à temps continu

$$S(j\omega) = [S(p)]_{p=j\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$L\{s(t)\} = S(p) \quad \text{On appelle } S(p) \text{ la transformée de Laplace de } s(t)$$

1.3 Conditions d'existence de la transformée de Laplace

$S(p)$ existe si l'intégrale converge, c'est-à-dire si :

$$\int_0^{+\infty} |s(t)| dt < \infty$$

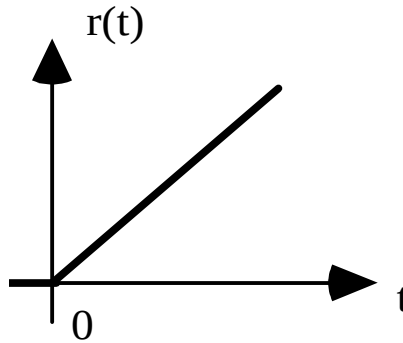
La primitive doit tendre vers une limite **finie**

- Généralement, si la fonction $s(t)$ est bornée, l'intégrale de Laplace est convergente et donc la transformée de Laplace existe

1.4 Transformée de Laplace de signaux-tests (fonctions élémentaires)

- **La rampe unitaire $r(t)$**

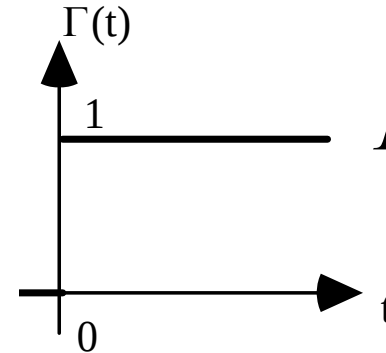
$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ t & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$



$$L\{r(t)\} = \frac{1}{p^2}$$

- **L'échelon unitaire $\Gamma(t)$**

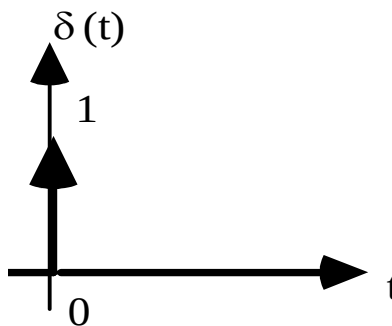
$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$



$$L\{\Gamma(t)\} = \frac{1}{p}$$

- **L'impulsion de Dirac $\delta(t)$**

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \neq 0 \\ 1 & \text{pour } t = 0 \end{cases}$$



$$L\{\delta(t)\} = 1$$

- **L'exponentielle décroissante**

$$L\{e^{-\alpha t}\} = \frac{1}{p + \alpha}$$

1.4 Propriétés de la transformée de Laplace

- Linéarité et superposition $L\{a.s(t)\} = a.S(p)$
 $L\{a.s(t) + bv(t)\} = a.S(p) + b.V(p)$
- Exemple : $L\{\cos(\omega_0 t)\}$

$$L\{\sin(\omega_0 t)\}$$

1.4 Propriétés de la transformée de Laplace

- Intégration par rapport au temps :
$$L\left\{\int_0^t s(\tau).d\tau\right\} = \frac{1}{p}.S(p)$$

- Dérivation par rapport au temps :
$$L\left\{\frac{ds(t)}{dt}\right\} = p.S(p) - s(0)$$

$$L\left\{\frac{d^n s(t)}{dt^n}\right\} = p^n S(p) - p^{n-1}s(0) - p^{n-2}\dot{s}(0) - \dots - ps^{(n-1)}(0) - s^{(n)}(0)$$

- Produit d'un signal par une exponentielle :
$$L\{e^{-at}s(t)\} = S(p + a)$$

1.4 Propriétés de la transformée de Laplace

- Théorème du retard : $L\{s(t - t_0)\} = e^{-p \cdot t_0} \cdot S(p)$
- Changement d'échelle : $L\{s(a \cdot t)\} = \frac{1}{a} S\left(\frac{p}{a}\right)$
- Produit par le temps : $L\{t \cdot s(t)\} = -\frac{dS(p)}{dp}$

1.4 Propriétés duales

$$L\{s(t - t_0)\} = e^{-p \cdot t_0} \cdot S(p)$$

$$L\{e^{-at} s(t)\} = S(p + a)$$

$$L\left\{\frac{ds(t)}{dt}\right\} = p \cdot S(p) - s(0)$$

$$L\{t \cdot s(t)\} = -\frac{dS(p)}{dp}$$

2. Transformées complexes

2.1 Utilisation des tables

2.2 Constructions graphiques

2.3 Théorème des valeurs limites

2.1 Table de transformée

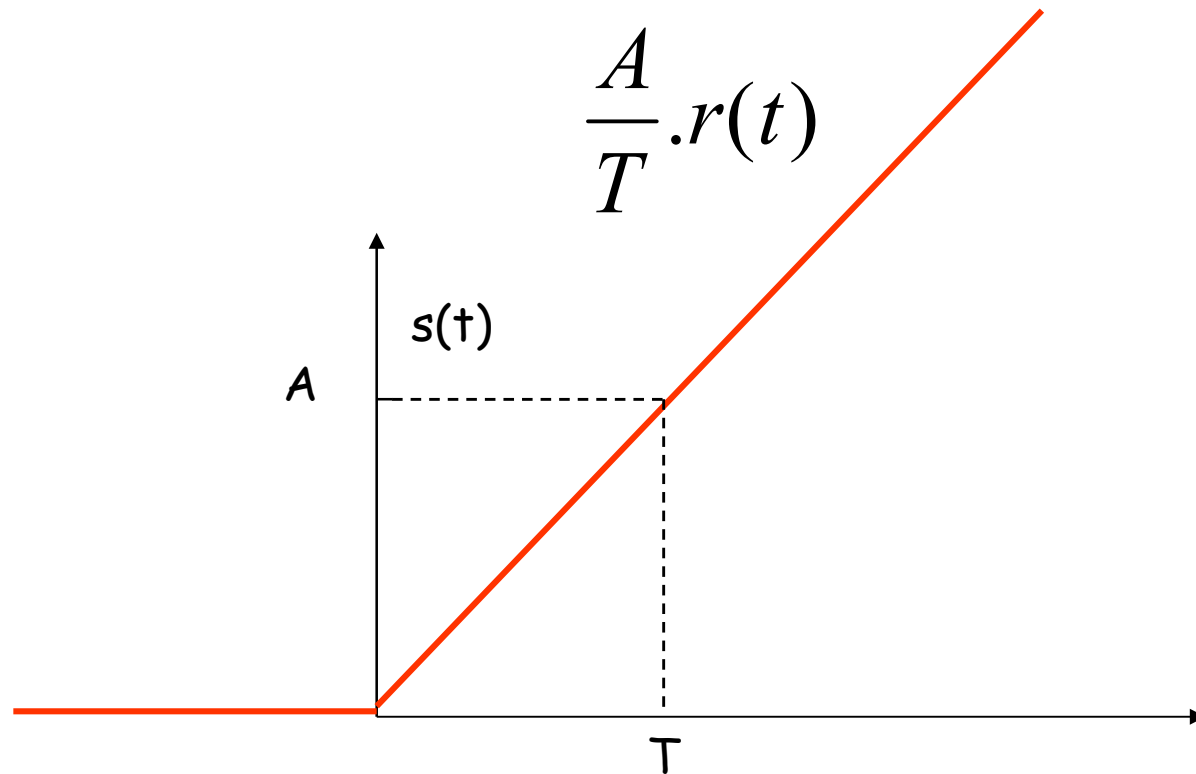
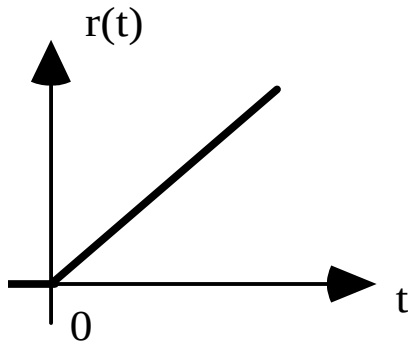
Propriétés ou théorèmes	domaine temporel	domaine de Laplace p (ou s)
Linéarité et superposition	$s_1(t) + s_2(t)$ $A.s(t)$	$S_1(p) + S_2(p)$ $A.S(p)$
Dérivée 1 ^{ère} par rapport au temps	$\frac{ds(t)}{dt}$	$p.S(p) - s(0)$
Dérivée 2 ^{ème} par rapport au temps	$\frac{d^2s(t)}{dt^2}$	$p^2.S(p) - p.s(0) - \dot{s}(0)$
Dérivée n ^{ème} par rapport au temps	$\frac{d^ns(t)}{dt^n}$	$p^n S(p) - p^{n-1}s(0) - \dots - s^{(n-1)}(0)$
Intégration par rapport au temps	$\int_0^t s(\tau) d\tau$	$\frac{S(p)}{p}$
Théorème du retard	$s(t - t_0)$	$e^{-t_0 p} S(p)$
Produit du signal par une exponentielle	$e^{-\alpha t} s(t)$	$S(p + \alpha)$
Produit par le temps	$t s(t)$	$-\frac{dS(p)}{dp}$
Produit par t ⁿ	$t^n s(t)$	$(-1)^n \frac{d^n S(p)}{dp^n}$
Produit par l'inverse du temps	$\frac{s(t)}{t}$	$\int_p^\infty S(x) dx$
Produit de convolution	$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau$	$F(p) G(p)$
Produit simple	$f(t) g(t)$	$\neq F(p) G(p) !!$
Changement d'échelle	$s(at)$ avec $a > 0$	$\frac{1}{a} S\left(\frac{p}{a}\right)$

cf. pages 3 et 4
du poly

2.1 Exemple d'une rampe quelconque

- rampe

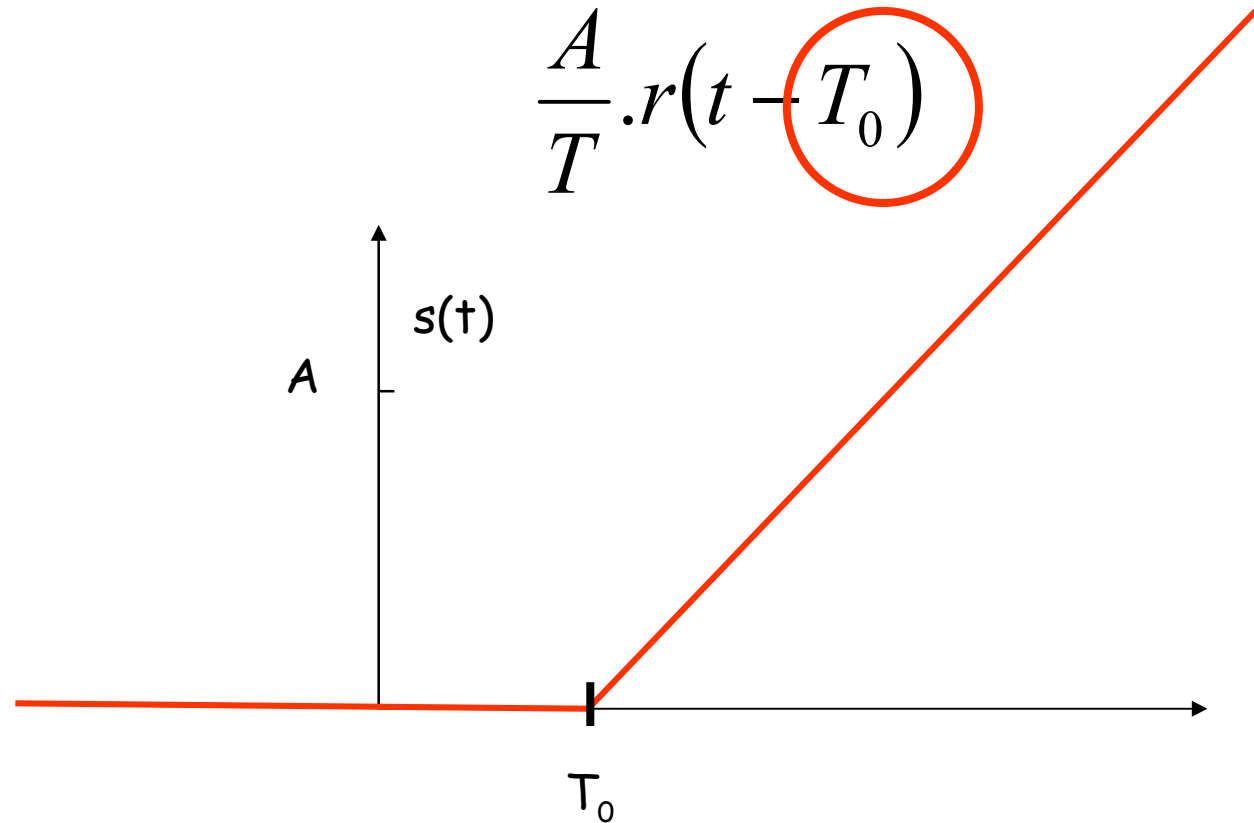
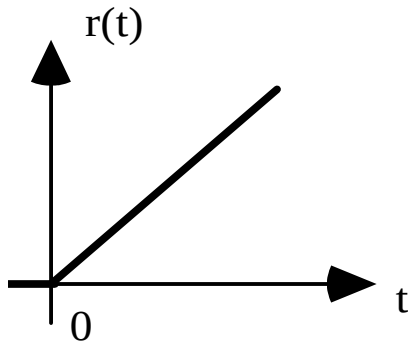
$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ t & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$



2.1 Exemple d'une rampe quelconque retardée

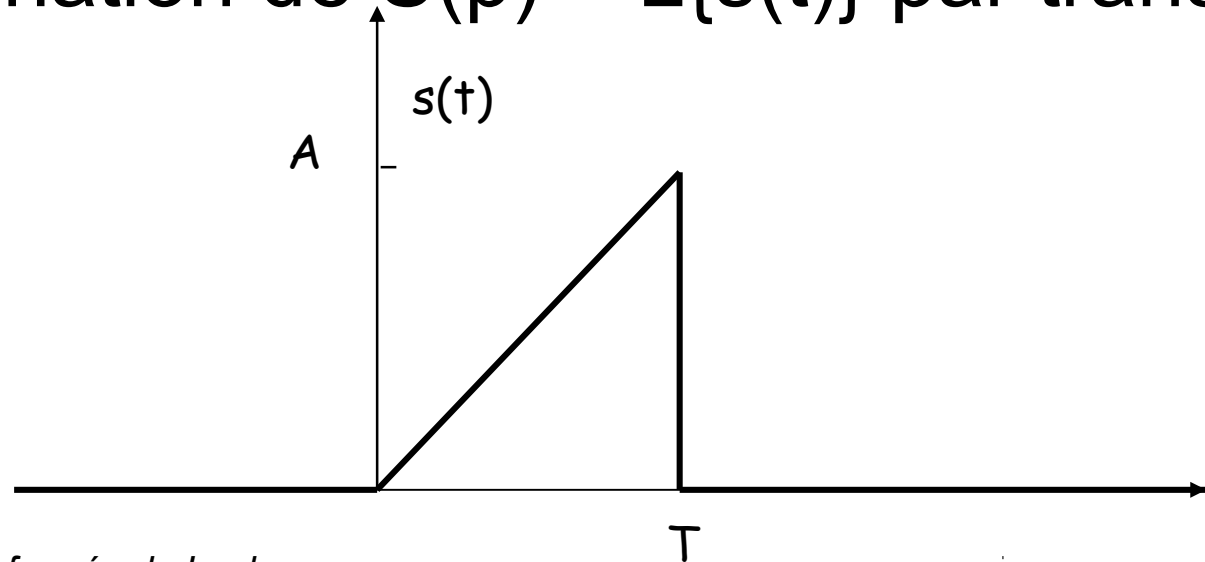
- rampe

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ t & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$



2.2 Transformée d'une fonction donnée sous forme graphique

- Par décomposition en fonctions élémentaires (signaux-tests) de transformées de Laplace connues (échelon, rampe...) pour exprimer $s(t)$
- Puis détermination de $S(p) = \mathcal{L}\{s(t)\}$ par trans. de Laplace

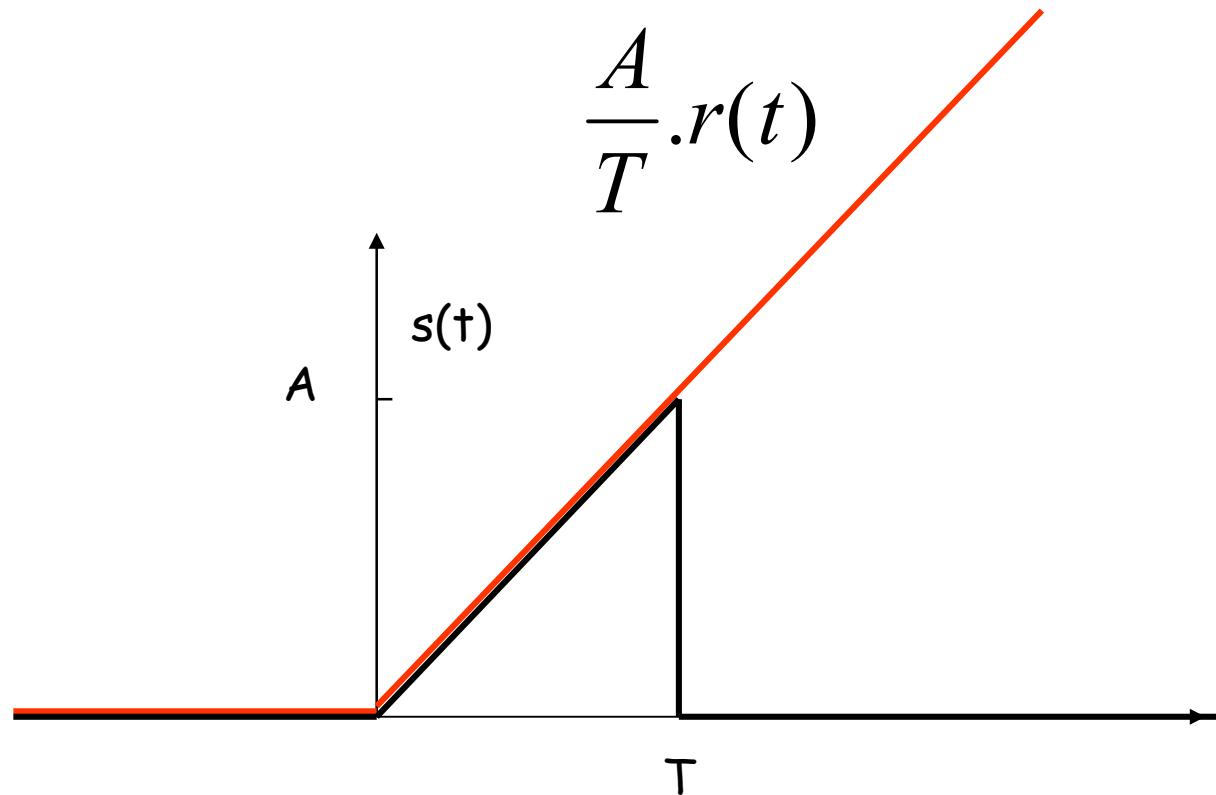
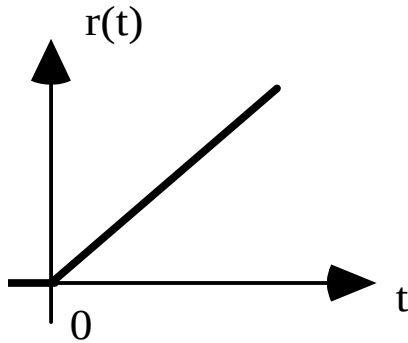


Transformée de Laplace

2.2 Transformée d'une fonction donnée sous forme graphique

- 1ère rampe

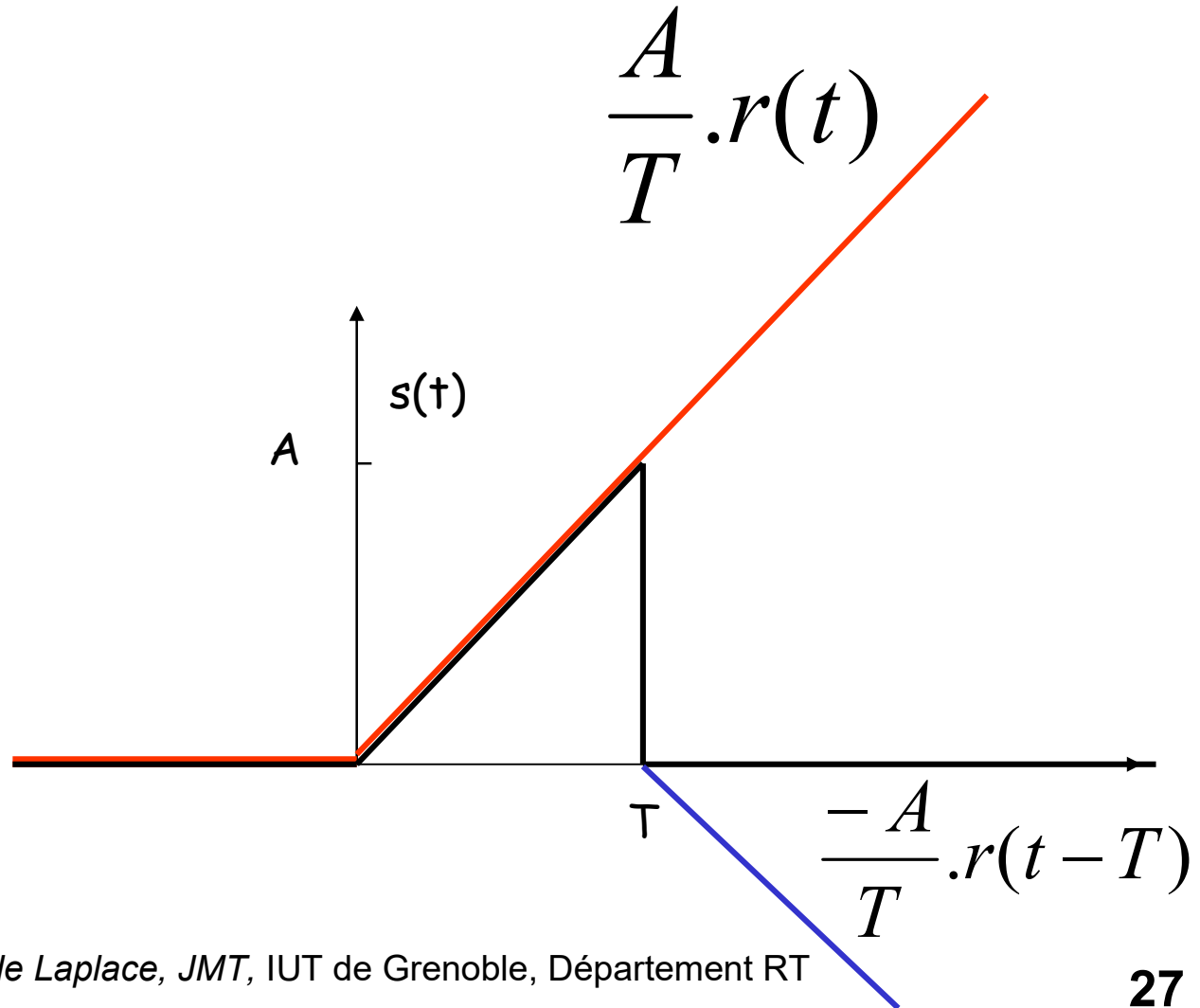
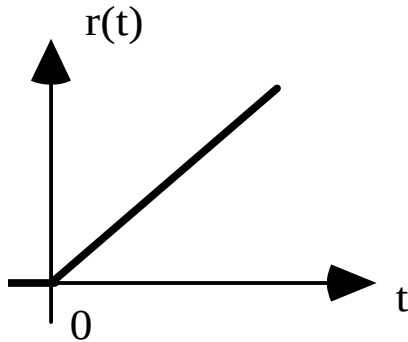
$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ t & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$



2.2 Transformée d'une fonction donnée sous forme graphique

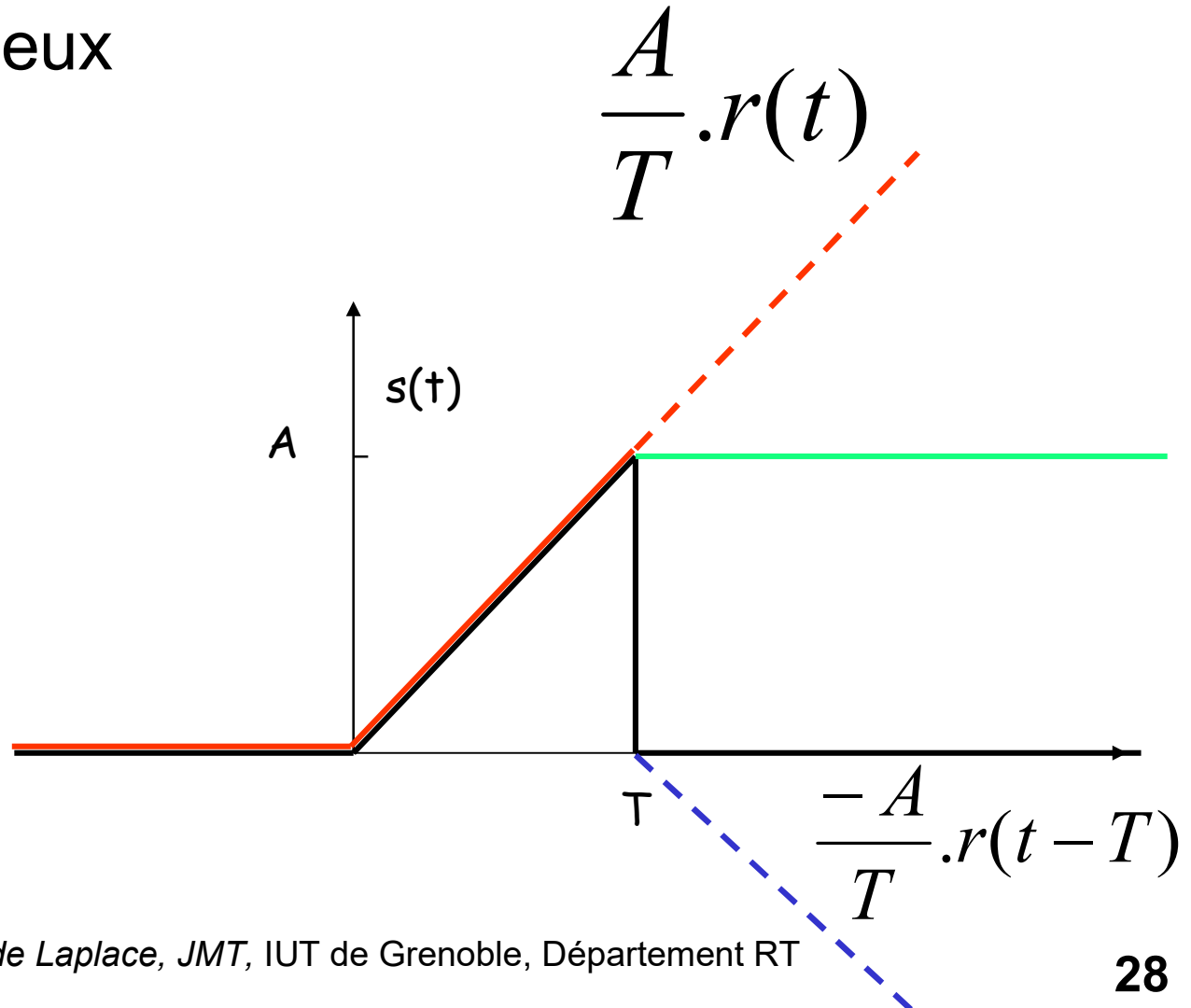
- 2ème rampe

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ t & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$



2.2 Transformée d'une fonction donnée sous forme graphique

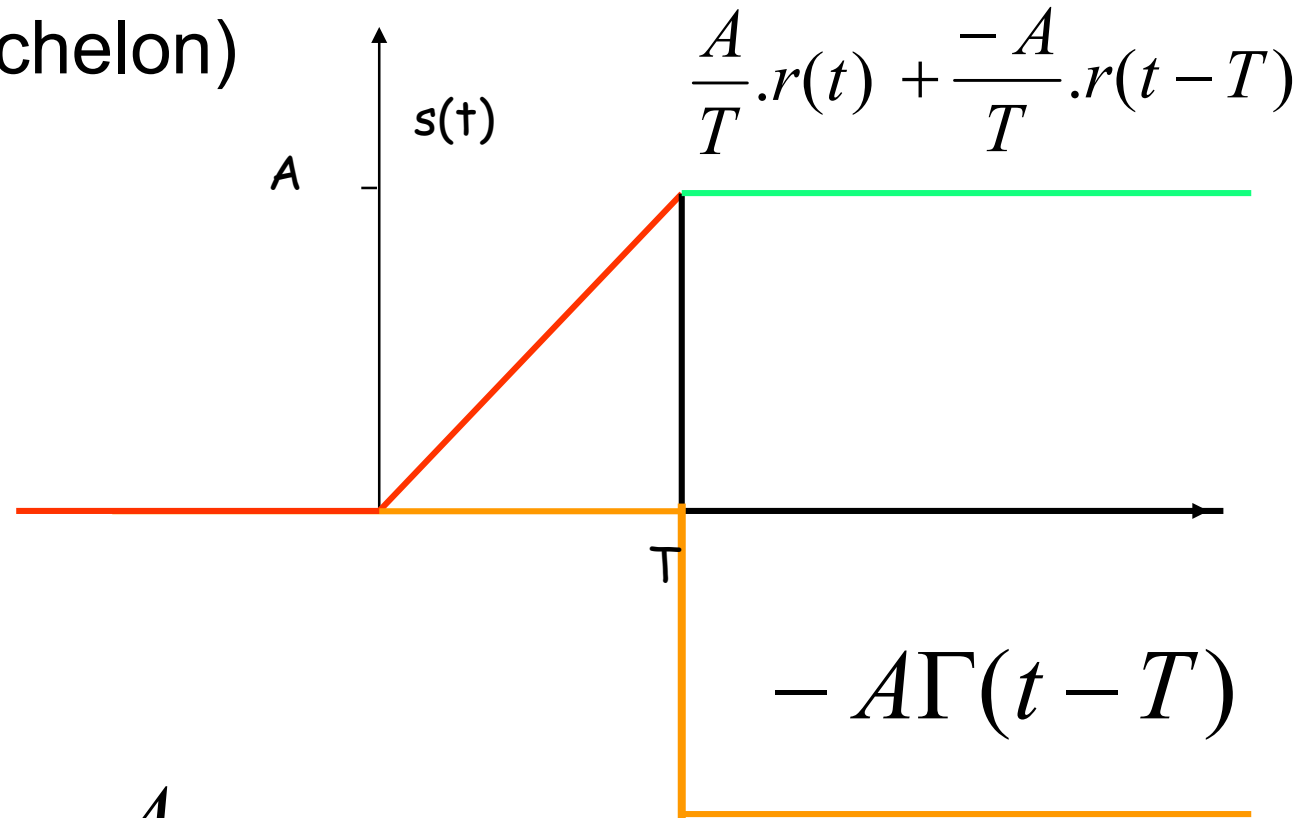
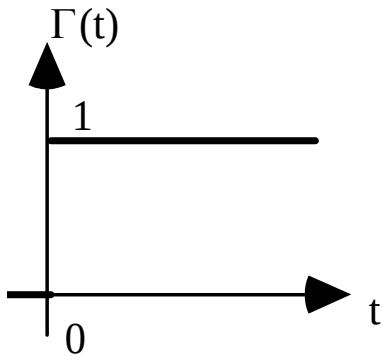
- Résultante des deux rampes



2.2 Transformée d'une fonction donnée sous forme graphique

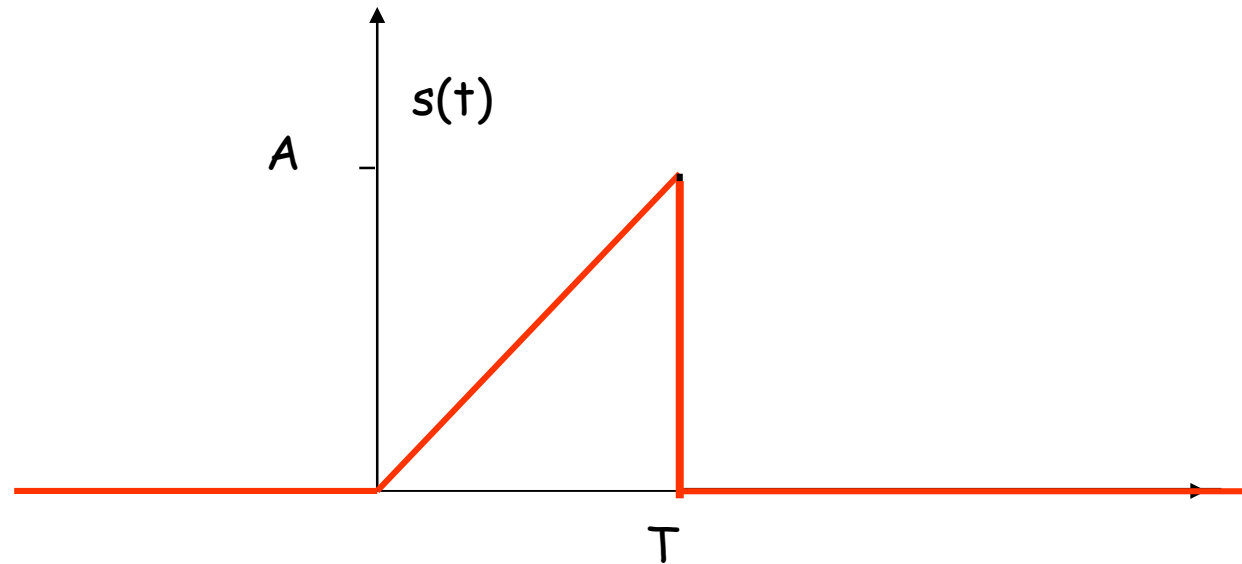
- 3ème rampe (échelon)

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$



$$s(t) = \frac{A}{T}.r(t) - \frac{A}{T}.r(t - T) - A.\Gamma(t - T)$$

2.2 Transformée d'une fonction donnée sous forme graphique



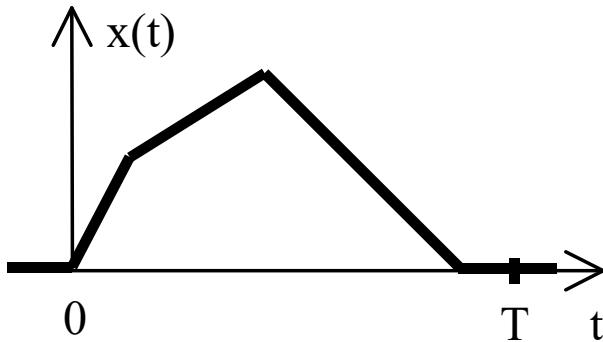
$$s(t) = \frac{A}{T} \cdot r(t) - \frac{A}{T} \cdot r(t - T) - A \cdot \Gamma(t - T)$$

2.2 Transformée de Laplace

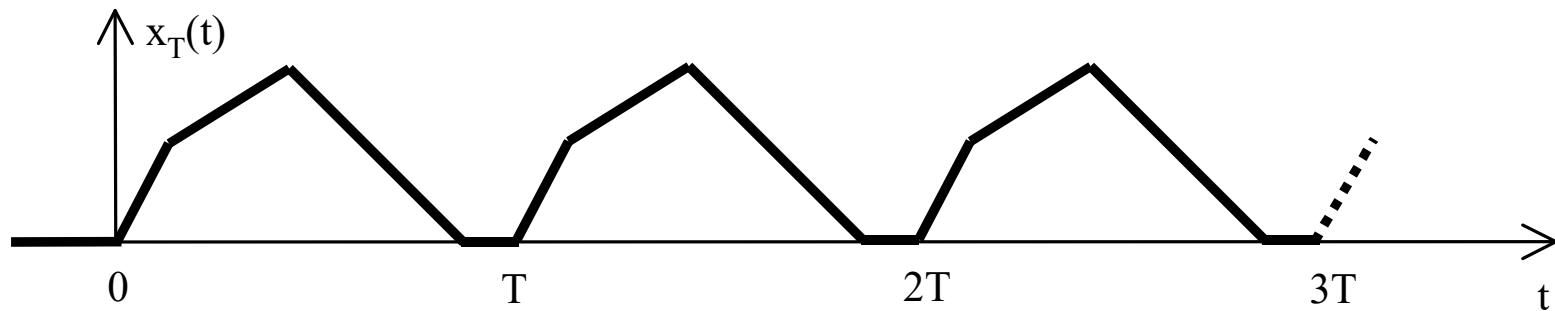
$$s(t) = \frac{A}{T} \cdot r(t) - \frac{A}{T} \cdot r(t - T) - A \cdot \Gamma(t - T)$$

$$S(p) = \frac{A}{T} \cdot \frac{1}{p^2} - \frac{A}{T} \cdot \frac{e^{-p \cdot T}}{p^2} - A \cdot \frac{e^{-p \cdot T}}{p}$$

2.2 Transformée de Laplace d'un signal périodique



$$L\{x(t)\} = X(p).$$



$$L\{x_T(t)\} = \frac{X(p)}{1 - e^{-pT}}$$

2.2 Propriétés de la transformée de Laplace

•Produit de convolution temporel : $x(t) * y(t) = \int_0^{+\infty} x(\tau).y(t - \tau).d\tau$

$$L\{x(t) * y(t)\} = X(p).Y(p)$$

Le produit de convolution entre $x(t)$ et $y(t)$ est tel que la transformée de ce produit de convolution est égale au produit « simple » des transformée de $x(t)$ et $y(t)$

•Produit simple : $L\{x(t).y(t)\} \neq X(p) * Y(p)!!!$

2.3 Théorème des valeurs limites

•Théorème de la valeur initiale : $s(0) = \lim_{t \rightarrow 0} (s(t)) = \lim_{p \rightarrow +\infty} (p.S(p))$

•Théorème de la valeur finale, si les limites existent :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (s(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (p.S(p))$$

2.3 Application du théorème des valeurs limites, calculer $s(0)$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} (s(t))$

$$S(p) = \frac{1}{(p + \alpha)} =$$

$$S(p) = \frac{3}{(p + 1)} =$$

$$S(p) = \frac{2}{(p + 2)^2 (p + 1)} =$$

3. Transformées inverses et résolutions d'équations différentielles

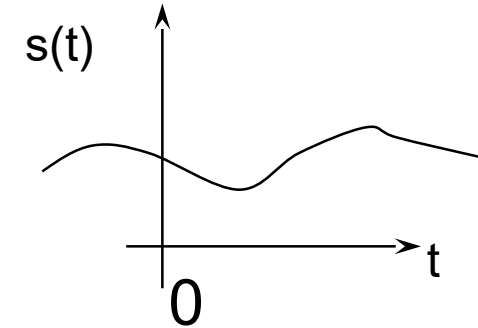
3.1 Transformées inverses

3.2 Résolutions d'équations différentielles

Rappel : Définition de la Transformée de Laplace

Soit un signal à temps continu causal $s(t)$, sa transformée de Laplace s'écrit :

$$L\{s(t)\} = S(p) = \int_0^{+\infty} s(t)e^{-pt} dt$$



p est la variable de Laplace (parfois notée s).

p est une variable complexe :

$$p = \sigma + j\omega; \{\sigma, \omega\} \in \mathbb{R}^2$$

La transformée de Laplace inverse s'écrit :

$$L^{-1}\{S(p)\} = s(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} S(p)e^{pt} dp$$

3.1 Inversion de la transformée de Laplace (cas des pôles réels)

- Le problème consiste, à partir de la transformée de Laplace $S(p)$, de retrouver le signal original $s(t)$:

$$L^{-1}\{S(p)\} = s(t)$$

- On pourra, si nécessaire, utiliser la décomposition en éléments simples

Soit
$$S(p) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} \quad \text{avec } n > m$$

1^{er} cas : Les n pôles de $S(p)$ sont tous distincts, dans ce cas :

$$S(p) = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \dots + \frac{A_n}{p - p_n}$$

avec
$$A_i = \lim_{p \rightarrow p_i} ((p - p_i) \cdot S(p)) \quad i=1,2,\dots,n$$

3.1 Inversion de la transformée de Laplace (cas des pôles réels)

2ème cas : $S(p)$ possède un pôle multiple p_1 de multiplicité r , dans ce cas :

$$S(p) = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{(p - p_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(p - p_1)^r}$$

avec

$$A_i = \frac{1}{(r-i)!} \left[\frac{d^{r-i}}{dp^{r-i}} \left\{ (p - p_1)^r S(p) \right\} \right]_{p=p_1} \quad i = 1, 2, \dots, r$$

Règle de Hazony et Riley

Si $n > m+1$ alors $\sum_{i=1}^n A_i = 0$

Si $n = m+1$ alors $\sum_{i=1}^n A_i = 1$

3.1 Exemples de transformées inverses

$$S_1(p) = \frac{1}{p^2 + 2p - 3} =$$

3.1 Exemples de transformées inverses

Deux pôles simples $p_1=1$ et $p_2=-3$

$$S_1(p) = \frac{1}{p^2 + 2p - 3} = \frac{1}{(p-1)(p+3)} = \frac{A_1}{p-1} + \frac{A_2}{p+3}$$

avec $A_i = \lim_{p \rightarrow p_i} ((p - p_i) \cdot S(p)) \quad i=1,2,\dots,n$

3.1 Exemples de transformées inverses

Deux pôles simples $p_1=1$ et $p_2=-3$

$$S_1(p) = \frac{1}{p^2 + 2p - 3} = \frac{1}{(p-1)(p+3)} = \frac{A_1}{p-1} + \frac{A_2}{p+3}$$

avec $A_i = \lim_{p \rightarrow p_i} ((p - p_i) \cdot S(p)) \quad i=1,2,\dots,n$

$$A_1 = \lim_{p \rightarrow 1} \left((p-1) \cdot \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{p+3} \right) = \lim_{p \rightarrow 1} \left(\frac{1}{p+3} \right) = \frac{1}{4}$$

3.1 Exemples de transformées inverses

Deux pôles simples $p_1=1$ et $p_2=-3$

$$S_1(p) = \frac{1}{p^2 + 2p - 3} = \frac{1}{(p-1)(p+3)} = \frac{A_1}{p-1} + \frac{A_2}{p+3}$$

avec $A_i = \lim_{p \rightarrow p_i} ((p - p_i) \cdot S(p)) \quad i=1,2,\dots,n$

$$A_1 = \lim_{p \rightarrow 1} \left((p-1) \cdot \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{p+3} \right) = \lim_{p \rightarrow 1} \left(\frac{1}{p+3} \right) = \frac{1}{4}$$

$$A_2 = \lim_{p \rightarrow -3} \left((p+3) \cdot \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{p+3} \right) = \lim_{p \rightarrow -3} \left(\frac{1}{p-1} \right) = -\frac{1}{4}$$

3.1 Exemples de transformées inverses

Deux pôles simples $p_1=1$ et $p_2=-3$

$$S_1(p) = \frac{A_1}{p-1} + \frac{A_2}{p+3} = \frac{\cancel{1}/4}{p-1} - \frac{\cancel{1}/4}{p+3}$$

On a donc réussi la décomposition en éléments simples de $S_1(p)$, il ne reste plus qu'à déterminer la transformée inverse de Laplace.

3.1 Exemples de transformées inverses

Deux pôles simples $p_1=1$ et $p_2=-3$

$$S_1(p) = \frac{A_1}{p-1} + \frac{A_2}{p+3} = \frac{\cancel{1}/4}{p-1} - \frac{\cancel{1}/4}{p+3}$$

On a donc réussi la décomposition en éléments simples de $S_1(p)$, il ne reste plus qu'à déterminer la transformée inverse de Laplace.

En utilisant les tables, on obtient

$$s_1(t) = \frac{1}{4} \cdot e^t - \frac{1}{4} e^{-3t}$$

3.1 Exemples de transformées inverses

$$S_2(p) = \frac{2}{(p+2)^2(p+1)} =$$

3.1 Exemples de transformées inverses

$$S_2(p) = \frac{2}{(p+2)^2(p+1)} = \frac{A_1}{p+2} + \frac{A_2}{(p+2)^2} + \frac{B}{p+1}$$

3.1 Exemples de transformées inverses

$$S_2(p) = \frac{2}{(p+2)^2(p+1)} = \frac{A_1}{p+2} + \frac{A_2}{(p+2)^2} + \frac{B}{p+1}$$

- Calcul du terme B (pour le pôle simple $p=-1$)

$$B = \lim_{p \rightarrow -1} \left[(p+1) \frac{2}{(p+2)^2(p+1)} \right] = \frac{2}{(-1+2)^2} = 2$$

3.1 Exemples de transformées inverses

- Calcul du terme A_1 (pour le pôle multiple $p=-2$)

$$A_i = \frac{1}{(r-i)!} \lim_{p \rightarrow p_m} \left[\frac{d^{r-i}}{dp^{r-i}} \left\{ (p - p_m)^r S(p) \right\} \right]$$

- r : ordre de multiplicité du pôle
- i est le coefficient du pôle, variant de 1 à r

3.1 Exemples de transformées inverses

- Calcul du terme A_1 (pour le pôle multiple $p=-2$)

$$A_i = \frac{1}{(r-i)!} \lim_{p \rightarrow p_m} \left[\frac{d^{r-i}}{dp^{r-i}} \left\{ (p - p_m)^r S(p) \right\} \right]$$

$$A_1 = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{p \rightarrow -2} \left[\frac{d^{2-1}}{dp^{2-1}} \left\{ (p+2)^2 \frac{2}{(p+2)^2(p+1)} \right\} \right] = \lim_{p \rightarrow -2} \left[\frac{d}{dp} \left\{ \frac{2}{(p+1)} \right\} \right]$$

3.1 Exemples de transformées inverses

- Calcul du terme A_1 (pour le pôle multiple $p=-2$)

$$A_i = \frac{1}{(r-i)!} \lim_{p \rightarrow p_m} \left[\frac{d^{r-i}}{dp^{r-i}} \left\{ (p - p_m)^r S(p) \right\} \right]$$

$$A_1 = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{p \rightarrow -2} \left[\frac{d^{2-1}}{dp^{2-1}} \left\{ (p+2)^2 \frac{2}{(p+2)^2(p+1)} \right\} \right] = \lim_{p \rightarrow -2} \left[\frac{d}{dp} \left\{ \frac{2}{(p+1)} \right\} \right]$$

$$A_1 = \lim_{p \rightarrow -2} \left[\frac{-2 \cdot (p+1)}{(p+1)^2} \right] = \left[\frac{-2}{1} \right] = -2$$

3.1 Exemples de transformées inverses

- Calcul du terme A_2 (pour le pôle multiple $p=-2$)

$$A_i = \frac{1}{(r-i)!} \lim_{p \rightarrow p_m} \left[\frac{d^{r-i}}{dp^{r-i}} \left\{ (p - p_m)^r S(p) \right\} \right]$$

$$A_2 = \frac{1}{(2-2)!} \lim_{p \rightarrow -2} \left[\frac{d^{2-2}}{dp^{2-2}} \left\{ (p+2)^2 \frac{2}{(p+2)^2 (p+1)} \right\} \right] = \lim_{p \rightarrow -2} \left[\left\{ \frac{2}{(p+1)} \right\} \right]$$

$$A_2 = \left[\frac{2}{-1} \right] = -2$$

3.1 Exemples de transformées inverses

$$S_2(p) = \frac{2}{(p+2)^2(p+1)} = \frac{A_1}{p+2} + \frac{A_2}{(p+2)^2} + \frac{B}{p+1}$$

$$S_2(p) = \frac{2}{(p+2)^2(p+1)} = \frac{-2}{p+2} + \frac{-2}{(p+2)^2} + \frac{2}{p+1}$$

3.1 Exemples de transformées inverses

$$S_2(p) = \frac{2}{(p+2)^2(p+1)} = \frac{A_1}{p+2} + \frac{A_2}{(p+2)^2} + \frac{B}{p+1}$$

$$S_2(p) = \frac{2}{(p+2)^2(p+1)} = \frac{-2}{p+2} + \frac{2}{(p+2)^2} + \frac{2}{p+1}$$

Détermination de la transformée inverse de Laplace.

En utilisant les tables, on obtient

$$s_2(t) = -2.e^{-2t} - 2.t.e^{-2t} + 2e^{-t}$$

3.2 Résolution d'équations différentielles par utilisation de la transformée de Laplace

3.2 Résolution d'équations différentielles linéaires à coefficients constants par la transformée de Laplace

- Dans le cas où l'ordre de l'équation différentielle est supérieur à 2, la résolution d'équations différentielles devient compliquée. Il est préférable dans ce cas d'utiliser une procédure utilisant la transformée de Laplace.
- La procédure de résolution est alors la suivante :
 1. Appliquer la transformée de Laplace aux 2 membres de l'équation différentielle en $x(t)$
 2. Calculer $X(p)$ en utilisant la table de transformée et les propriétés de la transformée de Laplace
 3. Décomposer $X(p)$ en éléments simples puis utiliser la table de transformée pour obtenir $x(t)$ par transformée inverse

3.2 Exemple, déterminer $y(t)$, avec $y(0)=0$

$$\frac{dy(t)}{dt} - 3y(t) = e^{-2t}$$

3.2 Exemple, déterminer $y(t)$, avec $y(0)=0$

$$\frac{dy(t)}{dt} - 3y(t) = e^{-2t}$$

- J'effectue la transformée de Laplace

$$p.Y(p) - y(0) - 3.Y(p) = \frac{1}{p+2}$$

3.2 Exemple, déterminer $y(t)$, avec $y(0)=0$

$$\frac{dy(t)}{dt} - 3y(t) = e^{-2t}$$

- J'effectue la transformée de Laplace

$$p.Y(p) - y(0) - 3.Y(p) = \frac{1}{p+2}$$

- Avec $y(0)=0$

$$(p-3).Y(p) = \frac{1}{p+2}$$

3.2 Exemple, déterminer $y(t)$, avec $y(0)=0$

$$\frac{dy(t)}{dt} - 3y(t) = e^{-2t}$$

- J'effectue la transformée de Laplace

$$p.Y(p) - y(0) - 3.Y(p) = \frac{1}{p+2}$$

- Avec $y(0)=0$

$$(p-3).Y(p) = \frac{1}{p+2}$$

- D'où

$$Y(p) = \frac{1}{(p+2).(p-3)}$$

3.2 Exemple, déterminer $y(t)$, avec $y(0)=0$

$$\frac{dy(t)}{dt} - 3y(t) = e^{-2t}$$

- J'effectue la transformée de Laplace

$$p.Y(p) - y(0) - 3.Y(p) = \frac{1}{p+2}$$

- Avec $y(0)=0$

$$(p-3).Y(p) = \frac{1}{p+2}$$

- D'où

$$Y(p) = \frac{1}{(p+2).(p-3)}$$

- Décomposition en éléments simples

$$Y(p) = \frac{A}{(p+2)} + \frac{B}{(p-3)}$$

3.2 Exemple, déterminer $y(t)$, avec $y(0)=0$

$$\frac{dy(t)}{dt} - 3y(t) = e^{-2t}$$

- J'effectue la transformée de Laplace $p.Y(p) - y(0) - 3.Y(p) = \frac{1}{p+2}$

- Avec $y(0)=0$ $(p-3).Y(p) = \frac{1}{p+2}$

- D'où $Y(p) = \frac{1}{(p+2).(p-3)}$

- Décomposition en éléments simples $Y(p) = \frac{A}{(p+2)} + \frac{B}{(p-3)}$

- Après détermination de A et B $Y(p) = \frac{-1/5}{(p+2)} + \frac{1/5}{(p-3)}$

3.2 Exemple, déterminer $y(t)$, avec $y(0)=0$

$$\frac{dy(t)}{dt} - 3y(t) = e^{-2t}$$

- J'effectue la transformée de Laplace $p.Y(p) - y(0) - 3.Y(p) = \frac{1}{p+2}$
- Avec $y(0)=0$ $(p-3).Y(p) = \frac{1}{p+2}$
- D'où $Y(p) = \frac{1}{(p+2).(p-3)}$
- Décomposition en éléments simples $Y(p) = \frac{A}{(p+2)} + \frac{B}{(p-3)}$
- Après détermination de A et B $Y(p) = \frac{-1/5}{(p+2)} + \frac{1/5}{(p-3)}$
- D'où l'expression de $y(t)$ après transformée inverse $y(t) = \frac{-1}{5}e^{-2t} + \frac{1}{5}e^{3t}$

4. Etude d'un système analogique - système du premier ordre

4.1 Etude d'un système analogique - Fonction de
transfert

4.2 Analyse de la stabilité d'un système

4.3 Système du premier ordre

4.1 Relation entre transformée de Laplace et équation différentielle et fonction de transfert

- Soit l'équation différentielle exprimant la relation entre le signal d'entrée $e(t)$ et le signal $s(t)$ d'un système :

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = b_0 e(t) + b_1 \frac{de(t)}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m}$$

- En supposant les CI nulles, appliquer la transformée de Laplace aux 2 membres de l'équation en utilisant :

$$L\left\{\frac{d^i x(t)}{dt^i}\right\} = p^i \cdot X(p)$$

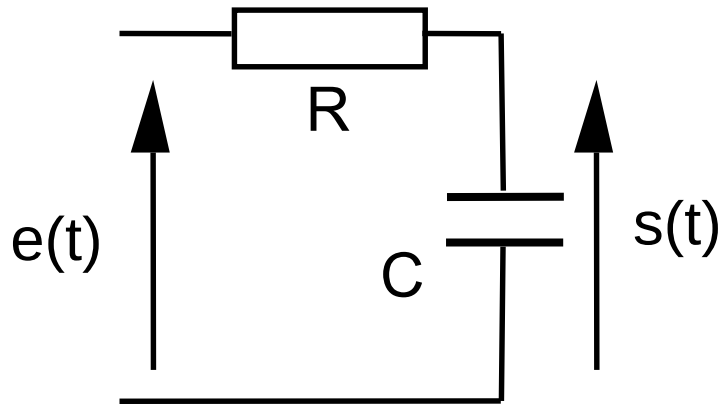
$$(a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n) \cdot S(p) = (b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m) \cdot E(p)$$

Fonction de
transfert

$$G(p) = \left[\frac{S(p)}{E(p)} \right]_{C_I=0} = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j p^j}{\sum_{i=0}^n a_i p^i}$$

Transformée de Laplace, JMT, IUT de Grenoble, Département RT

4.1 Application : Mise en équation d'un circuit RC



$$u_R(t) = R.i(t) \qquad u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

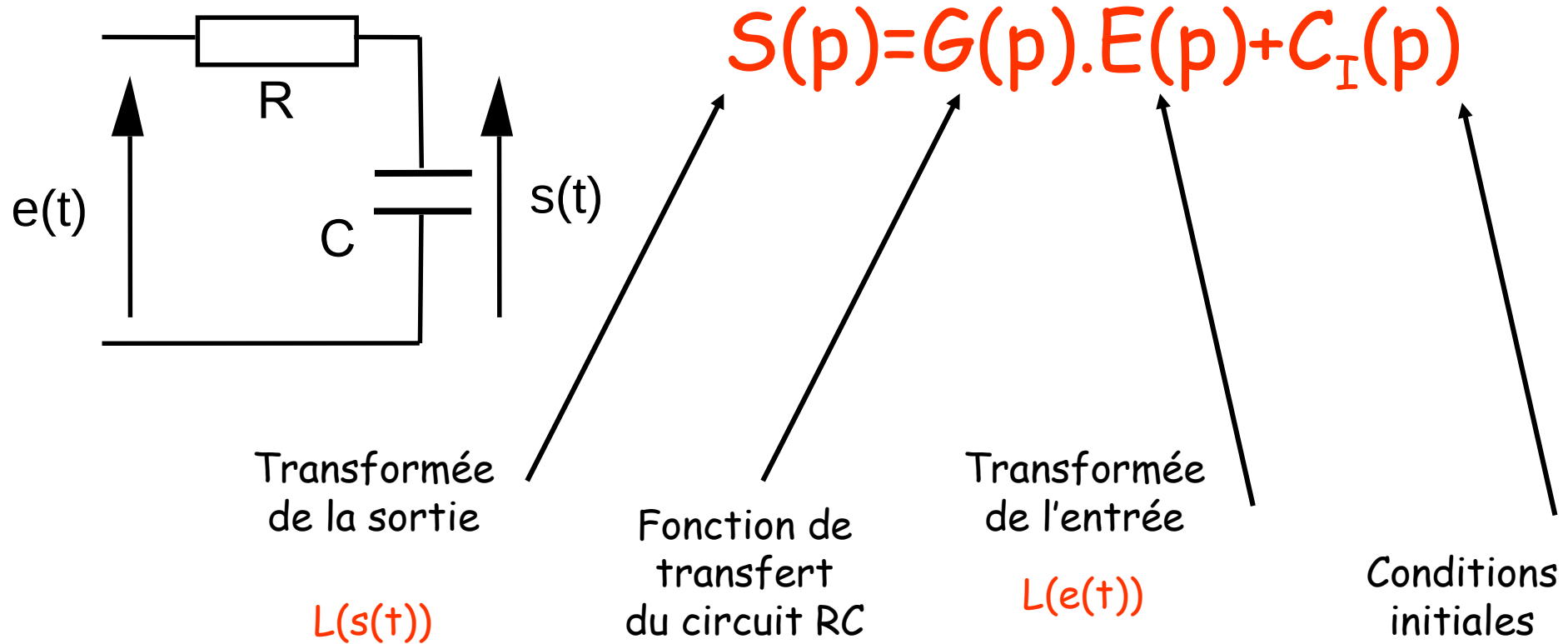
$$i(t) = C \frac{du_C}{dt}$$

$$u_R(t) + u_C(t) = e(t)$$

$$RC \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$$

$$(RC.(p.S(p) - s(0))) + S(p) = E(p)$$

4.1 Application : Mise en équation d'un circuit RC



$$G(p) = \frac{1}{1 + RCp}$$

4.1 Relation entre transformée de Laplace et équation différentielle - Fonction de transfert (exemple)

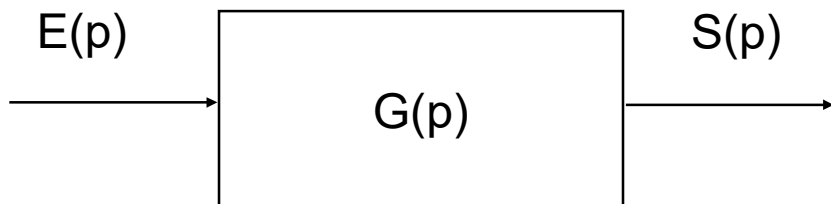
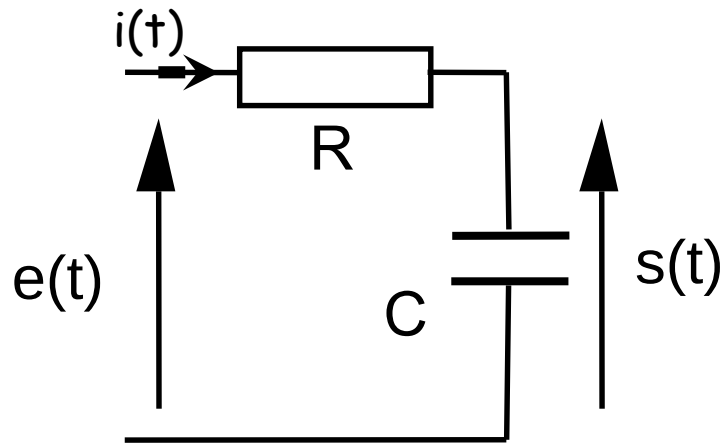
- Déterminer la fonction de transfert associée à un circuit RC

$$(RC.(p.S(p) - s(0))) + S(p) = E(p)$$

On suppose que les **conditions initiales sont nulles**, on peut alors écrire

$$(RCp + 1).S(p) = E(p)$$

$$S(p) = G(p).E(p)$$



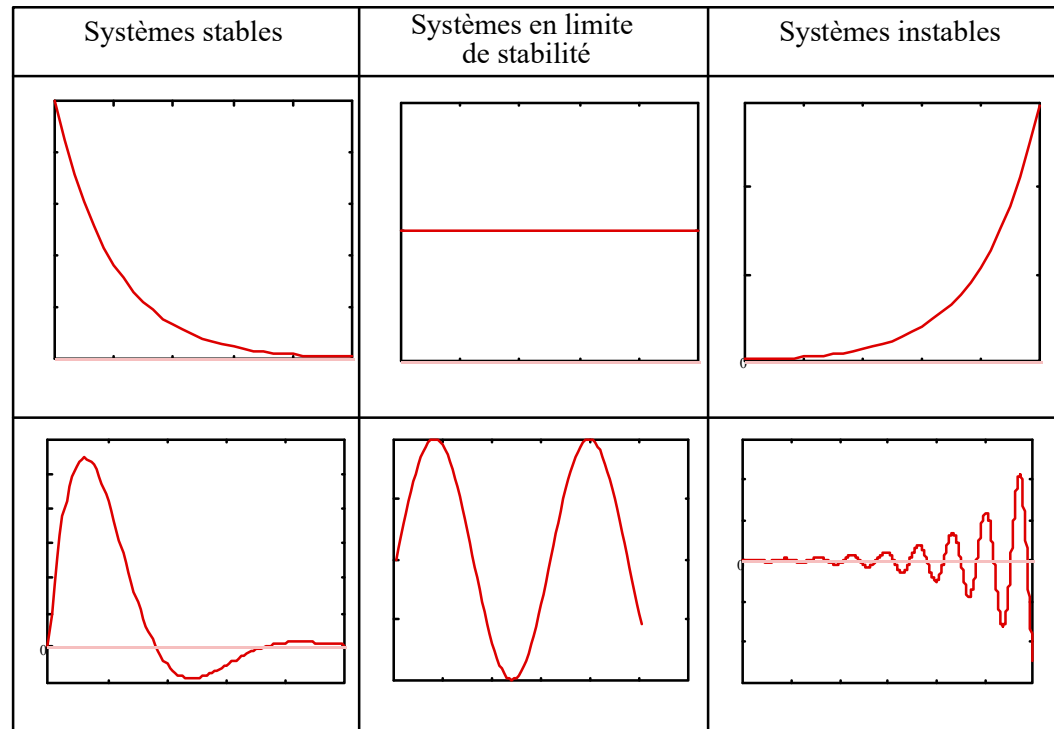
Fonction de transfert

$$G(p) = \left[\frac{S(p)}{E(p)} \right]_{C_I=0} = \frac{1}{1 + RCp}$$

4.2 Stabilité d'un système à temps continu

- Définition
 - Un système est stable si sa réponse à une entrée bornée dans le temps est elle-même bornée dans le temps

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} s(t) = 0$$



4.2 Analyse de la stabilité d'un système à temps continu

- Soit un système à temps continu décrit par :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots + b_mp^m}{a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_np^n} = \frac{\sum_{j=0}^n b_j p^j}{\sum_{i=0}^m a_i p^i}$$

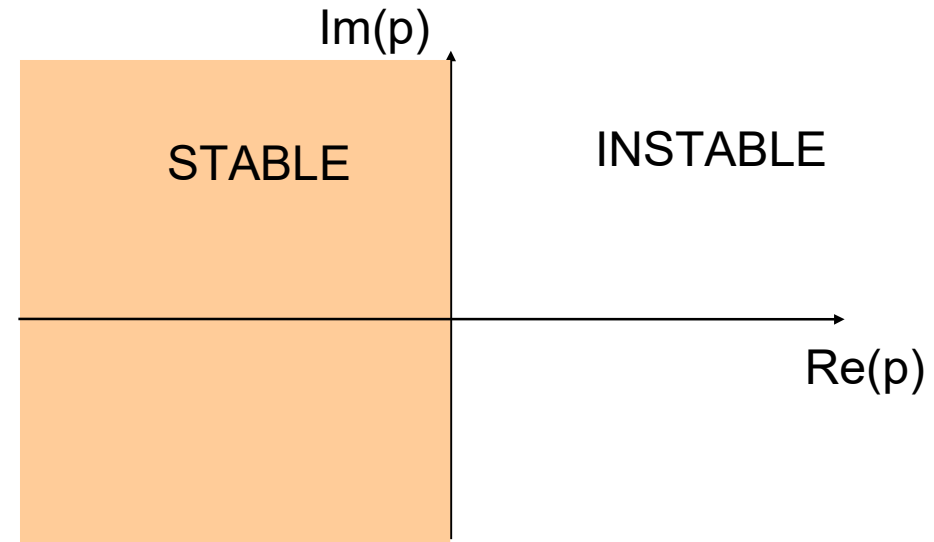
- Le système est stable si tous les pôles p_i : racine du dénominateur de $G(p)$ sont à partie réelle négative

$$\text{Re}(p_i) < 0$$

- Exemples :

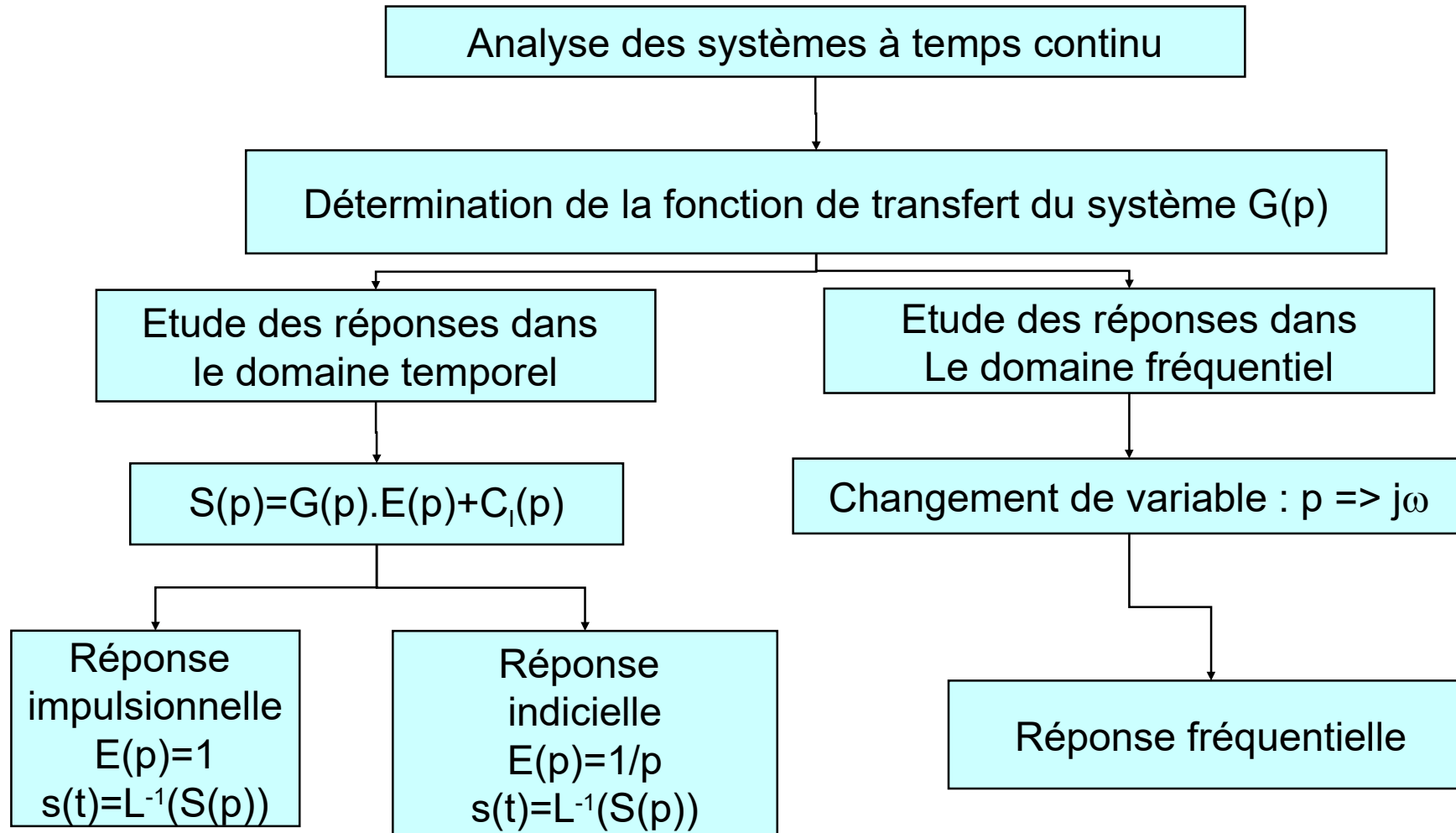
$$X_1(p) = \frac{p^2}{p^2 + p - 2} = \frac{p^2}{(p-1)(p+2)}$$

$$X_2(p) = \frac{10p-1}{p^2 + 2p + 1} = \frac{10p-1}{(p+1)^2}$$



4.3 Utilisation de la transformée de Laplace pour l'étude des systèmes

- Outil mathématique facilitant l'analyse des systèmes à temps continu



4.3 Analyse des systèmes du premier ordre

Rappel : on appelle équation différentielle du **premier ordre** toute relation entre la variable t , une fonction $s(t)$ et sa dérivée première $s'(t)$

4.3 Analyse des systèmes du premier ordre

Equation générale d'un système du premier ordre

$$a_0 \cdot s(t) + a_1 \frac{ds}{dt} = b_0 \cdot e(t) + b_1 \frac{de}{dt}$$

En respectant les propriétés et tables de transformée de Laplace, les équations précédentes deviennent :

$$a_0 S(p) + a_1 (pS(p) - s(0)) = b_0 E(p) + b_1 (pE(p) - e(0))$$

On suppose que les **conditions initiales sont nulles**, on peut alors écrire

$$G(p) = \left[\frac{S(p)}{E(p)} \right]_{C_I=0} = \frac{b_0 + b_1 p}{a_0 + a_1 p}$$

Transformée de Laplace, JMT, IUT de Grenoble, Département RT

4.3 Analyse des systèmes du premier ordre du type passe-bas

Equation générale d'un système du premier ordre de type passe-bas

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds}{dt} = b_0 e(t)$$

En respectant les propriétés et tables de transformée de Laplace, les équations précédentes deviennent :

$$a_0 S(p) + a_1 (pS(p) - s(0)) = b_0 E(p)$$

$$G(p) = \frac{b_0}{a_0 + a_1 p}$$

$$G(p) = \frac{K}{T \cdot p + 1}$$

K : gain

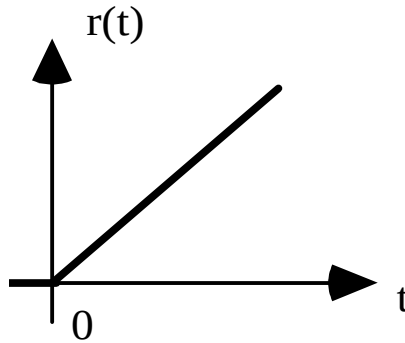
T : constante de temps

! $K = b_0/a_0$ et $T = a_1/a_0$!

Retour sur l'impulsion de Dirac

- **La rampe unitaire $r(t)$**

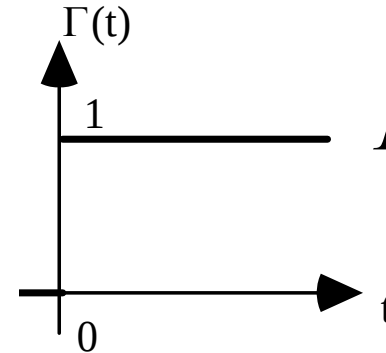
$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ t & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$



$$L\{r(t)\} = \frac{1}{p^2}$$

- **L'échelon unitaire $\Gamma(t)$**

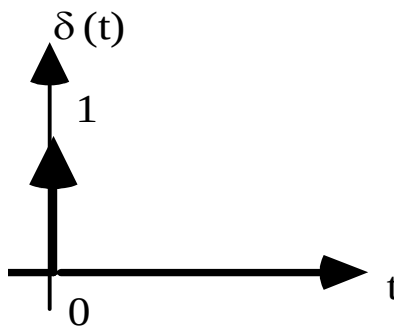
$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$



$$L\{\Gamma(t)\} = \frac{1}{p}$$

- **L'impulsion de Dirac $\delta(t)$**

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \neq 0 \\ 1 & \text{pour } t = 0 \end{cases}$$



$$L\{\delta(t)\} = 1$$

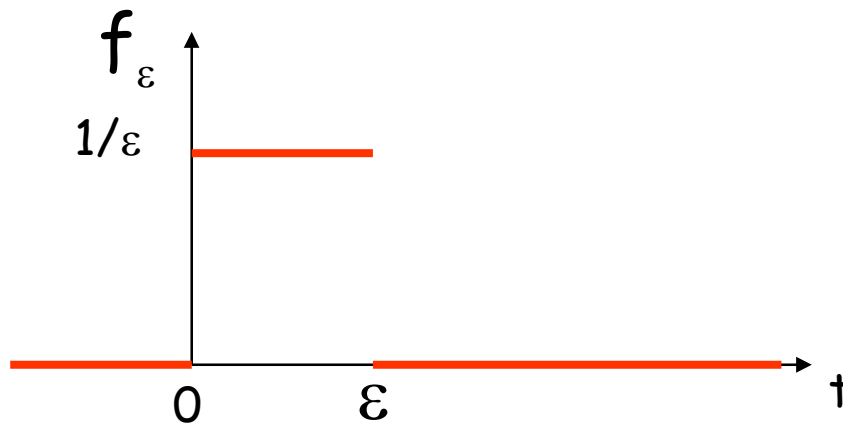
- **L'exponentielle décroissante**

$$L\{e^{-\alpha t}\} = \frac{1}{p + \alpha}$$

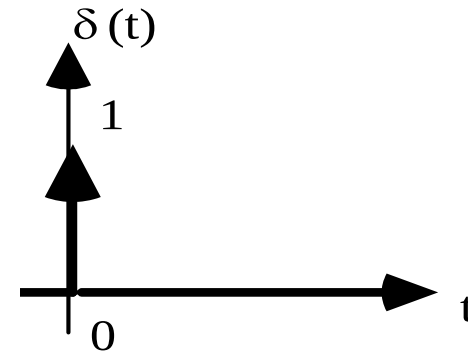
Impulsion de Dirac

- Fonction impulsion unité (ou distribution de Dirac)

$$f_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{si } t \in [0, \varepsilon[\\ 0 & \text{si } t \notin [0, \varepsilon[\end{cases}$$



$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{\varepsilon}(t)$$



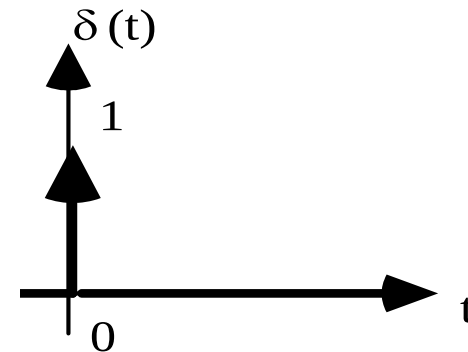
Propriétés de l'impulsion de Dirac

Surface unitaire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\varepsilon}(t) dt = 1$$

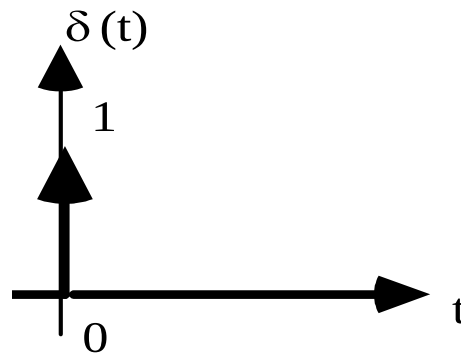
L'impulsion de Dirac
 permet de représenter
 une action de **grande**
amplitude s'exerçant
 durant un **temps très**
court
 (ex : flash, éclair...)

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{\varepsilon}(t)$$



Transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac (1/2)

$$\begin{aligned}
 L(\delta(t)) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \cdot e^{-pt} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} \cdot \int_0^{\varepsilon} e^{-pt} dt \right) \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} \cdot \left[\frac{-1 \cdot e^{-pt}}{p} \right]_0^{\varepsilon} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{-e^{-p\varepsilon} + 1}{p \cdot \varepsilon} \right)
 \end{aligned}$$



Transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac (2/2)

- D.L. au voisinage de 0 de e^{-x} :

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^{-p\varepsilon}}{p\varepsilon} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \left(1 - (p\varepsilon) + \frac{(p\varepsilon)^2}{2} - \frac{(p\varepsilon)^3}{6} + \dots \right)}{p\varepsilon} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\left(p\varepsilon - \frac{(p\varepsilon)^2}{2} + \dots \right)}{p\varepsilon} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(1 - \frac{(p\varepsilon)}{2} + \dots \right) = 1$$

donc $L(\delta(t)) = 1$

4.3 Analyse des systèmes du premier ordre du type passe-bas

Equation générale d'un système du premier ordre de type passe-bas

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds}{dt} = b_0 e(t)$$

En respectant les propriétés et tables de transformée de Laplace, les équations précédentes deviennent :

$$a_0 S(p) + a_1 (pS(p) - s(0)) = b_0 E(p)$$

$$G(p) = \frac{b_0}{a_0 + a_1 p}$$

$$G(p) = \frac{K}{T \cdot p + 1}$$

K : gain

T : constante de temps

! $K = b_0/a_0$ et $T = a_1/a_0$!

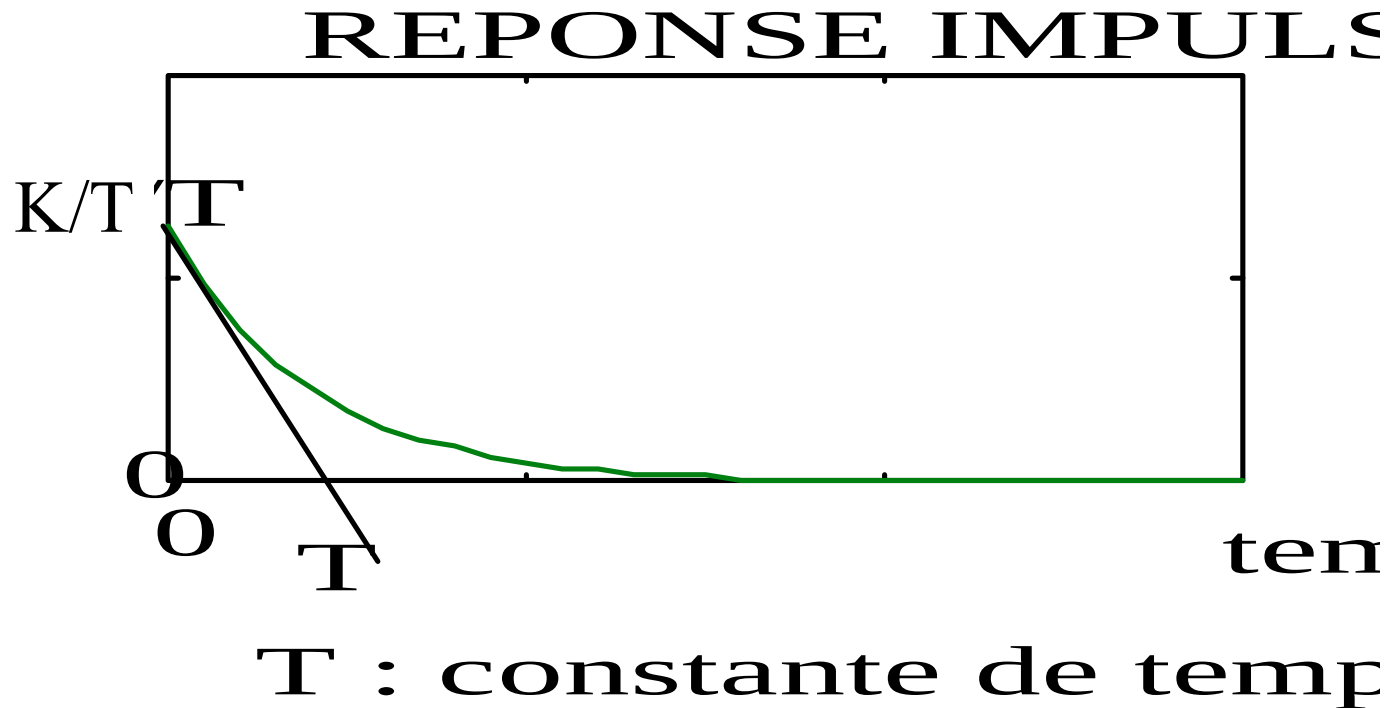
- Le signal d'entrée est $e(t) = \delta(t)$, dans le domaine symbolique $E(p) = 1$.
 - La sortie $S(p) = G(p).E(p) = G(p)$

$$s(t) = L^{-1}(S(p)) = L^{-1}(G(p)) = L^{-1}\left(\frac{K}{1 + Tp}\right) = L^{-1}\left(\frac{\frac{K}{T}}{\frac{1}{T} + p}\right)$$

$$s(t) = \frac{K}{T} \cdot e^{-t/T}$$

4.3 Etude de la réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre de type passe-bas

- En décomposant en éléments simples et en utilisant les transformées inverses de Laplace, on pourra exprimer la réponse impulsionnelle dans le domaine temporel.



4.3 Etude de la réponse indicielle d'un système du premier ordre de type passe-bas

- Le signal d'entrée est $e(t) = \Gamma(t)$, dans le domaine symbolique $E(p) = 1/p$.

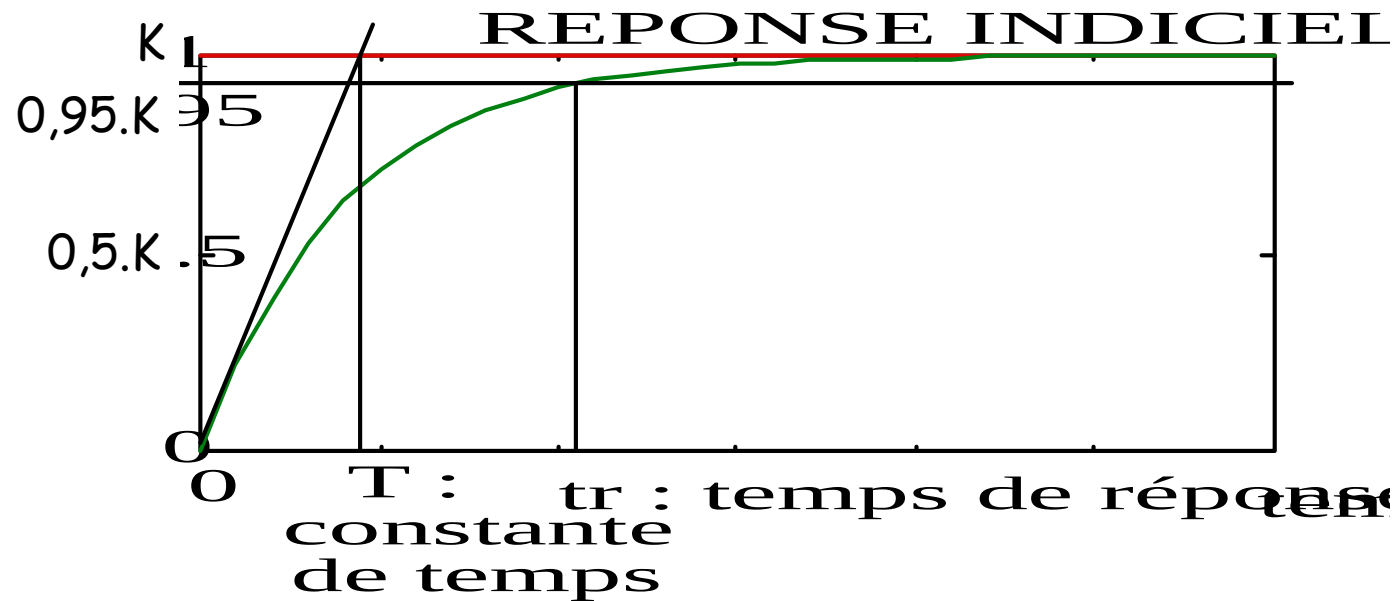
La sortie $S(p) = G(p).E(p) = \frac{G(p)}{p}$

$$s(t) = L^{-1}(S(p)) = L^{-1}\left(\frac{G(p)}{p}\right) = L^{-1}\left(\frac{K}{1+Tp} \cdot \frac{1}{p}\right) = L^{-1}\left(\frac{K/T}{1/T + p} \cdot \frac{1}{p}\right)$$

$$s(t) = L^{-1}(S(p)) = L^{-1}\left(\frac{A_1}{1/T + p} + \frac{A_2}{p}\right) = L^{-1}\left(\frac{-K}{1/T + p} + \frac{K}{p}\right) = -K.e^{-t/T} + K.\Gamma(t)$$

4.3 Etude de la réponse indicielle d'un système du premier ordre de type passe-bas

- En décomposant en éléments simples et en utilisant les transformées inverses de Laplace, on pourra exprimer la réponse indicielle dans le domaine temporel.



Transformée de Laplace, JMT, IUT de Grenoble, Département RT

4.3 Etude de la réponse fréquentielle d'un système du premier ordre de type passe-bas

$$G(p) = \frac{K}{1 + T.p}$$

- Pour cela, on prend la fonction de transfert en Laplace en faisant le changement de variable $p = j\omega$, d'où

$$G_{dB} = 20.\log(|G(j\omega)|) = 20.\log\left(\left|\frac{1}{1 + Tj\omega}\right|\right) = 20.\log\left(\frac{1}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}\right)$$

- Le diagramme de Bode se représente sur une échelle semi-logarithmique avec ω en abscisse (sur l'échelle logarithmique) et G_{dB} en ordonnée, mesuré en dB (sur l'échelle linéaire).

4.3 Etude asymptotique

- quand ω tend vers $+\infty$, G tend vers 0 donc G_{dB} tend vers $-\infty$. On remarque que si ω tend vers $+\infty$, $G_{dB} \approx 20 \log \frac{1}{T \cdot \omega}$ qui est l'équation d'une droite en $\log \omega$ de coefficient directeur -20 et passant par le point $\omega = 1/T$. Cette droite est asymptote à la courbe réelle.
- Pour $\omega_2 = 10 \cdot \omega_1$, ce qui représente une décade, on a :
- $G_{dB2} - G_{dB1} = -20 \log \omega_2 + 20 \log \omega_1 = 20 \cdot (-\log(10 \cdot \omega_1) + \log \omega_1) = 20 \cdot (-\log(10) - \log(\omega_1) + \log(\omega_1)) = -20 \log 10 = -20 \text{ dB}$. On dit que cette droite est une droite de coefficient -20 dB/décade. Une pente de 20 ou -20 dB par décade caractérise un premier ordre. La valeur $\omega_c = 1/T$ s'appelle la pulsation de coupure. C'est la valeur pour laquelle l'atténuation est de -3 dB autrement dit la valeur pour laquelle l'amplitude du signal est divisée par $\frac{1}{\sqrt{2}}$ car $20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx -3 \text{ dB}$.

$$\sqrt{2}$$

$$1/\sqrt{2}$$

4.3 Etude asymptotique

- quand ω tend vers 0, G tend vers 1 donc G_{dB} tend vers 0. On a donc une asymptote horizontale.

- Etude de la phase :

$$\varphi = \arg(G(j\omega)) = \arg(1) - \arg(1 + jT\omega)$$

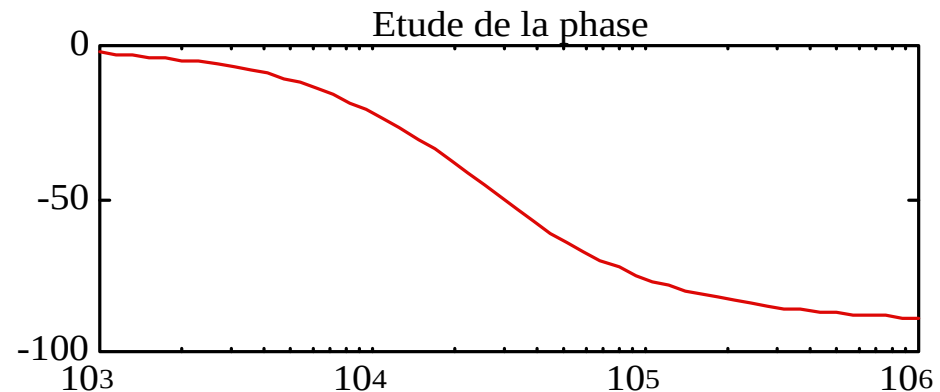
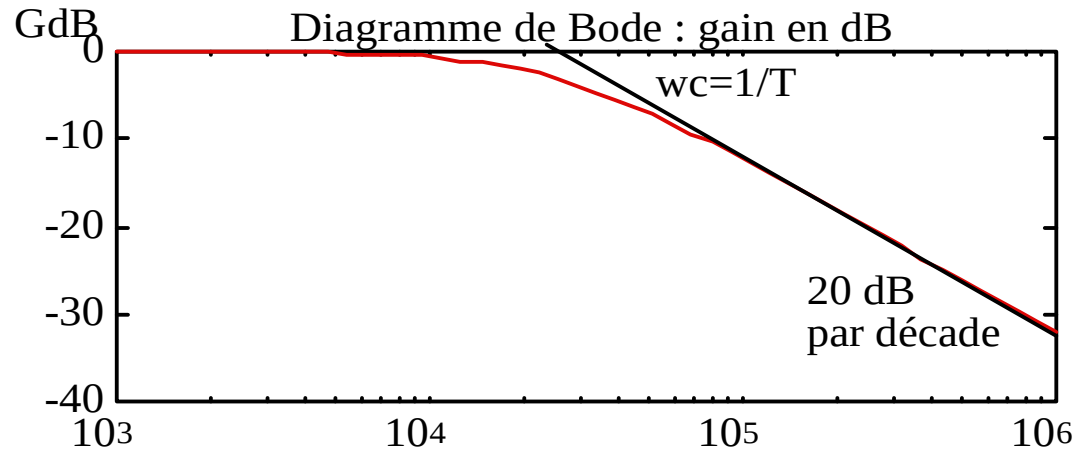
$$\text{Arctg}(0) - \text{Arctg}(T\omega) = 0 - \text{Arctg}(T\omega)$$

$$\text{quand } \omega = 0 \quad \text{quand } \omega = 1/T$$

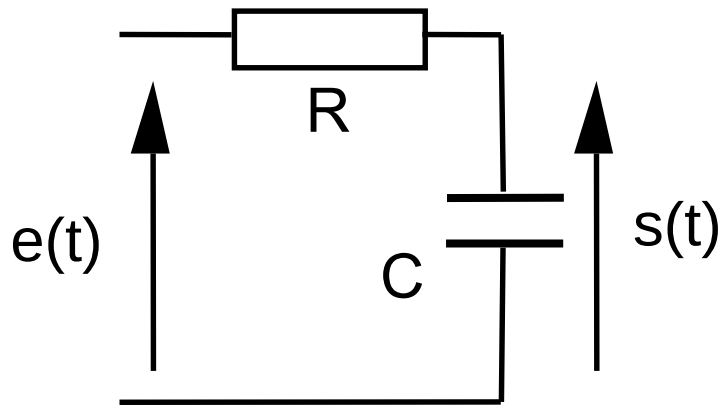
$$\varphi = 0 \quad \left| \quad \varphi = 0 - \text{Arctg}(1) = 0 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{quand } \omega \rightarrow +\infty$$

$$\varphi = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$



4.3 Analyse dans le domaine temporel : détermination de la réponse à l'échelon d'un circuit RC, en supposant les conditions initiales nulles



$$e(t) = \Gamma(t) \text{ et } s(0) = 0$$

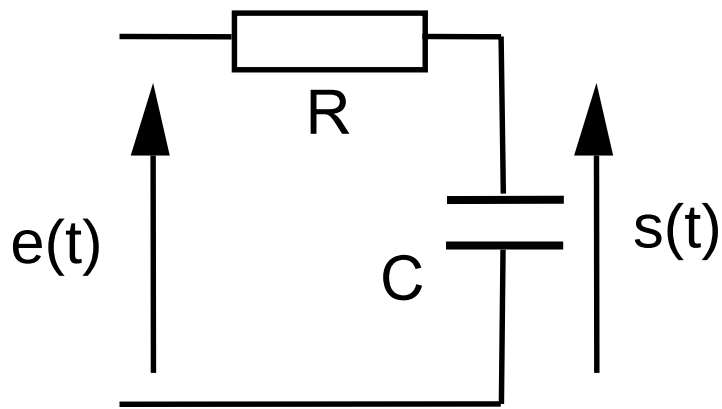
$$S(p) = G(p) \cdot E(p) + C_I(p)$$

$$G(p) = \frac{1}{1 + RCp}$$

$$E(p) = \frac{1}{p}$$

$$= 0$$

4.3 Analyse dans le domaine temporel : détermination de la réponse à l'échelon d'un circuit RC, en supposant les conditions initiales nulles



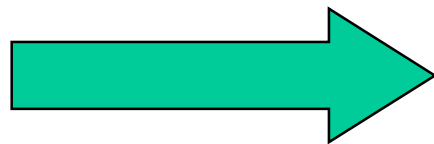
$$e(t) = \Gamma(t) \text{ et } s(0) = 0$$

$$S(p) = G(p) \cdot E(p) + C_I(p)$$

$$G(p) = \frac{1}{1 + RCp}$$

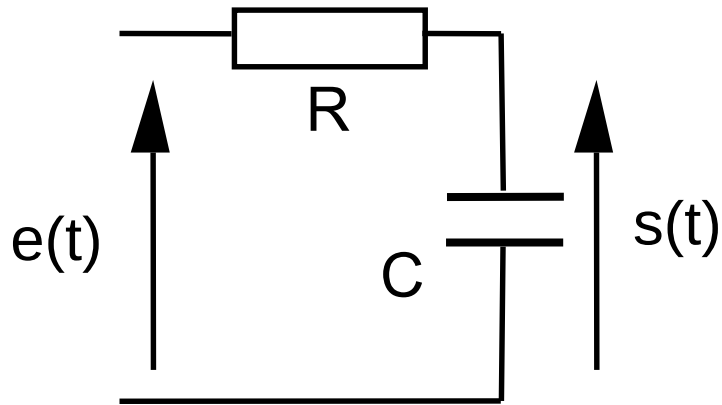
$$E(p) = \frac{1}{p}$$

$$= 0$$



$$S(p) = \frac{1}{1 + RCp} \cdot \frac{1}{p}$$

4.3 Analyse dans le domaine temporel : détermination de la réponse indicielle d'un circuit RC

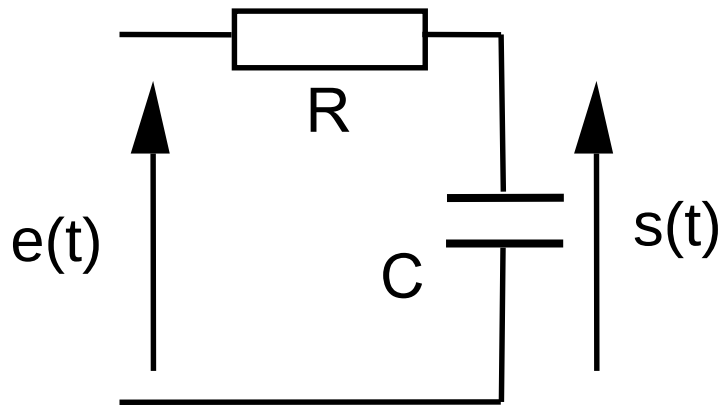


$$S(p) = \frac{1}{1 + RCp} \cdot \frac{1}{p}$$

Décomposition en éléments simples

$$S(p) = \frac{A}{1 + RCp} + \frac{B}{p}$$

4.3 Analyse dans le domaine temporel : détermination de la réponse indicielle d'un circuit RC



$$S(p) = \frac{1}{1 + RCp} \cdot \frac{1}{p}$$

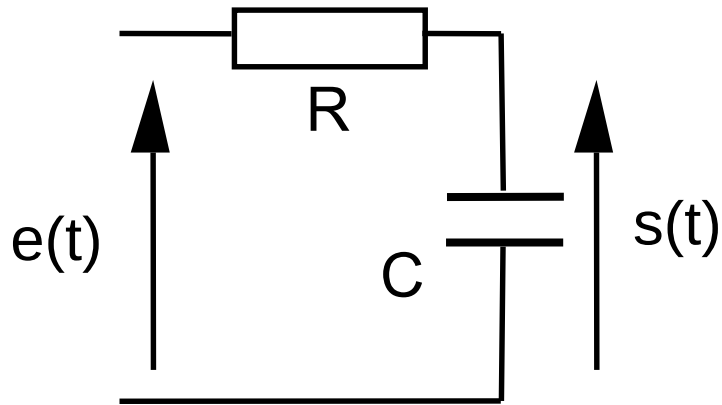
Décomposition en éléments simples

$$S(p) = \frac{A}{1 + RCp} + \frac{B}{p}$$

$$A = \lim_{p \rightarrow -1/RC} \left((1 + RCp) \frac{1}{(1 + RCp) \cdot p} \right) = \lim_{p \rightarrow -1/RC} \left(\frac{1}{p} \right) = -RC$$

$$B = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot \frac{1}{(1 + RCp) \cdot p} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 + RCp} \right) = 1$$

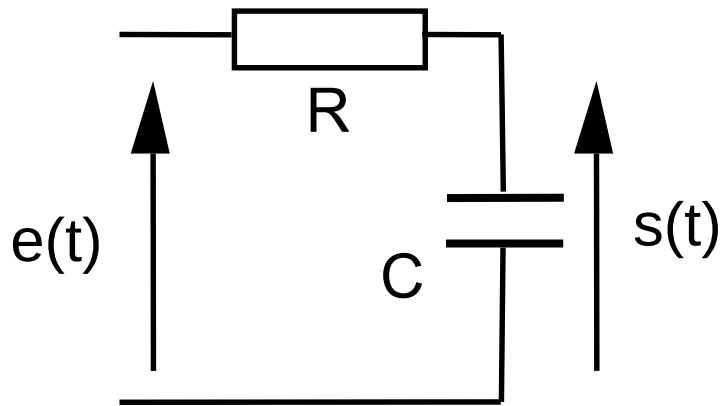
4.3 Analyse dans le domaine temporel : détermination de la réponse indicielle d'un circuit RC



$$S(p) = \frac{-RC}{1 + RCp} + \frac{1}{p}$$

$$S(p) = \frac{-1}{(1/RC) + p} + \frac{1}{p}$$

4.3 Analyse dans le domaine temporel : détermination de la réponse indicielle d'un circuit RC



$$S(p) = \frac{-RC}{1 + RCp} + \frac{1}{p}$$

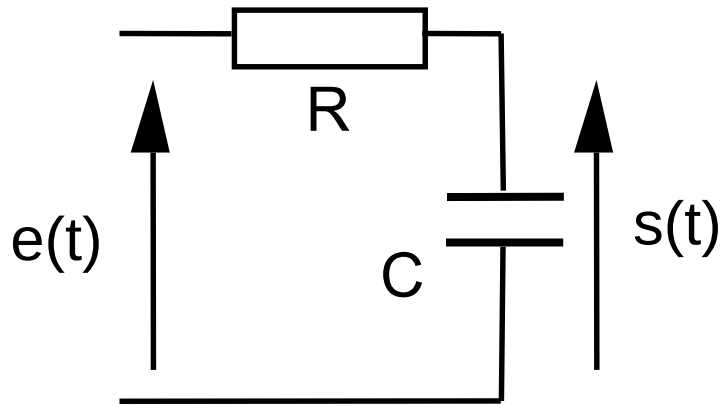
$$S(p) = \frac{-1}{(1/RC) + p} + \frac{1}{p}$$

$$s(t) = -e^{-t/RC} + \Gamma(t)$$

Pour t positif, l'équation s'écrit :

$$s(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

4.3 Analyse dans le domaine temporel : détermination de la réponse indicielle d'un circuit RC



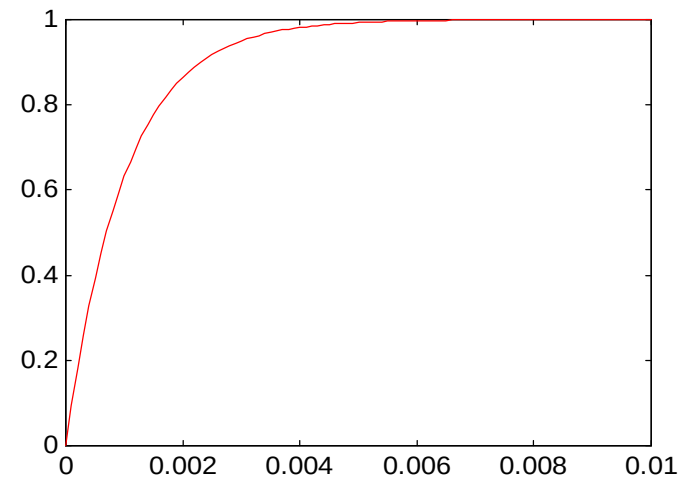
$$S(p) = \frac{-RC}{1 + RCp} + \frac{1}{p}$$

$$S(p) = \frac{-1}{(1/RC) + p} + \frac{1}{p}$$

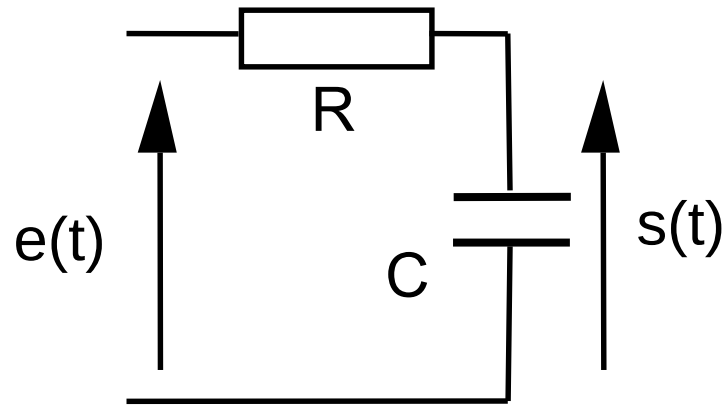
$$s(t) = -e^{-t/RC} + \Gamma(t)$$

Pour t positif, l'équation s'écrit :

$$s(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$



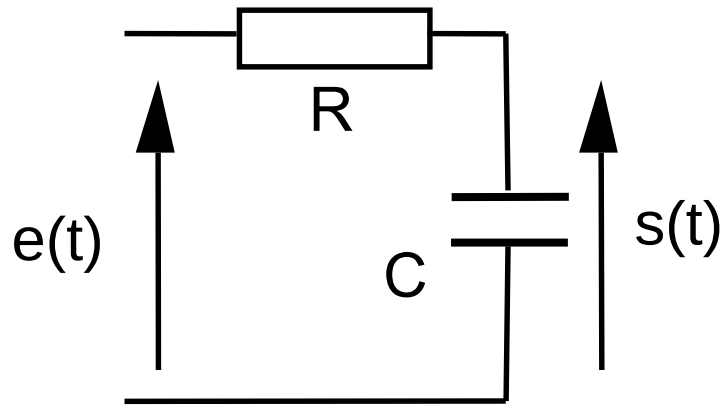
4.3 Analyse dans le domaine fréquentiel : détermination de la réponse fréquentielle d'un circuit RC



$$RC \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$$

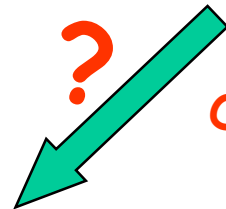
$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + RCp}$$

4.3 Analyse dans le domaine fréquentiel : détermination de la réponse fréquentielle d'un circuit RC



$$RC \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$$

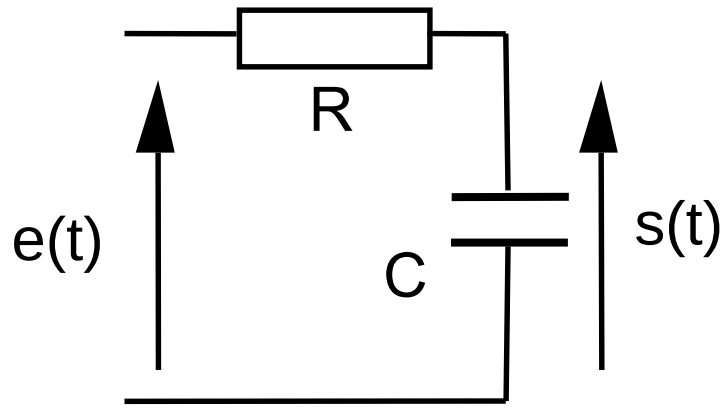
$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + RCp}$$


 On pose $p = j\omega$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + RCj\omega} = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_c}} \quad \text{avec} \quad \omega_c = \frac{1}{RC}$$

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j \cdot \text{Arg}(G(j\omega))}$$

4.3 Analyse dans le domaine fréquentiel : détermination de la réponse fréquentielle d'un circuit RC

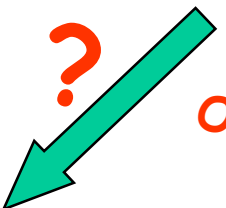


$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + RCj\omega} = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_c}}$$

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j \cdot \text{Arg}(G(j\omega))}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$$

$$\arg(G(j\omega)) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \text{ si } \text{Re}(G(j\omega)) > 0$$

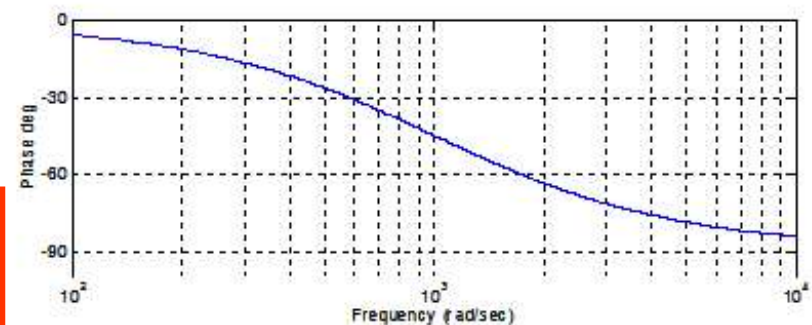
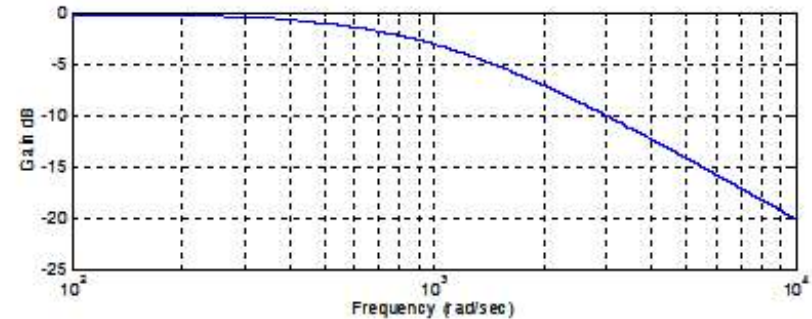


 On pose $p = j\omega$

 avec $\omega_c = \frac{1}{RC}$

$$RC \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$$

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + RCp}$$



5. Etude des systèmes du second ordre

5.1 Etude du système du second ordre

5.2 Réponses temporelles des systèmes de second ordre

5.3 Relations caractéristiques des systèmes de second ordre

5.4 Réponses fréquentielles des systèmes de second ordre

5.1 Systèmes du 2ème ordre

Systèmes décrits par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du 2ème ordre

Fonction de transfert

$$a_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 \cdot s(t) = b_2 \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 \cdot e(t)$$

$$G(p) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$$

Transformée de Laplace, JMT, IUT de Grenoble, Département RT

5.1 Systèmes du 2ème ordre de type passe-bas

- Systèmes décrits par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du 2ème ordre

$$a_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 \cdot s(t) = b_0 \cdot e(t)$$

$$G(p) = \frac{b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$$

- Gain statique K
- Pulsation propre non amortie ω_0
- Coefficient d'amortissement z

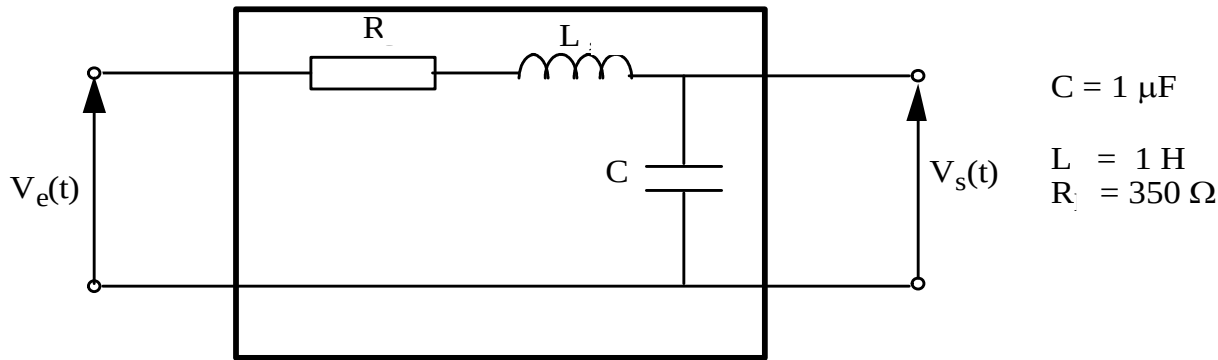
Fonction de transfert à écrire
sous la forme

$$G(p) = \frac{K \cdot \omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2}$$

Autre forme possible :

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2z}{\omega_0} p + 1}$$

5.1 Systèmes du 2ème ordre de type passe-bas - Exemple classique



$$u_R(t) = R.i(t)$$

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt}$$

$$G(p) = \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1} = \frac{K.\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2}$$

- Gain statique $K=1$
- Pulsation propre non amortie
- Coefficient d'amortissement

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$z = \frac{1}{2} R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

5.1 Classes de systèmes du 2ème ordre

- 3 cas distincts dépendant des pôles de la fonction de transfert. Le discriminant est donné par :

$$\Delta = 4z^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(z^2 - 1)$$

1er cas	$\Delta > 0$	$z > 1$	Système apériodique	2 pôles réels
2ème cas	$\Delta = 0$	$z = 1$	Système critique	1 pôle double réel
3ème cas	$\Delta < 0$	$0 < z < 1$	Système pseudo-périodique	2 pôles complexes conjugués

- $z=0$ système purement oscillant (à la pulsation ω_0)
- $z < 0$ systèmes instables non physiques

5.2 2ème ordre - Fonction de transfert

- Fonction de transfert

$$G(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} = \frac{K\omega_0^2}{(p - \alpha_1)(p - \alpha_2)}$$

$$\Delta = 4z^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(z^2 - 1)$$

Pôles

$$\alpha_{1,2} = \frac{-2z\omega_0 \pm 2\omega_0\sqrt{z^2 - 1}}{2} = -\omega_0 z \pm \omega_0\sqrt{z^2 - 1} = \omega_0(-z \pm \sqrt{z^2 - 1})$$

5.2 2ème ordre - Réponses indicielles

- Système apériodique (pôles réels)

CONDITIONS
INITIALES
NULLES

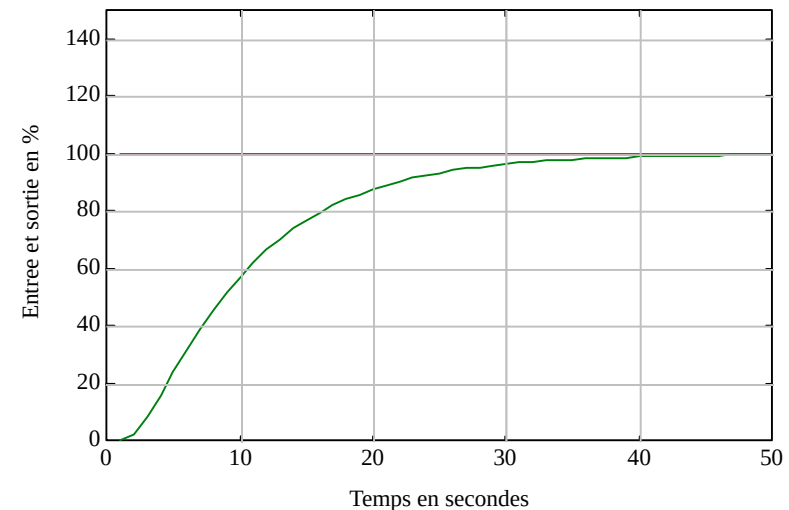
$$G(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} = \frac{K\omega_0^2}{(p - \alpha_1)(p - \alpha_2)}$$

$$S(p) = G(p).E(p) = \frac{K.\omega_0}{(p - \alpha_1)(p - \alpha_2)} \cdot \frac{1}{p} = \frac{A}{p - \alpha_1} + \frac{B}{p - \alpha_2} + \frac{C}{p}$$

$$s(t) = (A.e^{\alpha_1 t} + B.e^{\alpha_2 t} + C).\Gamma(t)$$

Pour avoir une signification physique,
on pourra écrire sous la forme

$$y(t) = K \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{\frac{-t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{\frac{-t}{T_2}} \right)$$



5.2 2ème ordre - Réponses indicielles

- Système pseudo-périodique (pôles complexes conjugués)

$$G(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2}$$

$$S(p) = G(p).E(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} \cdot \frac{1}{p}$$

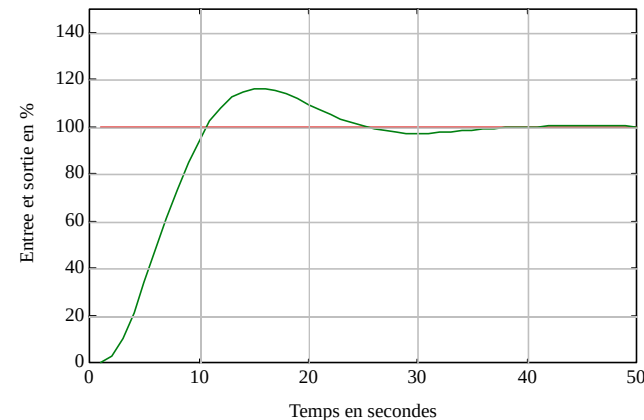
$$S(p) = \frac{Ap + B}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} + \frac{C}{p}$$

$$y(t) = K \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_0 t} \sin(\omega_0 t \sqrt{1-z^2} + \varphi) \right)$$

$$\sin \varphi = \sqrt{1-z^2}$$

$$\cos \varphi = -z$$

	$p^* = -\alpha \pm j\omega_0$
$Ae^{-\alpha t} \sin \omega_0 t$	$\frac{A \omega_0}{(p + \alpha)^2 + \omega_0^2}$
$Ae^{-\alpha t} \cos \omega_0 t$	$\frac{A(p + \alpha)}{(p + \alpha)^2 + \omega_0^2}$
$Ae^{-\alpha t}$	$\frac{A}{p + \alpha}$



5.3 2 me ordre

Relations caractéristiques

- Temps du 1er dépassement

$$t_{D1} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - z^2}}$$

- Pseudo-période

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - z^2}}$$

- Taux de dépassement

$$D_1 \% = 100e^{-\frac{\pi z}{\sqrt{1 - z^2}}}$$

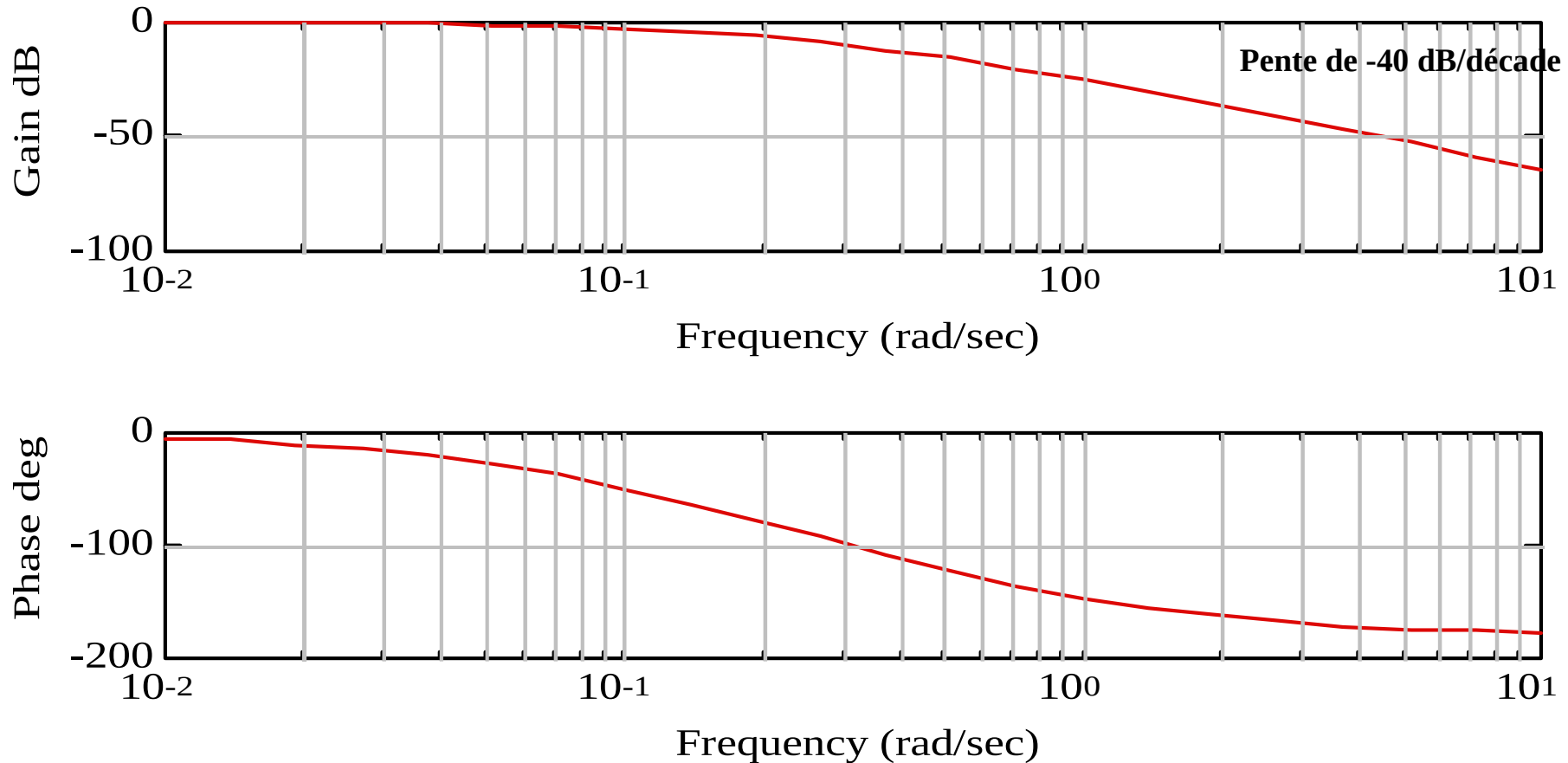
- Pseudo-pulsation

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - z^2}$$

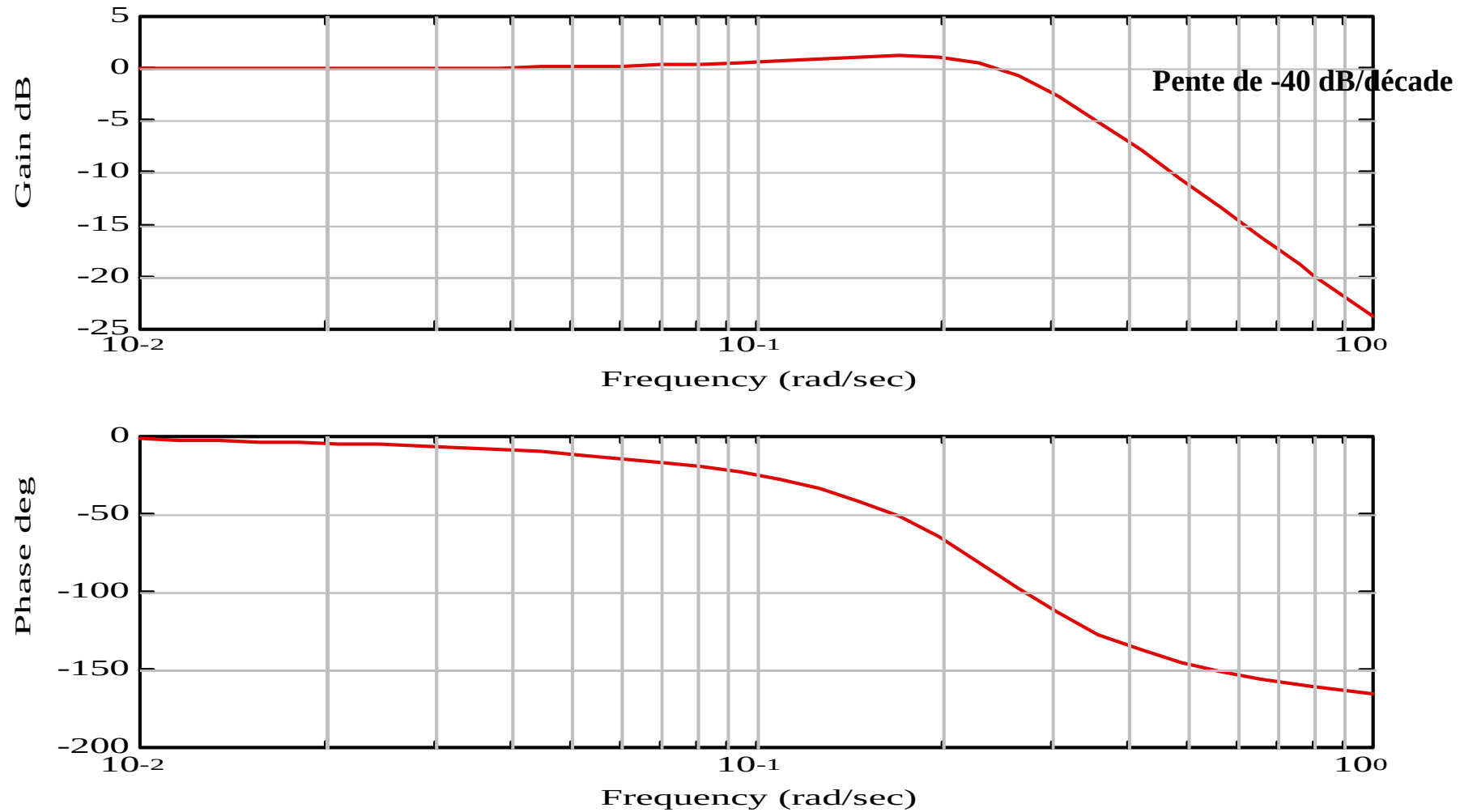
- Pulsation de résonance

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2z^2}$$

5.4 Diag. Bode - 2ème ordre apériodique



5.4 Bode 2ème ordre pseudo-périodique



5.4 Bande passante Fréquence de coupure

- **Pulsation de coupure** ω_c à -3db : fréquence à laquelle un système de type passe-bas présente une amplitude inférieure de 3 dB à celle du régime continu

- Système du 1er ordre $\omega_c = 1/T$
- Système du second ordre

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2z^2} < \omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - z^2} < \omega_0 < \omega_c$$

- la fréquence de coupure caractérise la **bande passante** d'un système passe-bas

une bande passante élevée correspond à une constante de temps faible (systèmes rapides)

5.4 Diagramme de Bode asymptotique des filtres de base du 2ème ordre

- Filtres de base
 - Filtre passe-bas du 2ème ordre :

$$G(p) = \frac{1}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2z}{\omega_0} p + 1}$$

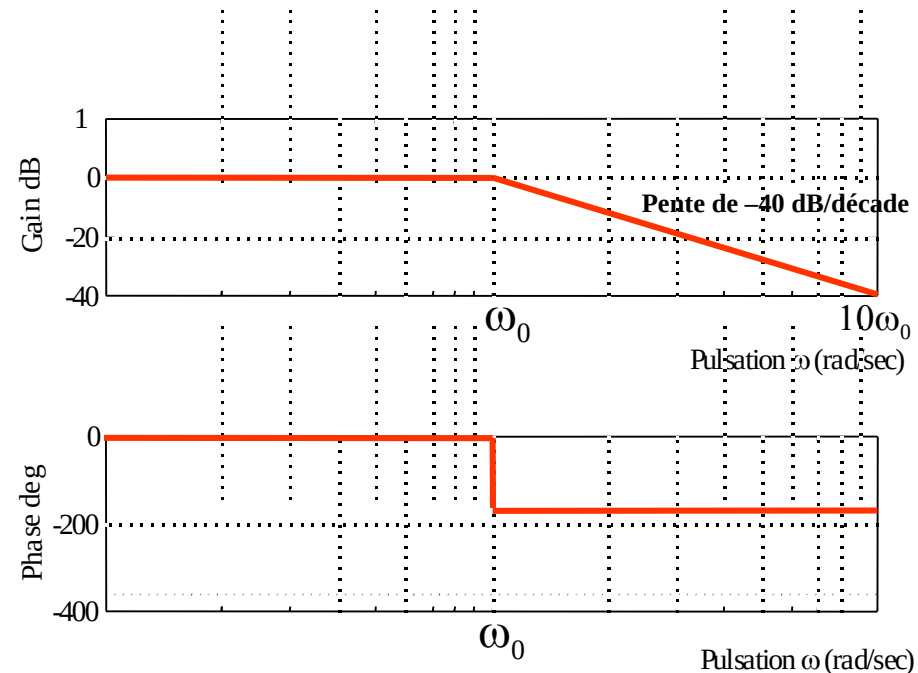
- Filtre amplificateur HF du 2ème ordre :

$$G(p) = \frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2z}{\omega_0} p + 1$$

5.4 Diagramme de Bode asymptotique des filtres de base

- Filtre passe-bas du 2ème ordre

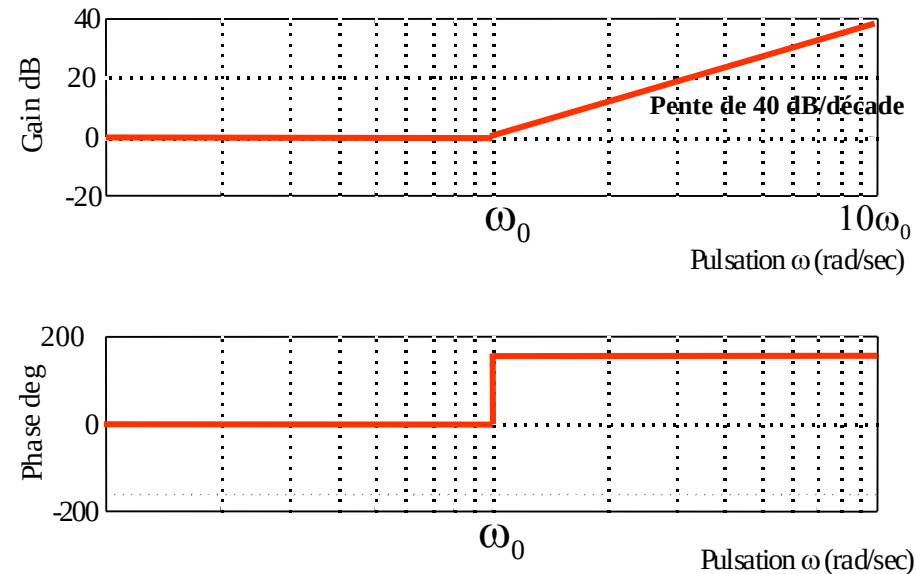
$$G(p) = \frac{1}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2z}{\omega_0} p + 1}$$



5.4 Diagramme de Bode asymptotique des filtres de base

- Filtre amplificateur HF du 2ème ordre

$$G(p) = \frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2z}{\omega_0} p + 1$$



5.4 Diagramme de Bode asymptotique - tracé rapide

- Tracer le diagramme de Bode asymptotique du filtre suivant :

$$G(p) = p \frac{1 + 10p}{0.01p^2 + 0.2p + 1}$$

$$\begin{aligned}
 G(p) &= p \times \left(1 + \frac{p}{0.1}\right) \times \left(\frac{1}{\left(\frac{p}{10}\right)^2 + 2\frac{p}{10} + 1} \right) \\
 &= G_1(p) \times G_2(p) \times G_3(p)
 \end{aligned}$$

$$\omega_{c1} = 1 \text{ rad/sec}$$

$$\omega_{c2} = 0.1 \text{ rad/sec}$$

$$\omega_{c3} = 10 \text{ rad/sec}$$

$$G(dB) = G_1(dB) + G_2(dB) + G_3(dB)$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$$